【基础理论研究】

路图和圈图的 $D(\beta)$-点和可区别全染色

马倩倩，强会英

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：应用构造染色法、组合分析法研究了路图中任意两点距离不超过 4 与 5，以及圈图中任意两点的距离不超过 $\beta(3\leqslant\beta\leqslant5)$ 的两类点和可区别全染色问题，得到了这两类图相应的 $D(\beta)$-点和可区别全色数。

关键词：$D(\beta)$-点和可区别全染色；$D(\beta)$-点和可区别全色数；路图；圈图；邻和可区别全染色

中图分类号：O 157.5　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.06.013

0　引言

图的全染色是图染色理论中的一个经典问题。为解决一些实际应用问题，全染色问题被赋予新的约束条件，从而衍生出若干新的全染色问题。张忠辅等提出了图的任意两点距离不超过 β 的点可区别全染色的概念，并讨论了一些图的 $D(2)$-点可区别全色数[1]，当图中任意两点的距离 β 增大时，图的 $D(\beta)$-点可区别全色数的复杂性显著增加。Pilśniak M 等提出了邻和可区别全染色的概念，并得到邻和可区别全色数猜想[2]：对于阶数至少为 2 的简单连通图 G，有 $\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\Delta(G)+3$。该猜想的上界为后续研究邻和可区别全染色提供了重要的理论基础，但其仅适用于距离 $\beta=1$ 的情形。袁清厚提出图的距离不大于 β 的任意两点和可区别的全染色概念，并利用算法对阶数有限的一些特殊图进行分析，得到它们的 $D(2)$-点和可区别全色数[3]。然而，随着距离 β 的增大，现有的算法因计算复杂性难以推广至一般图。文献[4-8]研究了一些图的 $D(2)$-点和可区别全染色问题，得到了部分图的 $D(2)$-点和可区别全染色的上界。总体而言，随着距离 β 增大，确定图的 $D(\beta)$-点和可区别全色数的难度也在不断增加。

目前，当 $\beta\geqslant3$ 时，关于图的 $D(\beta)$-点和可区别全色数的研究成果尚不丰富。本文在上述研究的基础上，研究了路图 $P_n(n\geqslant5)$ 的 $D(4)$，$D(5)$-点和可区别的全色数，以及圈图 $C_n(n\geqslant8)$ 的 $D(3)$，$D(4)$-点可区别的全色数，及 $n\geqslant10$ 时，C_n 的 $D(5)$-点可区别全色数，得到了这两类图的 $D(\beta)$-点和可区别全色数。结果表明，上述色数满足 $\chi''_3(G)\leqslant\Delta(G)+3$，$\chi''_4(G)\leqslant\Delta(G)+4$，$\chi''_5(G)\leqslant\Delta(G)+5$。这为后续研究色数 $\chi''_{\beta-\Sigma}(G)$ 与 β 间的关系提供了理论基础。本文均讨论有限、无向的简单连通图。其中，$V(G)$、$E(G)$ 分别表示图 G 的点集、边集，$\varphi(G)$ 表示点集和边集之间的关联函数，$S(v)$ 是点 v 及其相关联边的颜色数之和。图 G 的直径是指 G 中任意两点之间的距离的最大值，记为 diam(G)。其他未说明的符号参见文献[5-13]。

收稿日期：2024-10-22

基金项目：国家自然科学基金项目(61962035)

