

## 【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

## 一类考虑恢复期时滞的股市风险模型

李 侠, 张子振

(安徽财经大学 管理科学与工程学院, 安徽 蚌埠 233030)

**摘 要:**提出一类考虑恢复期时滞的股市风险模型,该模型包括易感染子市场、初次感染子市场、二次感染子市场、免疫子市场 4 个子群体。首先,计算得到模型的基本再生数和风险平衡点;然后,以免疫子市场重新变为易感染子市场的时间周期时滞为分岔参数讨论了 Hopf 分岔的存在性,并计算出模型产生 Hopf 分岔的时滞临界点;最后,给出仿真示例验证了所得结果的正确性。

**关键词:**时滞;股市风险;Hopf 分岔;基本再生数;风险平衡点

**中图分类号:** O 175.12 **文献标识码:** A **DOI:**10.13486/j.issn.2097-4973.2025.06.009

近年来,受贸易摩擦、战争、地缘政治、科学技术等因素影响,各国经济增速放缓,部分国家和地区甚至出现负增长现象<sup>[1]</sup>。为应对上述问题,各国政府纷纷出台一系列常规性和非常规性的经济政策,经济政策的不确定性水平急剧攀升,这将给全球经济发展带来不稳定性<sup>[2]</sup>。股市通常被视为经济的晴雨表,一定程度上能反映国际市场对某国家或地区的经济发展预期与资金流动走势,股市的涨跌受多方面因素影响,比如宏观经济因素、政策因素、国际因素等<sup>[3]</sup>。早在 21 世纪初就有学者发现中国股市存在显著的“板块现象”<sup>[4]</sup>,板块联动造成的股市震荡十分明显。其中,风险因素对板块间的影响要大于利好因素,是股民追踪行业指数的重要预警信号<sup>[5-6]</sup>。因此,找到股市风险传染的规律,对投资者更好地选择板块进行投资具有重要意义。研究人员发现,股票市场间的影响作用与传染病的传播机制类似,因此他们通过构建微分方程模型的方式来模拟股市风险传染的过程,研究股市风险传染的动力学性质<sup>[7-11]</sup>,但其研究没有考虑到股市二次感染的影响,即股票子市场在一次异常波动中还未恢复到正常水平时,再次受到关联板块、政策的影响,从而造成子市场的二次波动。陈炜等观察到了这一现象并建立了一类考虑二次感染的股市风险传染 SIR 模型<sup>[12]</sup>,但该模型假设股市风险的传播是瞬时发生的,没有给市场反应的时间,未考虑时滞的影响。因此,本文在文献[12]的基础上,考虑免疫市场的恢复期时滞,提出一类考虑恢复期时滞的股市传染模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I_1(t) - \beta S(t)I_2(t) - \alpha S(t) + \mu I_1(t) + \delta R(t-\tau) + wI_2(t), \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = \beta S(t)I_1(t) + \beta S(t)I_2(t) - \mu I_1(t) - \gamma I_1(t) - \rho I_1(t), \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = \rho I_1(t) - wI_2(t) - \varphi I_2(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \alpha S(t) + \varphi I_2(t) + \gamma I_1(t) - \delta R(t-\tau). \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2024-11-21

基金项目:国家自然科学基金项目(12061033)

第一作者简介:李 侠(1981—),女,安徽蚌埠人,讲师,硕士,主要从事动力系统稳定性、信息管理等研究。

E-mail:muzixia0212@126.com

其中,  $S(t)$  表示在  $t$  时刻下股票市场中的易感染子市场数量,  $I_1(t)$  表示在  $t$  时刻下初次感染的股票子市场数量,  $I_2(t)$  表示在  $t$  时刻下被二次感染的股票子市场数量,  $R(t)$  表示在  $t$  时刻下免疫股票子市场数量,  $\beta, \alpha, \mu, \delta, \omega, \gamma, \rho, \varphi$  为参数,  $\beta$  表示初次传染风险有效概率,  $\alpha$  表示易感染子市场转入移出状态的概率即免疫丧失率,  $\mu$  表示初次感染子市场重新回到易感染子市场的概率,  $\delta$  表示免疫股票子市场免疫力下降重新变成易感染子市场的概率,  $\omega$  表示二次感染子市场重新回到易感染子市场的概率,  $\gamma$  表示初次感染子市场直接获得免疫变成免疫股票子市场的概率,  $\rho$  表示初次感染子市场受到二次感染的概率,  $\varphi$  表示二次感染子市场获得免疫的概率,  $\tau$  表示免疫子市场重新变为易感染子市场的时间周期时滞。本文主要研究时滞  $\tau$  对模型(1)稳定性的影响。

