【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

具有非局部项的 p-Laplace 方程的最优控制

刘彩芳，孟海霞

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：研究了一类具有非局部项的 p-Laplace 方程的最优控制问题。先利用能量估计的方法获得了该问题解的存在性，再利用反证法证明了解的唯一性，最后由嵌入定理及成本泛函的弱下半连续性得到了最优控制的存在性。

关键词：p-Laplace 方程；非局部项；解的存在性；解的唯一性；最优控制

中图分类号：O 175.26　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.06.011

0　引言

p-Laplace 方程是一类非线性偏微分方程，在生物、物理、化学、航空等多个领域得到广泛应用。该方程解的性质由于参数 p 的不同取值而变得复杂。例如，当 $p=2$ 时，p-Laplace 方程简化为 Laplace 方程，而当 $p=1$ 时，p-Laplace 方程是具有线性耗散性的对流扩散方程。文献[1-3]研究了发展型 p-Laplace 方程的最优控制问题，得到了弱解的存在性和最优控制函数的存在性。文献[4-5]研究了分数阶 p-Laplace 方程弱解的存在性，给出了弱解存在性的证明方法，但最优控制函数解的存在性问题还有待研究。文献[6]研究了发展型 p-Laplace 方程的边界最优控制问题，利用能量估计方法研究了该问题解的存在唯一性，并通过紧性估计和紧嵌入定理分析了成本泛函极小化序列的收敛性，最终证明了最优控制的存在性。

近年来，非局部问题受到研究者们的重视，在种群动力学[7]、生物学[8]和物理学[9]、飞行控制[10]、轨道动力学[11]等领域得到广泛应用。以 Laplace 算子作为扩散项的经典反应扩散方程仅能反应空间上的局部行为，即相邻空间上位置的移动，例如物质从浓度高的部分向浓度低的部分进行扩散。而在自然界中，受多种因素影响，空间中的非局部行为是普遍存在的，例如生物种群的位置移动涉及较大范围，因此需用非局部扩散进行描述。文献[12]研究了一类非局部非线性抛物方程的最优控制问题，利用 Schauder 不动点定理得到了解的存在唯一性，通过可测选择定理[13]证明了最优控制的存在性，并通过凸函数性质及相应引理得到了一阶必要条件与二阶充要条件，将 Laplace 算子推广为更为一般的 p-Laplace 算子，更具研究价值和实际意义。

因此，受文献[6，12]的启发，本文考虑具有非局部项的 p-Laplace 方程

收稿日期：2024-07-04

基金项目：国家自然科学基金项目（11961039）；甘肃省自然科学基金项目（1310RJZA070）

第一作者简介：刘彩芳（1999—　），女，山西晋中人，硕士研究生，主要从事偏微分方程研究。
E-mail：18834286168@163.com

通信作者简介：孟海霞（1979—　），女，甘肃临夏人，副教授，博士，主要从事微分方程与动力学系统研究。
E-mail：Menghx04@163.com

$$\begin{cases} y_t - \mathrm{div}(|\nabla y|^{p-2}\nabla y) + l(y(t))y = f, (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ |\nabla y|^{p-2}\nabla y \cdot \vec{n} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = y^0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

解的性质与最优控制问题。其中,$\Omega \in \mathbf{R}^n (n \geqslant 1)$是具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域,$p \geqslant 2$,$f \in L^2(Q_T)$,$Q_T = \Omega \times (0,T)$,$l(\cdot)$是非负非减函数且$l(\cdot) \leqslant M$,$f$是控制函数,$l(y(t)) = \int_\Omega y^q(x,t)\mathrm{d}x$,$q$为正数,$\vec{n}$是$\partial\Omega$上的单位外法向量,$y_0 \in L^2(\Omega)$。设

$$U_M := \left\{ f \mid 0 \leqslant f \leqslant M, f \in L^\infty(\partial\Omega \times (0,T)) \right\}$$

是允许控制集,定义成本泛函为

$$J(f) := \frac{1}{2}\int_Q |y - y_d|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\mu}{2}\int_{\omega_T} |f|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

其中,ω是Ω的一个非空子集,$W_T = \omega \times (0,T)$,$Q := \Omega \times (0,T)$,$y_d \in L^\infty(Q)$,$\mu > 0$。本文主要结果是证明最优控制的存在性,即证存在$f^* \in U_M$,使得$J(f^*) = \inf\limits_{f \in U_M} J(f)$。现给出主要的定义及引理:

定义 1 令$V = W^{1,p}(\Omega)$,V'表示V的对偶空间,$\langle u, v \rangle (u \in V', v \in V)$表示$V' - V$的对偶积。

定义 2 对$\forall \phi \in H(Q) := \{\phi \in W(0,T) : \phi(\cdot, T) = 0\}$,$W(0,T) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$若

$$-\int_0^T \langle \phi_t, y \rangle \mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} |\nabla y|^{p-2} \nabla y \ \nabla \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} l(y(t))\phi y \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega y^0 \phi(\cdot, 0)\mathrm{d}x$$

成立,则称函数$y \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$为问题(1)的弱解。其中,$f \in L^2(Q)$,$y^0 \in L^2(\Omega)$,$\tau \in (0,T)$。

引理 1[1] 对任意$u, v \in L^p(0,T; W^{1,p}(\Omega))$有

$$\iint_{Q_\tau} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot \nabla(u - v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0。$$

1 解的存在唯一性

定理 1(解的存在唯一性) 若$f \in L^2(Q)$,$y^0 \in L^2(\Omega)$,$l(\cdot)$是非负非减函数且

$$l(\cdot) \leqslant M, l(y(t)) = \int_\Omega y^q(x,t)\mathrm{d}x, q \geqslant 1,$$

则问题(1)存在唯一弱解$y \in W(0,T)$,满足

$$\| y \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \| \nabla y \|_{L^p(Q_T;\mathbf{R}^n)} \leqslant C_1 \| y^0 \|_{L^2(\Omega)}, \| y_t \|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C_2, y_t \in L^2(0,T;V')。$$

其中,C_1是与y^0和M无关的常数,C_2是仅依赖于y^0和M的常数。

证明 首先考虑问题

$$y_{nt} - \mathrm{div}\left((|\nabla y_n|^2 + \frac{1}{n})^{(p-2)/2} \nabla y_n \right) + l(y_n(t))y = f_n, (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n \cdot \vec{v} = 0, (x,t) \in \partial\Omega(0,T), \tag{3}$$

$$y_n(x,0) = y_n^0, x \in \Omega \tag{4}$$

弱解的存在性。取$y_n^0 \in C_0^\infty(\Omega)$是初值$y^0$的近似函数,在$L^2(\Omega)$中$y_n^0$强收敛于$y^0$,$f_n \in C^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$,在$L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))$中$f_n$弱*收敛于$f$,而且

$$\| f_n \|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))} \leqslant \| f \|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))}, \| y_n^0 \|_{L^2(\Omega)} \leqslant 2 \| y^0 \|_{L^2(\Omega)}。$$

由 Schauder 不动点定理知,问题(2)~(4)存在唯一弱解$y_n \in C^\infty(\bar{Q}_T)$。其次,在式(2)两边同乘$y_n$,并在$Q_\tau$上积分得

$$\iint_{Q_\tau} \left(y_{nt} y_n + \left(|\nabla y_n|^2 + \frac{1}{n} \right)^{(p-2)/2} |\nabla y_n|^2 + y_n^{q+1}(x,t) \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_\tau} f_n y_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

由分部积分公式得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^2(x,\tau)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^{0^2}(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}\left((|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n})^{(p-2)/2}|\nabla y_n|^2+y_n^{q+1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau}f_n y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

则有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^{\ 2}(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^{0^2}(x)\mathrm{d}x+C\iint_{Q_\tau}y_n^{\ 2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{5}$$

由 Gronwall 不等式,有

$$\int_\Omega y_n^{\ 2}(x,\tau)\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega y^{0^2}(x)\mathrm{d}x,\tag{6}$$

结合式(5)和(6),可得

$$\int_\Omega y_n^{\ 2}(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C_1\int_\Omega y^{0^2}(x)\mathrm{d}x,$$