第一作者简介：马倩倩(2001—　)，女，甘肃渭源人，硕士研究生，主要从事图论及其应用研究。

E-mail：3232119347@qq.com

通信作者简介：强会英(1968—　)，女，甘肃兰州人，教授，主要从事图论及其应用研究。

E-mail：qhy2005ww@126.com

1 预备知识

定义 1[3] 设 $\phi: V(G)\cup E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$ 为图 G 的一个 k-正常全染色，$\forall u,v\in V(G)$，当 $d(u,v)\leqslant\beta(1\leqslant\beta\leqslant \mathrm{diam}(G))$ 时，有 $S(u)\neq S(v)$，其中 $S(u)=\phi(u)+\sum\limits_{uv\in E(G)}\phi(uv)$，则称 ϕ 为图 G 的一个 k-$D(\beta)$-点和可区别全染色，简记为 k-$D(\beta)$-VSDTC，且称 $\chi''_{\beta-\Sigma}(G)=\min\{k\mid$存在 k-$D(\beta)$-VSDTC$\}$ 为 G 的 $D(\beta)$-点和可区别全色数。当 $\beta=1$ 时，G 的 $D(1)$-点和可区别全染色又称为图 G 的邻和可区别全染色，使得 G 存在 k-邻和可区别全染色的最小 k 值称为 G 邻和可区别全色数，记为 $\chi''_{\Sigma}(G)$。当 $\beta=\mathrm{diam}(G)$ 时，称 ϕ 为图 G 的点和可区别全染色。

引理 1 若简单图 G 存在两个距离不超过 2 的最大度点，则 $\chi''_{\beta-\Sigma}(G)\geqslant\Delta(G)+2$。

引理 2 对阶数不小于 3 的简单连通图 G，若 $\beta_1\leqslant\beta_2$，则 $\chi''_{\beta_1-\Sigma}(G)\leqslant\chi''_{\beta_2-\Sigma}(G)$。

引理 3[9] 设 G 是连通图，且 $|V(G)|\geqslant 3$，则 G 的 $D(\beta)$-点可区别全色数 $\chi''_{\beta}(G)\geqslant\mu_\beta(G)$。其中，

$$\mu_\beta(G)=\min\{\theta\mid\binom{\theta}{i+1}\geqslant n,\delta\leqslant i\leqslant\Delta\}$$

称为图 G 的组合全度，n_i 表示图 G 的两两距离最多为 d 的度为 i 的顶点的最大数目，δ 和 Δ 分别表示图 G 的最小度和最大度，θ 是正整数。

引理 4 若 G 是任意的简单连通图，则 $\chi''_{\Sigma}(G)\leqslant\chi''_{\beta-\Sigma}(G)$。

引理 5[8-9] 对于 n 阶路图 $P_n(n\geqslant 8)$，有

$$\chi''_{2-\Sigma}(P_n)=\chi''_{2}(P_n)=4,\ \chi''_{3-\Sigma}(P_n)=\chi''_{3}(P_n)=4。$$

引理 6[11] 对于圈图 $C_n(n\geqslant 3)$，有 $\chi''_{2-\Sigma}(C_n)=\begin{cases}4, n=0(\mathrm{mod}\ 4);\\5, n\neq 0(\mathrm{mod}\ 5)。\end{cases}$

2 主要结果

定理 1 对 $n(n\geqslant 5)$ 阶的路图 P_n，有

$$\chi''_{4-\Sigma}(P_n)=\chi''_{5-\Sigma}(P_n)=\begin{cases}4, 5\leqslant n\leqslant 6;\\5, n\geqslant 7。\end{cases}$$

证明 记 n 阶路图 $P_n=v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n$。根据 β 的值分别讨论如下。

（ⅰ）当 $\beta=4$、$5\leqslant n\leqslant 6$ 时，由引理 3 和引理 4 可得

$$\chi''_{4-\Sigma}(P_n)\geqslant\chi''_{4}(P_n)\geqslant\mu_4(P_n)=4。$$

构造 $n=5,6$ 的一种 4-$D(4)$-VSDTC 方案如下：

$n=5$ 时，边的染色序列为 $\{v_1v_2,v_2v_3,v_3v_4,v_4v_5\}\to\{1,2,3,4\}$，点的染色序列为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_5\}\to\{2,3,4,1,3\}$。此时各点的和序列为 $\{S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_5)\}\to\{3,6,9,8,7\}$。该染色方案在 4-距离以内是点和可区别。

$n=6$ 时，边的染色序列为 $\{v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_5v_6\}\to\{1,2,3,4,1\}$，点的染色序列为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}\to\{2,3,4,1,2,3\}$。对应各点的和序列为 $\{S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_6)\}\to\{3,6,9,8,7,4\}$。显然，此染色方案在 4-距离以内是点和可区别的。