### 1 基本再生数和风险平衡点

根据文献[12]可得模型(1)的无风险平衡点  $E_0 = (\frac{\delta N}{\alpha + \delta}, 0, 0, \frac{\alpha N}{\alpha + \delta})$ , 基本再生数

$$R_0 = \frac{(\omega + \varphi + \rho)\beta\delta N}{(\alpha + \delta)(\mu + \gamma + \rho)(\omega + \varphi)},$$

进而可得模型(1)存在唯一风险平衡点  $E_* = (S_*, I_{1*}, I_{2*}, R_*)$ 。其中,

$$S_* = \frac{(\mu + \gamma + \rho)(\omega + \varphi)}{\beta(\omega + \varphi + \rho)}, I_{1*} = \frac{[(\omega + \varphi + \rho)\beta\delta N - (\alpha + \delta)(\mu + \gamma + \rho)(\omega + \varphi)](\omega + \varphi)}{\beta(\omega + \varphi + \rho)[(\gamma + \delta)(\omega + \varphi) + \rho(\delta + \varphi)]},$$

$$I_{2*} = \frac{[(\omega + \varphi + \rho)\beta\delta N - (\alpha + \delta)(\mu + \gamma + \rho)(\omega + \varphi)]\rho}{\beta(\omega + \varphi + \rho)[(\gamma + \delta)(\omega + \varphi) + \rho(\delta + \varphi)]}, R_* = N - S_* - I_{1*} - I_{2*}.$$

显然, 当  $R_0 > 1$  时,  $I_{1*}, I_{2*}$  均大于 0, 此时模型(1)的唯一风险平衡点  $E_* = (S_*, I_{1*}, I_{2*}, R_*)$  存在。

### 2 局部渐近稳定性和 Hopf 分岔的存在性

模型(1)在风险平衡点  $E_* = (S_*, I_{1*}, I_{2*}, R_*)$  处的雅可比矩阵为

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \delta e^{-\lambda\tau} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ 0 & \rho & s_{33} & 0 \\ \alpha & \gamma & \varphi & -\delta e^{\lambda\tau} \end{bmatrix},$$

其中,

$$s_{11} = -\beta I_{1*} - \beta I_{2*} - \alpha, s_{12} = -\beta S_* + \mu, s_{13} = -\beta S_* + \omega, s_{21} = \beta I_{1*} + \beta I_{2*},$$

$$s_{22} = \beta S_* - \mu - \gamma - \rho, s_{23} = \beta S_*, s_{33} = -\omega - \varphi.$$

相应的特征方程为

$$\lambda^4 + \mathcal{T}_3 \lambda^3 + \mathcal{T}_2 \lambda^2 + \mathcal{T}_1 \lambda + (\Psi_3 \lambda^3 + \Psi_2 \lambda^2 + \Psi_1 \lambda + \Psi_0) e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{2}$$

其中,

$$\mathcal{T}_1 = -s_{11} s_{22} s_{33} + \rho s_{21} s_{13} - \rho s_{11} s_{23} - s_{12} s_{21} s_{33}, \mathcal{T}_2 = (s_{22} + s_{33}) s_{11} + s_{22} s_{33} - \rho s_{23} - s_{21} s_{12}, \mathcal{T}_3 = -(s_{11} + s_{22} + s_{33}),$$

$$\Psi_0 = \delta [-(s_{33} + \varphi)(s_{11} + s_{22})(s_{22} + \rho) - s_{21}(\rho + \gamma)(s_{13} + s_{23}) - \alpha(s_{12} + s_{22})(s_{23} + s_{33}) + \alpha(\varphi + s_{22})(s_{23} + s_{13}) + s_{21}(s_{12} + s_{22})(s_{33} + \varphi) + (\varphi + \gamma)(s_{11} + s_{21})(s_{23} + s_{33})],$$

$$\Psi_1 = \delta [(s_{22} + \rho + s_{11} + s_{21})(\varphi + s_{33}) + (s_{11} + s_{21})(\rho + s_{22}) + \alpha(s_{23} + s_{33} + s_{22} + s_{12}) - \alpha(s_{13} + s_{23}) - s_{21}(\varphi + s_{33} + s_{13} + s_{22}) - (\varphi + \gamma)(s_{11} + s_{21} + s_{23} + s_{33})],$$

$$\Psi_2 = -\delta(s_{22} + \rho + s_{11} + s_{33} + \alpha - \gamma), \Psi_3 = \delta.$$