其中,C_1 是与 y_0 和 M 无关的常数。对于 $\forall\varphi\in L^2(0,T;V)$ 有

$$\left|\int_0^\tau\int_\Omega(y_n)_t\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|=\left|\iint_{Q_\tau}\mathrm{div}\left((|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n})^{(p-2)/2}|\nabla y_n|\right)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}y_n^{\ q+1}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|=$$

$$\left|-\iint_{Q_\tau}\left(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\right)^{(p-2)/2}\nabla y_n\ \nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|-\iint_{Q_\tau}y_n^{\ q+1}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-1}|\nabla\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C(\frac{1}{n})^{(p-2)/p}\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n||\nabla\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\iint_{Q_\tau}|y_n||\varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\|\nabla y_n\|_{L^p(Q_\tau)}^{p-1}\|\nabla\varphi\|_{L^p(Q_\tau)}+C(\frac{1}{n})^{p/2}\|\nabla y_n\|_{L^p(Q_\tau)}\|\triangle\varphi\|_{L^p(Q_\tau)}+$$

$$C\|y_n\|_{L^2(Q_\tau)}\|\varphi\|_{L^p(Q_\tau)}+C\iint_{Q_\tau}f_n^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C\iint_{Q_\tau}\varphi^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant C_2\|\varphi\|_{L^2(0,T;W^{1,P}(\Omega))},$$

其中,C_2 为仅依赖于 y_0 和 M 的常数,因此 $\|(y_n)_t\|_{L^2(0,T;V')}\leqslant C_2$。

在 $C([0,T];L^2(\Omega))$ 中,存在弱收敛的子列 $\{y_n\}$ 以及函数 $y\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$,使得 $y_n\to y$ 强收敛于 $L^p(Q_T)$,则对 $\forall t\in(0,T)$ 有 $y_n\to y$ 弱收敛于 $L^2(\Omega)$,故有 $y_n\to y$ 强收敛于 $L^2(\partial\Omega\times(0,T))$。由于 $\nabla y_n\to\nabla y$ 弱收敛于 $L^p(Q_T)$,则有 $(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n})^{(p-2)/2}|\nabla y_n|\to|\nabla y|^{p-2}\nabla y$ 弱收敛于 $L^{p/(p-1)}(Q_T)$,因此 $(y_n)_t\to y_t$ 弱收敛于 $L^2(0,T;V')$,其中 $y_t\in L^2(0,T;V')$。接着证明 y 为问题(1)的弱解。由于 y_n 是系统(2)～(4)的弱解,对于 $\forall\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$,

$$\int_\Omega y_n(x,\tau)\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}\left(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\right)^{(p-2)/2}\nabla y_n\ \nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}y_n^{\ q+1}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y_n^0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x-\iint_{Q_\tau}y_n(x,t)\varphi_t(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0。$$

在上式中令 $n\to\infty$,利用 y_n 的收敛性,得

$$\int_\Omega y(x,\tau)\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y|^{p-2}\nabla y\ \nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}y^{q+1}\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y^0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x-\iint_{Q_\tau}y(x,t)\varphi_t(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0。$$

由此可知,y 是问题(1)的弱解,证毕。最后,证明唯一性。若 y_1 和 y_2 为问题(1)的两个弱解,可得

$$\iint_{Q_\tau}(y_1^q-y_2^q)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}(|\nabla y_1|^{p-2}\nabla y_1-|\nabla y_2|^{p-2}\nabla y_2)\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}(y_1-y_2)\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\int_\Omega(y_2(x,\tau)-y_1(x,\tau))\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x。$$

令 $\varphi=y_1-y_2$,得

$$\iint_{Q_\tau}(y_1-y_2)^2(y_1^{q-1}+y_1^{q-2}y_2+\cdots+y_1y_2^{q-2}+y_2^{q-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$

$$\iint_{Q_\tau}(|\nabla y_1|^{p-2}\nabla y_1-|\nabla y_2|^{p-2}\nabla y_2)\nabla(y_1-y_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\iint_{Q_\tau}(y_1-y_2)(y_1-y_2)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_\Omega(y_x(x,\tau)-y_2(x,\tau))^2\mathrm{d}x,$$

由引理 1 得

$$\iint_{Q_\tau}(|\nabla y_1|^{p-2}\nabla y_1-|\nabla y_2|^{p-2}\nabla y_2)\cdot\nabla(y_1-y_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0。$$

则

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(y_1-y_2)^2\mathrm{d}x\leqslant-\iint_{Q_\tau}(y_1-y_2)^2(y_1^{q-1}+y_1^{q-2}y_2+\cdots+y_1y_2^{q-2}+y_2^{q-1})\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