（ⅱ）当 $\beta=4$、$n\geqslant 7$ 时，由引理 1 知，$\chi''_{4-\Sigma}(P_n)\geqslant\Delta+2=4$。由于 4 色集的 3 元子集存在 4 种不同的和值数，要使 P_n 满足 $D(4)$-VSDTC，至少需要 5 种不同的和值数，故 $\chi''_{5-\Sigma}(P_n)\geqslant 5$。构造 $P_n(n\geqslant 7)$ 的一个 5-$D(4)$-VSDTC 方法 φ，见表 1。

易见，上述染色方案在 4-距离内是点和可区别染色。

（ⅲ）当 $\beta=5$、$n=6$ 时，由引理 1 知，$\chi''_{5-\Sigma}(P_n)\geqslant\Delta+2=4$。$P_6$ 的一个 4-$D(5)$-VSDTC 染色方案如下：

边用颜色 1、2、3、4、1 染，点用颜色 4、3、4、1、2、3 染，$v_1\sim v_6$ 的和值分别为 5、6、9、8、7、4。

表 1　$\beta=4$、$n\geqslant7$ 时 P_n 的一个 5-$D(4)$-VSDTC

n	$\varphi(v_iv_{i+1})$	$\varphi(v_i)$	$S(v_i)$
$n=0(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-5}{5}}1234$	$(23451)^{\frac{n}{5}}$	$3(6,9,12,10,8)^{\frac{n-5}{5}}6,9,12,5$
$n=1(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-1}{5}}$	$(23451)^{\frac{n-1}{5}}2$	$3(6,9,12,10,8)^{\frac{n-6}{5}}6,9,12,10,7$
$n=2(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-2}{5}}1$	$(23451)^{\frac{n-2}{5}}23$	$3(6,9,12,10,8)^{\frac{n-2}{5}}4$
$n=3(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-3}{5}}12$	$(23451)^{\frac{n-3}{5}}231$	$3(6,9,12,10,8)^{\frac{n-3}{5}}6,3$
$n=4(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-4}{5}}123$	$(23451)^{\frac{n-4}{5}}2341$	$3(6,9,12,10,8)^{\frac{n-4}{5}}6,9,4$

（ⅳ）当 $\beta=5$、$n\geqslant7$ 时，由引理 2 得 $\chi''_{5-\Sigma}(P_n)\geqslant\chi''_{4-\Sigma}(P_n)\geqslant5$。构造 $P_n(n\geqslant7)$的一个 5-$D(5)$-VSDTC 方法 φ，见表 2，可得 P_n 存在一个 5-$D(5)$-VSDTC。

表 2　$\beta=5$、$n\geqslant7$ 时 P_n 的一个 5-$D(5)$-VSDTC

n	$\varphi(v_iv_{i+1})$	$\varphi(v_i)$	$S(v_i)$
$n=0(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-6}{6}}12345$	$2(451245)^{\frac{n-6}{6}}45121$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-6}{6}}7,10,8,11,6$
$n=1(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-1}{6}}$	$2(451245)^{\frac{n-7}{6}}451241$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-7}{6}}7,10,8,11,12,4$
$n=2(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-2}{6}}1$	$2(451245)^{\frac{n-2}{6}}2$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-2}{6}}3$
$n=3(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-3}{6}}12$	$2(451245)^{\frac{n-3}{6}}41$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-3}{6}}7,3$
$n=4(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-4}{6}}123$	$2(451245)^{\frac{n-4}{6}}451$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-4}{6}}7,10,4$
$n=5(\bmod 6)$	$(123453)^{\frac{n-5}{6}}1234$	$2(451245)^{\frac{n-5}{6}}4512$	$3(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-5}{6}}7,10,8,6$

定理 2　对 $n(n\geqslant8)$阶的圈图 C_n，有 $\chi''_{3-\Sigma}(C_n)=5$，$\chi''_{4-\Sigma}(C_n)=\begin{cases}5,n\neq9;\\6,n=9。\end{cases}$

证明　记 n 阶圈图 $C_n=v_1v_2\cdots v_nv_1$。根据引理 2 和引理 6 得 $\chi''_{4-\Sigma}(C_n)\geqslant\chi''_{3-\Sigma}(C_n)\geqslant4$。要使圈图 C_n 满足 $D(3)$-VSDTC 与 $D(4)$-VSDTC，至少需要 5 种不同的和值数。因 4 色集的 3 元子集存在 4 种不同的和值数，故 $\chi''_{3-\Sigma}(C_n)\geqslant5$，$\chi''_{4-\Sigma}(C_n)\geqslant5$。