当  $\tau=0$  时, 方程(2)变为

$$\lambda^4 + (\mathcal{T}_3 + \Psi_3) \lambda^3 + (\mathcal{T}_2 + \Psi_2) \lambda^2 + (\mathcal{T}_1 + \Psi_1) \lambda + \Psi_0 = 0. \tag{3}$$

根据 Hurwitz 稳定性判据, 当  $\tau=0, \Psi_0 > 0, (\mathcal{T}_2 + \Psi_2)(\mathcal{T}_3 + \Psi_3) > (\mathcal{T}_1 + \Psi_1)$ , 且

$$(\Gamma_1 + \Psi_1)(\Gamma_2 + \Psi_2)(\Gamma_3 + \Psi_3) > \Psi_0(\Gamma_3 + \Psi_3)^2 + (\Gamma_1 + \Psi_1)^2$$

成立时, 模型(1)是局部渐近稳定的。

当  $\tau > 0$  时, 假设  $\lambda = i\omega (\omega > 0)$  为方程(2)的解, 代入方程(2)分离实部和虚部, 可以得到

$$\begin{cases} (\Psi_1 \bar{\omega} - \Psi_3 \bar{\omega}^3) \sin \bar{\omega} \tau + (\Psi_0 - \Psi_2 \bar{\omega}^2) \cos \bar{\omega} \tau = \Gamma_2 \bar{\omega}^2 - \bar{\omega}^4, \\ (\Psi_1 \bar{\omega} - \Psi_3 \bar{\omega}^3) \cos \bar{\omega} \tau - (\Psi_0 - \Psi_2 \bar{\omega}^2) \sin \bar{\omega} \tau = \Gamma_3 \bar{\omega}^3 - \Gamma_1 \bar{\omega}. \end{cases} \quad (4)$$

对方程组(4)进行处理可以得到,

$$\bar{\omega}^8 + \Omega_3 \bar{\omega}^6 + \Omega_2 \bar{\omega}^4 + \Omega_1 \bar{\omega}^2 + \Omega_0 = 0, \quad (5)$$

其中,

$$\Omega_0 = -\Psi_0^2, \Omega_1 = \Gamma_1^2 - \Psi_1^2 + 2\Psi_0\Psi_2, \Omega_2 = \Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_3 + 2\Psi_1\Psi_3 - \Psi_2^2, \Omega_3 = \Gamma_3^2 - 2\Gamma_2 - \Psi_3^2.$$

令  $\bar{\omega}^2 = \zeta$ , 方程(5)变为

$$\zeta^4 + \Omega_3 \zeta^3 + \Omega_2 \zeta^2 + \Omega_1 \zeta + \Omega_0 = 0. \quad (6)$$

如果模型(1)参数给定, 则可以利用 Matlab 软件计算得到方程(6)所有根。因此, 假设方程(6)至少存在一个正根  $\zeta_0$ 。于是, 方程(5)存在正根  $\bar{\omega}_0 = \sqrt{\zeta_0}$ 。对于  $\bar{\omega}_0$ , 有  $\tau_0 = \frac{1}{\bar{\omega}_0} \times \arccos \left[ \frac{\Xi_1(\bar{\omega}_0)}{\Xi_2(\bar{\omega}_0)} \right]$ , 其中,

$$\Xi_1(\bar{\omega}_0) = (\Psi_2 - \Psi_2\Gamma_3)\bar{\omega}_0^6 + (\Psi_1\Gamma_3 + \Psi_3\Gamma_1 - \Psi_0 - \Psi_2\Gamma_2)\bar{\omega}_0^4 + (\Psi_0\Gamma_2 - \Psi_1\Gamma_1)\bar{\omega}_0^2,$$

$$\Xi_2(\bar{\omega}_0) = \Psi_3^2\bar{\omega}_0^6 + (\Psi_2^2 - 2\Psi_1\Psi_3)\bar{\omega}_0^4 + (\Psi_1^2 - 2\Psi_0\Psi_2)\bar{\omega}_0^2 + \Psi_0^2.$$