即 $\int_\Omega(y_1-y_2)^2\mathrm{d}x\leqslant C\iint_{Q_\tau}(y_1-y_2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，其中，$C=-2(y_1^{q-1}+y_1^{q-2}y_2+\cdots+y_1y_2^{q-2}+y_2^{q-1})$。由 Gronwall 不等式可得 $\int_\Omega y_n{}^2(x,\tau)\mathrm{d}x\leqslant 0$，即 $y_1(x,t)=y_2(x,t)$，a. e. $(x,t)\in Q_T$。证毕。

2 最优控制的存在性

定理 2 若 $y_d\in L^2(Q_T)$，$y_0\in L^2(\Omega)$，$f\in L^2(Q)$，$l(\cdot)$是非负非减函数且 $l(\cdot)\leqslant M$，$l(y(t))=\int_\Omega y^q(x,t)\mathrm{d}x$，$q\geqslant 1$，且满足兼容性条件 $|\nabla y_0|^{p-2}\nabla y_0\cdot\vec{v}=0$，$x\in\partial\Omega$，则存在最优控制 $f^*\in U_M$，使得成本泛函 $J(f)$最小。

证明 由于 $J(f)\geqslant 0$，所以 $J(f)$必有下确界。设$\{f_n\}$为 U_M 中的极小化序列，即

$$\lim_{n\to\infty}J(f_n)=\inf_{f\in U_M}J(f)。$$

由于 $f_n\in U_M$，故在 $L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))$中存在$\{f_n\}$的子列 f_n 弱*收敛于 f。根据定理 1，当 f 为 f_n 时问题(1)存在唯一弱解 y_n，并且满足

$$\|y_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\nabla y_n\|_{L^p(Q_T;\mathbf{R}^n)}+\|(y_n)_t\|_{L^2(0,T;V')}\leqslant C,$$

其中，C 为常数。类似定理 1 的证明，若存在 $y^*\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;W^{1,P}(\Omega))$和 $y_t{}^*\in L^2(0,T;V')$，使得 $y_n\to y^*$ 强收敛于 $L^p(Q_T)$，则对$\forall t\in(0,T)$有 $y_n\to y^*$ 弱收敛于 $L^2(\Omega)$，故有 $y_n\to y^*$ 强收敛于 $L^p(Q_T)$，因此$|\nabla y_n|^{p-2}|\nabla y_n|\to|\nabla y^*|^{p-2}\nabla y^*$ 弱收敛于 $L^{p/(p-1)}(Q_T)$。下证 y^* 是问题(1)的弱解。对于$\forall\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$，有

$$\int_\Omega y_n(x,\tau)\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}y_n^q(x,t)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y^0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x-\iint_{Q_\tau}y_n(x,t)\varphi_t(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau}f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{7}$$

在上式中令 $n\to\infty$，利用 y_n 的收敛性得

$$\int_\Omega y^*(x,\tau)\varphi(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y^*|^{p-2}\nabla y^*\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}(y^*)^q(x,t)\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y^0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x-\iint_{Q_\tau}y(x,t)\varphi_t(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau}f^*\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{8}$$

由此可知，y^* 是 f 为 f^* 时问题(1)的弱解。在式(7)中取 y_n 为测试函数，则有

$$\int_\Omega y_n^2(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\cdot\nabla y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}(y_n^q(x,t))y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y^0(x)y_n(x_0)\mathrm{d}x-\iint_{Q_\tau}y_n(y_n)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau}f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中，$y_n^0(x)=y(x,0)=y^0(x)$。整理得

$$\int_\Omega y_n{}^2(x,\tau)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\cdot\nabla y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}y_n{}^{q+1}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$

$$\int_\Omega y^0(x)y_n(x_0)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_\Omega (y_n)_t^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

于是有

$$\int_\Omega y_n^2(x,\tau)\mathrm{d}x-\int_\Omega y^0(x)y_n(x_0)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^2(x,\tau)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega y^{0^2}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\iint_{Q_\tau} y_n{}^{q+1}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\cdot\nabla y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

整理得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega y_n^2(x,\tau)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega y^{0^2}(x)\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau} y_n{}^{q+1}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\cdot\nabla y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

所以有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (y_n^2(x,\tau)-y^{0^2}(x))\mathrm{d}x+\iint_{Q_\tau} y_n^{q+1}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f_n\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