（ⅰ）当 $\beta=3$ 时，构造 $C_n(n\geqslant6$ 且 $n\neq7)$的一个 5-$D(3)$-VSDTC 染色方案见表 3。当 $i=n$ 时，表中 v_iv_{i+1}表示 v_nv_1。

表 3　$\beta=3$、$n\geqslant6$ 且 $n\neq7$ 时 C_n 的一个 5-$D(3)$-VSDTC

n	$\varphi(v_iv_{i+1})$	$\varphi(v_i)$	$S(v_i)$
$n=0(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n}{5}}$	$(23451)^{\frac{n}{5}}$	$(8,6,9,12,10)^{\frac{n}{5}}$
$n=1(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-1}{5}}3$	$2(23451)^{\frac{n-6}{5}}45121$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-1}{5}}$
$n=2(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-7}{5}}1251453$	$2(23451)^{\frac{n-7}{5}}413524$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-7}{5}}7,8,9,10,11,12$
$n=3(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-3}{5}}415$	$3(23451)^{\frac{n-3}{5}}52$	$(9,7,10,8,11)^{\frac{n-3}{5}}12,10,8$
$n=4(\bmod 5)$	$(12345)^{\frac{n-4}{5}}4152$	$3(23451)^{\frac{n-4}{5}}524$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-9}{5}}7,10,8,11,12,10,8,11$

（ⅱ）当 $\beta=3$、$n=7$ 时，C_7 的一个染色方案为边的染色序列为$\{v_1v_2,\cdots,v_6v_7,v_7v_1\}\rightarrow\{1,2,5,1,4,5,3\}$，

点的染色序列为$\{v_1,v_2,\cdots,v_7\}\to\{2,4,1,3,5,2,4\}$，此时各点的和序列为$\{S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_7)\}\to\{6,7,8,9,10,11,12\}$。

因此，当$\beta=3$时，C_n存在一个5-$D(3)$-VSDTC。

（ⅲ）当$\beta=4$、$n\geqslant8$且$n\neq9,14$时，C_n的一个5-$D(4)$-VSDTC染色方案φ如表4所示。当$i=n$时，表中v_iv_{i+1}表示v_nv_1。

表 4 $\beta=4$、$n\geqslant8$ 且 $n\neq9,14$ 时 C_n 的一个 5-$D(4)$-VSDTC

n	$\varphi(v_iv_{i+1})$	$\varphi(v_i)$	$S(v_i)$
$n=0(\mathrm{mod}\ 5)$	$(12345)^{\frac{n}{5}}$	$(23451)^{\frac{n}{5}}$	$(8,6,9,12,10)^{\frac{n}{5}}$
$n=1(\mathrm{mod}\ 5)$	$(12345)^{\frac{n-1}{5}}3$	$2(45123)^{\frac{n-6}{5}}45121$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-1}{5}}$
$n=2(\mathrm{mod}\ 5)$	$(12345)^{\frac{n-12}{5}}(1251453)^2$	$2(45123)^{\frac{n-12}{5}}45125451242$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-12}{5}}7,10,8,11,12,9,7,10,8,11,12$
$n=3(\mathrm{mod}\ 5)$	$(12345)^{\frac{n-8}{5}}31251453$	$2(45123)^{\frac{n-13}{5}}451242413524$	$6(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-13}{5}}7,10,8,11,12,6,7,8,9,10,11,12$
$n=4(\mathrm{mod}\ 5)$	$(12345)^{\frac{n-19}{5}}(123453)^2 1251453$	$2(45123)^{\frac{n-19}{5}}451245451242413524$	$6(7,10,8,11,9)^{\frac{n-19}{5}}7,10,8,11,12,9,7,10,8,11,12,6,7,8,9,10,11,12$

（ⅳ）当$\beta=4$、$n=14$时，C_{14}的一个5-$D(4)$-VSDTC染色方案为

$$\{v_1v_2,\cdots,v_{13}v_{14},v_{14}v_1\}\to\{1,2,5,1,4,5,3,1,2,5,1,4,5,3\},$$
$$\{v_1,v_2,\cdots,v_{14}\}\to\{2,4,1,3,5,2,4,2,4,1,3,5,2,4\}。$$