对方程(2)的两边同时求  $\lambda$  关于  $\tau$  的导数, 可以得到

$$\left[ \frac{d\lambda}{d\tau} \right]^{-1} = \frac{4\lambda^3 + 3\Gamma_3\lambda^2 + 2\Gamma_2\lambda + \Gamma_1 + (3\Psi_3\lambda^2 + 2\Psi_2\lambda + \Psi_1)e^{-\lambda\tau}}{(\Gamma_3\lambda^3 + \Gamma_2\lambda^2 + \Gamma_1\lambda)\bar{\omega}e^{-\lambda\tau}} \frac{\tau}{\lambda}.$$

因此,

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\lambda=i\bar{\omega}_0}^{-1} = \frac{f'(\zeta_0)}{\Xi_2(\bar{\omega}_0)},$$

其中,  $f(\zeta_0) = \zeta_0^4 + \Omega_3\zeta_0^3 + \Omega_2\zeta_0^2 + \Omega_1\zeta_0 + \Omega_0$ 。显然, 如果  $f'(\zeta_0) \neq 0$ , 则  $\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\tau} \right]_{\lambda=i\bar{\omega}_0}^{-1} \neq 0$ 。根据文献[13]中的 Hopf 分岔存在性定理, 得到下列结果。

**定理 1** 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时, 模型(1)局部渐近稳定; 当  $\tau > \tau_0$  时, 模型(1)失去稳定性, 在  $\tau = \tau_0$  附近产生 Hopf 分岔, 并在风险平衡点  $E_* = (S_*, I_{1*}, I_{2*}, R_*)$  处产生分岔周期解。

### 3 分岔周期解的方向和稳定性

令  $\tau = \tau_0 + \chi, t \rightarrow (t/\tau)$ , 其中  $\chi \in \mathbf{R}$ , 同时令

$$u_1(t) = S(t) - S_*, u_2(t) = I_1(t) - I_{1*}, u_3(t) = I_2(t) - I_{2*}, u_4(t) = R(t) - R_*,$$

则模型(1)变为

$$\dot{u}(t) = \mathbf{T}_\chi u_t + \mathbf{U}(\chi, u_t). \quad (7)$$

其中,

$$u_t = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T \in C([1, 0], \mathbf{R}^4), \mathbf{T}_\chi(\phi) = (\tau_0 + \chi)(\mathbf{J}_1\phi(0) + \mathbf{J}_2\phi(-1)),$$

$$\mathbf{U}(\chi, \phi) = (\tau_0 + \chi) \begin{bmatrix} -\beta\phi_1\phi_2 - \beta\phi_1\phi_3 \\ \beta\phi_1\phi_2 + \beta\phi_1\phi_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ 0 & \rho & -\omega - \rho & 0 \\ \alpha & \nu & \varphi & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta \end{bmatrix}.$$

根据 Riesz 表示定理可知, 存在有界变差函数  $\rho(\theta, \chi)$ , 当  $\theta \in [-1, 0]$  时, 有

$$\mathbf{T}_\chi(\phi) = \int_{-1}^0 d\rho(\theta, \chi)\phi(\theta)$$

对  $\phi \in C$ , 可以选取  $\rho(\theta, \chi) = (\tau_0 + \chi)(J_1\delta(\theta) + J_2\delta(\theta + 1))$ , 其中  $\delta(\theta)$  为狄克拉函数。之后, 对  $\phi \in C([-1, 0], \mathbf{R}^4)$ , 定义

$$\Gamma(\chi)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & -1 \leq \theta < 0, \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \chi)\phi(\theta), & \theta = 0, \end{cases}$$

且

$$\mathbf{K}(\chi)\phi = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0, \\ \mathbf{U}(\chi, \phi), & \theta = 0, \end{cases}$$

则系统(7)可以转化为

$$\dot{u}(t) = \Gamma(\chi)u_t + \mathbf{K}(\chi)u_t。$$

对  $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbf{R}^{4*})$ , 定义

$$\Gamma^*\phi(s) = \begin{cases} \frac{d\phi(s)}{ds}, & 0 < s \leq 1, \\ \int_{-1}^0 d\rho^T(s, \chi)\phi(-s), & s = 0。 \end{cases}$$