由于式(8)中的后三项是非负的，所以有

$$\int_\Omega y_n^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega y^{0^2}\mathrm{d}x,\iint_{Q_\tau}|\nabla y_n|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega y^{0^2}\mathrm{d}x,\tau\in(0,T),$$

故有

$$\iint_{Q_\tau} y^*\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau} w\,\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau} y^{p+1}(x)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f^*\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

其中，$w=|\nabla y^*|^{p-2}\nabla y^*$。对于 $\forall\,\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$，下证

$$\iint_{Q_\tau}|\nabla y^*|^{p-2}\nabla y^*\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} w\,\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

由引理 1 可得，对 $\forall\,v\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$，$\psi\in C_0^\infty(Q_T)$，$0\leqslant\psi\leqslant 1$，$\sup\,p\psi\subset\Omega$，有

$$\iint_{Q_T}\psi(|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(y_n-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0。$$

在问题(1)的第一个式子两边乘 ψy_n，$\psi\in C_0^\infty(Q_T)$ 得

$$\iint_{Q_\tau}(y_n)_t y_n\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\mathrm{div}\Big((|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n})^{(p-2)/2}\nabla y_n\Big)\cdot y_n\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau} y_n{}^{q+1}(x)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_\tau} f_n y_n\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

整理得

$$\iint_{Q_\tau}\psi\Big(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\Big)^{(p-2)/2}|\nabla y_n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau}\Big(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\Big)^{(p-2)/2}\nabla y_n\nabla\psi y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t+$$
$$\iint_{Q_\tau} y_n^{q+1}(x)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega y_n^2\psi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau} f_n y_n\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

于是有

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega y_n^2\psi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\Big(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\Big)^{(p-2)/2}\nabla y_n\nabla\psi y_n\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau} y_n^{q+1}(x)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau} f_n y_n\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\iint_{Q_\tau}\psi|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\psi|\nabla v|^{p-2}\nabla v\,\nabla(y_n-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$
$$\iint_{Q_\tau}\psi\Big(|\nabla y_n|^2+\frac{1}{n}\Big)^{(p-2)/2}|\nabla y_n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\psi|\nabla y_n|^{p-2}\nabla y_n\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\psi|\nabla v|^{p-2}\nabla v\,\nabla(y_n-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

在上式中令 $n\rightarrow\infty$ 可得

$$\frac{1}{2}\iint_{Q_\tau} y^{*^2}\psi t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau} y^*w\,\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau} y^{*q+1}(x)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_\tau}\psi w\,\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}t-$$
$$\iint_{Q_\tau}\psi|\nabla v|^{p-2}\nabla v\,\nabla(y^*-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_\tau} f y^*\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant 0。\tag{9}$$

在式(8)中取 $\varphi=\psi y^*$ 有

$$\iint_{Q_\tau} y^* w \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} w \cdot \nabla y^* \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} y^{*q+1} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t -$$
$$\iint_{Q_\tau} y^* \psi_t y^* \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{Q_\tau} y^* \psi (y^*)_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_\tau} f y^* \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中，$\psi \in C_0^\infty(Q_T)$。所以有

$$\iint_{Q_\tau} w \cdot \nabla\psi y^* \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} w \cdot \nabla y^* \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_\tau} y^{*q+1} \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\iint_{Q_\tau} (y^*)^2 \psi_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \iint_{Q_\tau} f y^* \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

结合式(9)得

$$\iint_{Q_\tau} w \cdot \nabla y^* \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{Q_\tau} w \cdot \nabla v \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \iint_{Q_\tau} \psi |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla(y^* - v) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

整理得

$$\iint_{Q_\tau} \psi (w - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla(y^* - v) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0。$$

在上式中取 $v = y^* - \mu\varphi$，有

$$\mu \iint_{Q_\tau} \psi (w - |\nabla(y^* - \mu\varphi)|^{p-2} \nabla(y^* - \mu\varphi)) \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0, \varphi \in C_0^\infty(Q_T)。$$

令 $\mu \to 0^+$ 得

$$\iint_{Q_\tau} \psi (w - |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*) \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

令 $\mu \to 0^-$ 得

$$\iint_{Q_\tau} \psi (w - |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*) \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