此时$v_1\sim v_{14}$的和值依次按6、7、8、9、10、11、12循环。

（ⅴ）当$\beta=4$、$n=9$时，由于$\mathrm{diam}(C_9)=4$，C_9必须满足9个点的和值各不相同，即C_9的$D(4)$-VSDTC亦是点和可区别的。5色集的3元子集存在7种不同的和值数，不足以区别9个点色和，故$\chi''_{4-\Sigma}(C_n)\leqslant6$。构造圈图$C_9$的一个6-$D(4)$-VSDTC染色方案：边的染色序列为$\{v_1v_2,\cdots,v_8v_9,v_9v_1\}\to\{1,2,5,1,4,5,6,5,3\}$，点的染色序列为$\{v_1,v_2,\cdots,v_9\}\to\{2,4,1,3,5,2,1,2,6\}$，此时各点的和值$S(v_i)$依次为6、7、8、9、10、11、12、13、14。

综上所述，该染法在3-距离和4-距离内满足点和可区别的条件。

定理 3 对$n(n\geqslant10)$阶的圈图C_n，有

$$\chi''_{5-\Sigma}(C(n))=\begin{cases}6, n=4,5(\mathrm{mod}\ 6)\text{且}n\neq11\text{或}n=15;\\7, n=11;\\5,\text{其他}。\end{cases}$$

证明 记n阶圈图$C_n=v_1v_2\cdots v_nv_1$。因为$\chi''_{5-\Sigma}(C_n)\geqslant\chi''_{4-\Sigma}(C_n)=5$，所以分3种情形进行讨论。

（ⅰ）当$n=4,5(\mathrm{mod}\ 6)$且$n\neq11$或$n=15$时，5色集的3元子集有7种不同的和值数。要使圈图C_n满足5-距离内点和可区别全染色，至少需要8种不同的和值数，故$\chi''_{5-\Sigma}(C_n)\geqslant6$。

当$n=4,5(\mathrm{mod}\ 6)$且$n\neq11$时，不定方程$6x_6+7x_7+10x_{10}=n$有非负整数解x_6、x_7、x_{10}。因为

$$n=6m+4=6(m-1)+10, m\geqslant3;$$
$$n=6m+5=6(m-2)+7+10, m\geqslant2,$$

因此，$n=4(\mathrm{mod}\ 6)$或$n=5(\mathrm{mod}\ 6)$且$n\neq11$时，用颜色1、2、3、4、5、3循环染C_n的$6x_6$条边，用1、2、5、1、4、5、3循环染C_n的$7x_7$边，最后用颜色1、2、5、1、4、5、6、5、6、3循环染C_n的$10x_{10}$条边。圈图C_n的一个染色方案如表5所示。

当$n=15$时，边的染色为$\{v_1v_2,\cdots,v_{14}v_{15},v_{15}v_1\}\to\{1,2,5,1,4,5,3,1,2,5,1,4,5,6,3\}$，点$v_1\sim v_{14}$用