接下来定义双线性内积

$$\langle \varphi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\varphi}(0)\phi(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{\zeta=0}^{\theta} \bar{\varphi}(\zeta - \theta) d\rho(\theta)\phi(\zeta) d\zeta, \tag{8}$$

其中,  $\rho(\theta) = \rho(\theta, 0)$ 。

令  $\Delta(\theta) = (1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)^T e^{i\bar{\omega}_0\tau_0\theta}$  是  $\Gamma(0)$  对应于  $i\bar{\omega}_0\tau_0$  的特征向量,  $\Delta^*(s) = \Theta(1, \Delta_2^*, \Delta_3^*, \Delta_4^*)^T e^{i\bar{\omega}_0\tau_0 s}$  是  $\Gamma^*(0)$  对应于  $-i\bar{\omega}_0\tau_0$  的特征向量。根据计算可以得到

$$\Delta_2 = \frac{s_{21}(i\bar{\omega}_0 - s_{33})}{(i\bar{\omega}_0 - s_{33})(i\bar{\omega}_0 - s_{22}) - \rho s_{23}}, \Delta_3 = \frac{\rho}{i\bar{\omega}_0 - s_{33}}\Delta_2, \Delta_4 = \frac{\alpha + \gamma\Delta_2}{i\bar{\omega}_0 + \delta e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0}} + \frac{\varphi\rho\Delta_2}{(i\bar{\omega}_0 - s_{33})(i\bar{\omega}_0 + \delta e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0})},$$

$$\Delta_2^* = -\frac{i\bar{\omega}_0 + s_{11} + \alpha\Delta_4}{s_{21}}, \Delta_3^* = -\frac{i\bar{\omega}_0\Delta_2^* - s_{12} - s_{22}\Delta_2^* - \gamma\Delta_4^*}{\rho}, \Delta_4^* = -\frac{\delta e^{i\bar{\omega}_0\tau_0}}{i\bar{\omega}_0 - \delta e^{i\bar{\omega}_0\tau_0}}。$$

根据方程(8)可以得到

$$\bar{\Theta} = [1 + \Delta_2\bar{\Delta}_2^* + \Delta_3\bar{\Delta}_3^* + \Delta_4\bar{\Delta}_4^* + \tau_0\delta e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0}\Delta_4(1 - \bar{\Delta}_4^*)]^{-1}。$$

根据文献[13]中的算法, 可以得到下列系数表达式:

$$g_{20} = 2\beta\tau_0\bar{\Theta}(\bar{\Delta}_2^* - 1)(\Delta_2 + \Delta_3), g_{11} = \beta\tau_0\bar{\Theta}(\bar{\Delta}_2^* - 1)(\bar{\Delta}_3^* + \bar{\Delta}_2^* + \Delta_2 + \Delta_3), g_{02} = 2\beta\tau_0\bar{\Theta}(\bar{\Delta}_2^* - 1)(\bar{\Delta}_2^* + \bar{\Delta}_3^*),$$

$$g_{21} = 2\beta\tau_0\bar{\Theta}(\bar{\Delta}_2^* - 1)(W_{11}^{(2)}(0) + \frac{1}{2}W_{20}^{(2)}(0) + \frac{1}{2}\bar{\Delta}_2W_{20}^{(1)}(0) + \bar{\Delta}_2W_{11}^{(1)}(0) +$$

$$W_{11}^{(3)}(0) + \frac{1}{2}W_{20}^{(3)}(0) + \frac{1}{2}\bar{\Delta}_3W_{20}^{(1)}(0) + \bar{\Delta}_3W_{11}^{(1)}(0))。$$