所以有

$$\iint_{Q_\tau} \psi (w - |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*) \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

在上式中取 ψ 使得 $\sup p\varphi \subset \sup p\psi$ 成立，则有

$$\iint_{Q_\tau} (w - |\nabla y^*|^{p-2} \nabla y^*) \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

因此，可得 $w = |\nabla y|^{p-2} \nabla y$。又由 $J(f)$ 的弱下半连续性，有

$$J(f^*) = \frac{1}{2}\int_Q |y - y_d|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\mu}{2}\int_{\omega_T} |f^*|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf\left(\frac{1}{2}\int_Q (y_n - y_d)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{\mu}{2}\int_{\omega_T} |f_n|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to\infty} J(f_n) = \inf_{f\in U_M} J(f)。$$

因此，f^* 是 $J(f)$ 在 U_M 上的最优控制。证毕。

3 结论

本文在文献[6,12]的基础上讨论了 Neumann 边界条件下的抛物型 p-Laplace 方程最优控制问题。先利用能量估计方法结合方程解唯一性引理，证明了解的存在唯一性，并通过对成本泛函的极小化序列取收敛子列，再结合成本泛函的弱下半连续性，得到最优控制的存在性。

参考文献：

[1] BARTHEL W，JOHN C，TRÖLTZSCH F. Optimal boundary control of a system of reaction diffusion equations[J]. Zeitschrift fur angewandte mathematik und mechanik，2010，90(12)：966-982.

[2] WANG C P，YIN J X，WEN M F. Periodic optimal control for a degenerate nonlinear diffusion equation[J]. Computational mathematics and modeling，2006，17(4)：364-375.

[3] CASAS E，KOGUT P I，LEUGERING G. Approximation of optimal control problems in the coefficient for the p-Laplace equation. I. Convergence result[J]. Siam journal on control and optimization，2016，54(3)：1406-1422.

[4] 李小平，李辉来. 带 p-Laplace 算子分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(3)：481-489.

[5] GIACOMCNI J，GOUASMIA A，MOKRANE A. Existence and global behavior of weak solutions to a doubly nonlinear evolution fractional p-Laplacian equation[J]. Electronic journal of differential equations，2021. DOI：10.58997/ejde.2021.09.

[6] 张瀛月，杜润梅. 发展型 p-Laplace 方程边界最优控制的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版)，2023，61(1)：41-45.

[7] CHIPOT M. Elements of nonlinear analysis[M]. Berlin：Birkhäuser，2000.

[8] CALSINA A，PERELLO C. Equations for biological evolution[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh section A：mathematics，1995，125(5)：939-958.

[9] CHAFEE N. The electric ballast resistor：homogeneous and nonhomogeneous equilibria[J]. Nonlinear differential equations，1981：97-127.

[10] ABD EL-SALAM F A. Some new locally optimal control laws for sailcraft dynamics in heliocentric orbits[J]. Journal of applied mathematics，2013(7)：353056.

[11] SCHMIDT H. Polynomial dynamics and local analysis of small and grand orbits[J]. Compositio mathematica，2023，159(1)：53-86.

[12] KENNE C，DJOMEGNE L，MOPHOU G. Optimal control of a parabolic equation with a nonlocal nonlinearity[J]. Journal of differential equations，2024，378：234-263.

[13] AUBIN J P，FRANKOWSKA H. Set-valued analysis[M]. Boston：Birkhäuser Boston，2009.

Optimal control of p-Laplace equations with nonlocal terms

LIU Caifang, MENG Haixia

(*School of Mathematics and Physics*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The optimal control problem for a class of p-Laplace equations with nonlocal terms is studied. Firstly, the existence of a solution to the problem is obtained by using energy estimation. Secondly, the uniqueness of the solution is proved by using the inverse method. Finally, the existence of an optimal control is obtained by the embedding theorem and the weak lower semicontinuity of the cost generalization.

Keywords: p-Laplace equations; nonlocal terms; existence of solutions; uniqueness of solutions; optimal control

(责任编辑：贾晶晶)

引用格式　刘彩芳，孟海霞. 具有非局部项的 p-Laplace 方程的最优控制[J]. 山东航空学院学报，2025，42(6)：83-89.

LIU C F, MENG H X. Optimal control of p-Laplace equations with nonlocal terms[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2025，42(6)：83-89.