颜色 2、4、1、3、5、2、4 循环染，v_{15} 染 5 色，各点的和值依次为 6、7、8、9、10、11、12、6、7、8、9、10、11、15、14。

表 5　$n\geqslant 10$ 且 $n\neq 11,15,17$ 时 C_n 的一个 $D(5)$-VSDTC

n	$\varphi(v_iv_{i+1})$	$\varphi(v_i)$	$S(v_i)$
$n=0 \pmod 6$	$(123453)^{\frac{n}{6}}$	$2(451245)^{\frac{n-6}{6}}45124$	$6(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-6}{6}}7,10,8,11,12$
$n=1 \pmod 6$	$(123453)^{\frac{n-7}{6}}1251453$	$2(451245)^{\frac{n-7}{6}}413524$	$6(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-7}{6}}7,10,9,10,11,12$
$n=2 \pmod 6$	$(1251453)^2(123453)^{\frac{n-14}{6}}$	$(2413524)^2 2(451245)^{\frac{n-20}{6}}$ 45124	$(6,7,8,9,10,11,12)^2(6,7,10,8,11,9)^{\frac{n-20}{6}}$ 6,7,10,8,11,12
$n=3 \pmod 6$	$(1251453)^3(123453)^{\frac{n-21}{6}}$	$(2413524)^3 2(451245)^{\frac{n-27}{6}}$ 45124	$(6,7,8,9,10,11,12)^3(6,7,10,8,11,9)^{\frac{n-27}{6}}$ 6,7,10,8,11,12
$n=4 \pmod 6$	$(123453)^{\frac{n-10}{6}}1251456563$	$2(451245)^{\frac{n-16}{6}}451242413$ 524125	$6(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-16}{6}}7,10,8,11,$ 12,6,7,8,9,10,11,15,12,13,14
$n=5 \pmod 6$	$(123453)^{\frac{n-17}{6}}12514531251456563$	$2(451245)^{\frac{n-23}{6}}451242413$ 5242413524125	$6(7,10,8,11,12,9)^{\frac{n-23}{6}}7,10,8,11,12,6,7,$ 8,9,10,11,12,6,7,8,9,10,11,15,12,13,14

（ⅱ）当 $n=11$ 时，$\mathrm{diam}(C_{11})=5$。要使 C_{11} 满足 $D(5)$-VSDTC，同时也是点和可区别的，需要 11 种不同的和值数。6 色集的 3 元子集只存在 10 种不同的和值数，不足以区别 11 个点，故 $\chi''_{5-\Sigma}(C_{11})\geqslant 7$。下面给出 C_{11} 的一个 7-$D(5)$-VSDTC 染法 φ：

边 $\{v_1v_2,\cdots,v_{10}v_{11},v_{11}v_1\}\to\{1,2,5,1,4,5,6,5,6,7,3\}$，点 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{11}\}\to\{2,4,1,3,5,2,4,1,2,3,4\}$，各点的和值依次为 6、7、8、9、10、11、15、12、13、16、14，该染色方案是点和可区别的。

（ⅲ）当 $n\neq 4,5 \pmod 6$ 且 $n\neq 15$ 时，根据引理 2 得 $\chi''_{5-\Sigma}(C_n)\geqslant\chi''_{4-\Sigma}(C_n)\geqslant 5$。给出圈图 $C_n(n\geqslant 10$ 且 $n\neq 11,15,17)$ 的一个 $D(5)$-VSDTC 的染法 φ，见表 5。

特别地，当 $n=17$ 时，由于 $n=5 \pmod 6$ 中的染法是点可区别但和不可区别，故重新构造 C_{17} 的一个 6-$D(5)$-VSDTC 为 $\{v_1v_2,\cdots,v_{16}v_{17},v_{17}v_1\}\to\{1,2,5,1,4,5,3,1,2,5,1,4,5,6,5,6,3\}$，$\{v_1,v_2,\cdots,v_{17}\}\to\{2,4,1,3,5,2,4,2,4,1,3,5,2,4,1,2,5\}$，各点的和序列为 $\{S(v_1),S(v_2),\cdots,S(v_{17})\}\to\{6,7,8,9,10,11,12,6,7,8,9,10,11,15,12,13,14\}$。

综上所述，圈图 C_n 各点在 5-距离内是满足点和可区别的。

3　结论

目前，对一般图的距离 $\beta\geqslant 3$ 的点和可区别全染色问题的研究成果研究较少。本文通过构造染色法和组合分析法，研究了路图 $P_n(n\geqslant 5)$ 的 $D(4)$，$D(5)$-点和可区别的全色数与圈图 $C_n(n\geqslant 8)$ 的 $D(3)$，$D(4)$-点可区别的全色数，及 $n\geqslant 10$ 时 C_n 的 $D(5)$-点可区别全色数，得到了以下结论：对于 $n(n\geqslant 5)$ 阶的路图 P_n，当 $5\leqslant n\leqslant 6$ 时 $\chi''_{4-\Sigma}(P_n)=\chi''_{5-\Sigma}(P_n)=4$；当 $n\geqslant 7$ 时 $\chi''_{4-\Sigma}(P_n)=\chi''_{5-\Sigma}(P_n)=5$。对于 $n(n\geqslant 8)$ 阶的圈图 C_n，当 $n\neq 9$ 时 $\chi''_{3-\Sigma}(C_n)=\chi''_{4-\Sigma}(C_n)=5$；当 $n=9$ 时 $\chi''_{3-\Sigma}(C_n)=5$、$\chi''_{4-\Sigma}(C_n)=6$。对于 $n(n\geqslant 10)$ 阶的圈图 C_n，当 $n=4,5 \pmod 6$ 且 $n\neq 11$ 或 $n=15$ 时 $\chi''_{5-\Sigma}(C_n)=6$；当 $n=11$ 时 $\chi''_{5-\Sigma}(C_n)=7$，其余情况下 $\chi''_{5-\Sigma}(C_n)=5$。随着距离 β 的增大，路图和圈图的 $D(\beta)$-点和可区别全色数是递增的，但并非严格单调递增。