其中,

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}\Delta(0)}{\bar{\omega}_0\tau_0}e^{i\bar{\omega}_0\tau_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}\bar{\Delta}(0)}{3\bar{\omega}_0\tau_0}e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0\theta} + J_a e^{2i\bar{\omega}_0\tau_0\theta}, W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}\Delta(0)}{\bar{\omega}_0\tau_0}e^{i\bar{\omega}_0\tau_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}\bar{\Delta}(0)}{\bar{\omega}_0\tau_0}e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0\theta} + J_b,$$

$$J_a = 2 \begin{bmatrix} s_{11}^* & -s_{12} & -s_{13} & -\delta e^{-i\bar{\omega}_0\tau_0} \\ -s_{21} & s_{22}^* & -s_{23} & 0 \\ 0 & -\rho & s_{33}^* & 0 \\ -\alpha & -\gamma & -\varphi & 2i\bar{\omega}_0 - \delta e^{i\bar{\omega}_0\tau_0} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} J_a^{(1)} \\ J_a^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, J_b = - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \delta \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 \\ 0 & \rho & s_{33} & 0 \\ \alpha & \gamma & \varphi & -\delta \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} J_b^{(1)} \\ J_b^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

其中,

$$s_{11}^* = 2i\bar{\omega}_0 - s_{11}, s_{22}^* = 2i\bar{\omega}_0 - s_{22}, s_{33}^* = 2i\bar{\omega}_0 - s_{33}, J_a^{(1)} = -\beta(\Delta_2 + \Delta_3), J_a^{(2)} = \beta(\Delta_2 + \Delta_3),$$

$$J_b^{(1)} = \beta(\Delta_2 + \Delta_3 + \bar{\Delta}_2 + \bar{\Delta}_3), J_b^{(2)} = \beta(\Delta_2 + \Delta_3 + \bar{\Delta}_2 + \bar{\Delta}_3).$$

最后, 可以计算得到确定分岔周期解的方向和稳定性的系数:

$$\begin{cases} C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0\tau_0}g_{11}g_{20} - 2|g_{11}| - \frac{|g_{02}|^2}{3} + \frac{g_{21}}{2}, \mu_2 = -\frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\{\lambda'(\tau_0)\}}, \\ \beta_2 = 2\text{Re}\{C_1(0)\}, T_2 = -\frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2\text{Im}\{\lambda'(\tau_0)\}}{\omega_0\tau_0}. \end{cases} \quad (9)$$

因此, 根据文献[13]中分岔周期解性质的描述, 可以得到下列结论。

**定理 2** 对于模型(1)在  $\tau_0$  处产生的 Hopf 分岔, 当  $\mu_2 > 0$  时, Hopf 分岔是超临界的, 反之则为次临界; 当  $\beta_2 > 0$  时, 分岔周期解是不稳定的, 反之则为稳定; 当  $T_2 > 0$  时, 分岔周期解为递增, 反之则为递减。

#### 4 仿真示例

选取  $\beta = 0.39, \alpha = 0.17, \mu = 0.19, \delta = 0.32, \omega = 0.08, \gamma = 0.14, \rho = 0.09, \varphi = 0.09$ , 则可以得到模型(1)的示例模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -0.39S(t)[I_1(t) + I_2(t)] - 0.17S(t) + 0.19I_1(t) + 0.32R(t-\tau) + 0.08I_2(t), \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = 0.39S(t)I_1(t) + 0.39S(t)I_2(t) - 0.28I_1(t) - 0.14I_1(t), \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = 0.09I_1(t) - 0.08I_2(t) - 0.09I_2(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = 0.17S(t) + 0.09I_2(t) + 0.14I_1(t) - 0.32R(t-\tau). \end{cases} \quad (10)$$

可得  $R_0 = 67.1325 > 0$ , 用 Matlab 软件计算可以得到示例模型(10)存在唯一风险平衡点  $E_* = (0.7041, 33.6712, 17.8258, 20.1272)$ , 进而计算得到  $\tau_0 = 7.0681$ 。在  $\tau_0$  两边分别随机选取一个数值进行验证。当选取  $\tau = 6.5273 \in (0, \tau_0)$  时, 示例模型(10)是局部渐近稳定的, 此时示例模型(10)的状态轨迹与相图分别如图 1、图 2 所示。

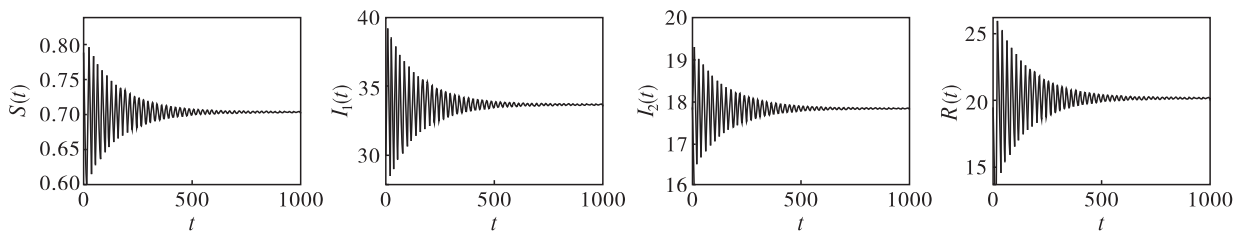


图 1 当  $\tau = 6.5273$  时, 示例模型(10)的状态轨迹

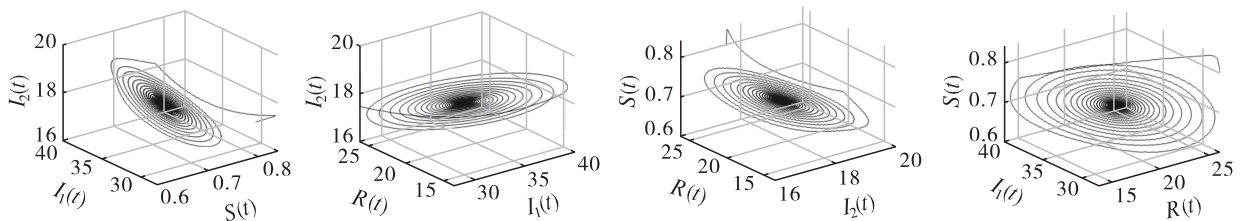


图 2 当  $\tau = 6.5273$  时, 示例模型(10)的相图

当选取  $\tau = 7.1261 > \tau_0$  时, 示例模型(10)将失去稳定性, 并在风险平衡点  $E_*$  处产生 Hopf 分岔, 此时的状态轨迹和相图如图 3、图 4 所示。此外, 经过计算得到公式(9)的各项系数的数值:

$$\begin{aligned} C_1(0) &= -1.1352 + i0.4135, \lambda'(\tau_0) = 0.7323 - i0.8736, \\ \mu_2 &= 5.3576 > 0, \beta_2 = -2.4061 < 0, T_2 = 1.4612. \end{aligned}$$