参考文献：

[1]　张忠辅，李敬文，陈祥恩，等. 图的距离不大于 β 的点可区别的全染色[J]. 中国科学（A 辑：数学），2006，36(10)：1119-1130.

[2] PILŚNIAK M, WOŹNIAK M. On the total-neighbor-distinguishing index by sums[J]. Graphs and combinatorics, 2015, 31(3): 771-782.

[3] 袁清厚. 随机图的 $D(\beta)$-点和可区别全染色算法的研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2021.

[4] 何静, 强会英. 圈图与简单图的冠图的 $D(2)$-点和可区别边染色的界[J]. 吉林大学学报(理学版), 2025, 63(2): 375-381.

[5] 刘欢, 强会英, 王洪申. 单圈图的 $D(2)$-点和可区别边染色[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2024, 57(1): 91-97.

[6] 姚丽. 几类图的 2-距离和可区别染色[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2021.

[7] ZHOU L M, LI J W, WANG B M. A new algorithm for $D(\beta)$-vertices sum distinguishing edge coloring of graphs[C]//2021 IEEE 4th Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference(IMCEC). Chongqing, China: IEEE, 2021: 159-164.

[8] 张东翰, 朱白. 路的 $D(3)$-点可区别的全染色[J]. 商洛学院学报, 2014, 28(2): 11-12.

[9] YAO J J, YU X W, WANG G H, et al. Neighbor sum distinguishing total coloring of 2-degenerate graphs[J]. Journal of combinatorial optimization, 2017, 34(1): 64-70.

[10] YU X W, WANG G H, WU J L, et al. Neighbor sum distinguishing edge coloring of subcubic graphs[J]. Acta mathematica sinica, 2017, 33(2): 252-262.

[11] LIU X S, XHU Z Q. Upper bound on the $D(\beta)$-vertex-distinguishing total-chromatic number of graphs[J]. ARS combinatoria, 2015, 119: 403-411.

[12] FLANDRIN E, MARCZYK A, PRZYBYLO J, et al. Neighbor sum distinguishing index[J]. Graphs and combinatorics, 2013, 29(5): 1329-1336.

[13] 杨笑蕊, 强会英, 李雨虹. 两类冠图的邻和可区别全染色[J]. 兰州交通大学学报, 2019, 38(5): 114-117.

$D(\beta)$-vertex sum distinguishing total coloring of the path graphs and cycle graphs

MA Qianqian, QIANG Huiying

(*School of Mathematics and Physics*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: This paper studies vertex sum distinguishing total coloring problems of any two points with a distance of no more than 4 and 5 in the path graphs and the problem of vertex and distinguishing total coloring with a distance of no more than $\beta(3\leqslant\beta\leqslant 5)$ from any two points in the cycle graphs by using constructing coloring function and combination analytic method, and has obtained the $D(\beta)$-vertex sum distinguishing total chromatic numbers of these two types of graphs.

Keywords: $D(\beta)$-vertex sum distinguishing total coloring; $D(\beta)$-vertex sum distinguishing total chromatic number; path graph; cycle graph; neighbor sum distinguishing total coloring

(责任编辑: 贾晶晶)

引用格式 马倩倩, 强会英. 路图和圈图的 $D(\beta)$-点和可区别全染色[J]. 山东航空学院学报, 2025, 42(6): 101-106.

MA Q Q, QIANG H Y. $D(\beta)$-vertex sum distinguishing total coloring of the path graphs and cycle graphs[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2025, 42(6): 101-106.