由此可知,示例模型(10)在  $\tau_0 = 7.068 1$  处产生的 Hopf 分岔是超临界的,并且是稳定递增的。

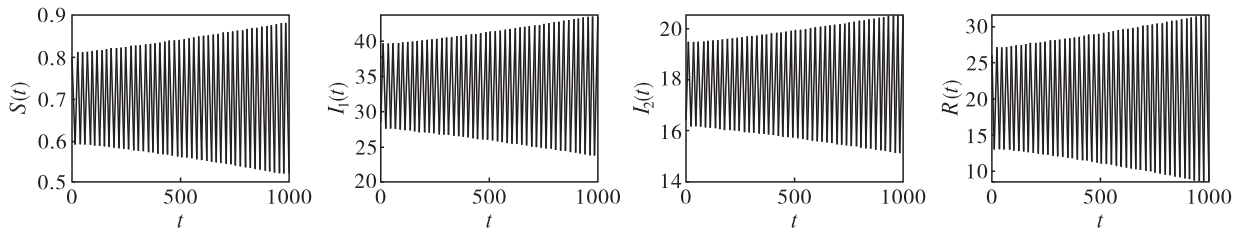


图 3 当  $\tau = 7.126 1$  时,示例模型(10)的状态轨迹

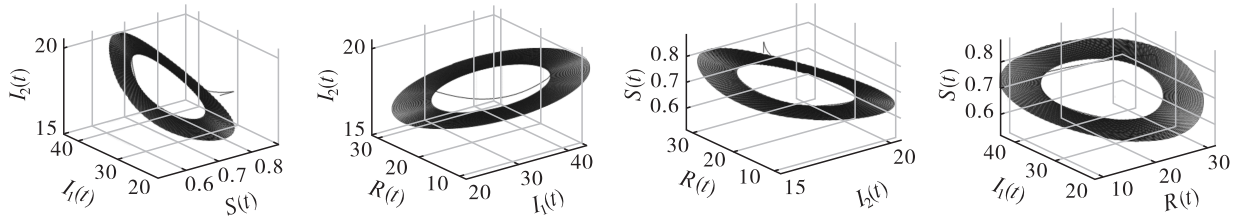


图 4 当  $\tau = 7.126 1$  时,示例模型(10)的相图

### 5 小结

本文在文献[12]研究工作的基础上,进一步考虑了免疫子市场重新变为易感染子市场所需要的时间周期时滞,提出了一类考虑恢复期时滞的股市风险传播模型。将恢复期时滞作为分岔参数,通过观察模型特征方程根的分布情况,研究了模型局部渐近稳定和产生 Hopf 分岔的存在性,推导出模型产生 Hopf 分岔的时滞临界点表达式,进而利用中心流形定理推导判断产生的 Hopf 分岔方向和周期大小等性质。研究发现:当时滞的取值低于临界值时,模型中的易感染子市场、初次感染子市场、二次感染子市场、免疫子市场的数量会在风险平衡点附近保持稳定,此时股票市场间的风险易于掌控;当时滞的取值超过临界值时,系统失去稳定并产生 Hopf 分岔,此时各子市场数量将会产生周期震荡,股市风险的传播将失控。

### 参考文献:

[1] FUNASHIMA Y. Effects of unanticipated monetary policy shocks on monetary policy uncertainty [J]. Finance research letters, 2022, 46:102326.

[2] 李政,朱明皓,温博慧. 经济政策不确定性的跨国溢出效应及其形成机理[J]. 财贸经济, 2021, 42(1): 92-106.

[3] 吴金宴,王鹏. 哪些因素影响了股市风险传染? [J]. 中国管理科学, 2022, 30(8): 57-68.

[4] 何诚颖. 中国股市“板块现象”分析[J]. 经济研究, 2001(12): 82-87.

[5] YANG Z H, ZHOU Y G. Quantitative easing and volatility spillovers across countries and asset classes[J]. Management science, 2016, 63(2): 333-354.

[6] ACEMOGLU D, OZDAGLAR A, TAHBAZ-SALEHI A. Systemic risk and stability in financial networks[J]. American economic review, 2015, 105(2): 564-608.

[7] LIU Q, JIANG D, SHI N, et al. Asymptotic behavior of a stochastic delayed SEIR epidemic model with nonlinear incidence[J]. Physica A: statistical mechanics and its applications, 2016, 462: 870-882.

[8] QIAN Q, YANG Y, GIU J, et al. Information authenticity, spreading willingness and credit risk contagion: a dual-layer network perspective[J]. Physica A: statistical mechanics and its applications, 2019, 536: 122519.

- [9] 李永奎,周宗放.基于无标度网络的关联信用风险传染延迟效应[J].系统工程学报,2015,30(5):575-583.
- [10] 马源源,庄新田,李凌轩.股市中危机传播的 SIR 模型及其仿真[J].管理科学学报,2013,16(7):80-94.
- [11] 王克达,庞晓波,王姗姗.金融危机对全球股票市场的传染研究:基于复杂网络分析方法[J].世界经济研究,2018(4):28-39.
- [12] 陈炜,王玉,刘雪勇.股市风险传染的二次感染 SIR 模型[J].系统工程学报,2023,38(6):791-811.
- [13] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

## A stock market risk model considering recovery time delay

LI Xia, ZHANG Zizhen

(School of Management Science and Engineering,  
Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China)

**Abstract:** A stock market risk model considering recovery time delay is proposed and investigated, and the model includes four sub-populations: susceptible sub-markets, primary infected sub-markets, secondary infected sub-markets, and immune sub-markets. First, the basic regeneration number and the risk equilibrium point of the model are calculated. Then the existence of Hopf bifurcation is discussed by taking the time lag of the time period when the immune sub-markets revert to the susceptible sub-markets as the bifurcation parameter, and the time lag threshold at which the model generates a Hopf bifurcation is calculated. Finally, simulation examples are given to verify the correctness of the obtained results.

**Keywords:** delay; stock market risk; Hopf bifurcation; basic reproduction number; risk equilibrium point

(责任编辑:贾晶晶)

**引用格式** 李侠,张子振.一类考虑恢复期时滞的股市风险模型[J].山东航空学院学报,2025,42(6):67-73.

LI X,ZHANG Z Z. A stock market risk model considering recovery time delay[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2025,42(6):67-73.