【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

时标上具 D 算子和分布时滞的 Clifford 值细胞神经网络的伪概周期解的存在性

王翔宇

（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650504）

摘　要：从时标上 Clifford 值概周期函数的定义出发，给出了时标 $\mathbf{T}$ 到 n 维 Clifford 代数空间 $\mathscr{A}^n$ 的右稠密伪概周期函数的定义，并讨论了其相关性质，获得时标上 Clifford 值伪概周期函数空间的完备性。通过 Banach 不动点定理和时标上的微积分理论，建立了时标上具 D 算子和分布时滞的细胞神经网络的伪概周期解的存在的充分条件。

关键词：时标；Clifford 值；D 算子；分布时滞；细胞神经网络

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.06.012

Clifford 代数是综合了内积和外积的复数代数[1]，广泛应用于几何和理论物理方面。Pearson 等提出了 Clifford 值神经网络的概念[2]，Clifford 值神经网络的状态变量、连接权重、外部输入均为 Clifford 数。对比实值、复值以及四元数值神经网络，Clifford 值神经网络作为多维神经网络，在动态学性态的研究更具意义[3]。在自然界中，相比周期现象，概周期现象的存在更为普遍，许多学者针对概周期函数进行了研究和推广。文献[4]引入了伪概周期的概念，文献[5]借助权函数提出了加权伪概周期函数概念。同时，对于细胞神经网络（CNN）的研究近年来发展迅速。Yao 考虑了一类带有 D 算子的中立型分流抑制细胞神经网络，利用 Lyapunov 泛函方法和微分不等式技术，建立了保证所考虑模型全局指数收敛的几个充分条件[6]。申时萍考虑了时标上的具有连接项时滞的中立型的 Clifford 值细胞神经网络，利用 Banach 的不动点定理和时标微积分理论建立了该系统的加权伪概周期解的存在性和全局指数稳定性[7]。Shen 等考虑了具有时变时滞的 Clifford 代数模糊细胞神经网络，首先将所考虑的 n 维 Clifford 代数系统分解为 $2mn$ 维实值系统，然后利用 Banach 不动点定理和反证法建立了确保所考虑的神经网络的 S_p 概周期解的存在性、唯一性和全局指数稳定性的充分条件[8]。现有 CNN 模型主要依赖于传统的线性代数和微积分理论，在处理非线性、多维和非欧几里得空间中的问题时往往面临挑战。Clifford 代数和 D 算子能够有效地处理这些复杂问题，并提供更强大的描述能力和计算工具。Clifford 代数和 D 算子在处理多维空间和非线性问题方面具有独特优势，将它们引入 CNN 结构，有望突破现有 CNN 模型在处理复杂问题时的局限性，为解决更加复杂的任务提供新的解决方案。基于此，本文以时标上的神经网络模型作为研究对象，考虑时标上具 D 算子和分布时滞的 Clifford 值细胞神经网络的伪概周期解的存在性。

1　预备知识

定义 1[9]　时标 $\mathbf{T}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空闭子集，分别定义前跃算子 $\sigma:\mathbf{T}\to\mathbf{T}$、后跃算子 $\rho:\mathbf{T}\to\mathbf{T}$ 以及粗细

收稿日期：2024-11-21

基金项目：云南大学教育教学改革项目（2023Y22）；云南大学研究生科研创新基金项目（KC-24248705）

作者简介：王翔宇（2000—　），女，山东东营人，硕士研究生，主要从事非线性微分方程与动力系统研究。
E-mail：2814377587@qq.com

度函数 $\mu:\mathbf{T}\to[0,+\infty)$，

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbf{T},s>t\},\rho(t)=\sup\{s\in\mathbf{T},s<t\},\mu(t)=\sigma(t)-t,t\in\mathbf{T}。$$

如果点 $t\in\mathbf{T}$ 满足 $t>\inf\mathbf{T}$ 且 $\rho(t)=t$，则称它是左稠的；若 $\rho(t)<t$，则称它是左离散的。如果点 $t\in\mathbf{T}$ 满足 $t<\sup\mathbf{T}$ 且 $\sigma(t)=t$，则称它是右稠的；若 $\sigma(t)>t$，则称它是右离散的。

定义 2[10]　如果 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{T}$ 中的右稠点处连续，在左稠点的左极限存在，那么称 f 是右稠连续的。时标上全体右稠连续函数构成的集合记为 $C_{rd}(\mathbf{T})$。

引理 1[10]　$C_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$ 赋予了上确界范数 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\|x(t)\|_{\mathscr{A}^n}$ 后，构成一个 Banach 空间。

如果 $\mathbf{T}$ 有左离散的最大值 p，那么有 $\mathbf{T}^k=\mathbf{T}\backslash\{p\}$，否则有 $\mathbf{T}^k=\mathbf{T}$；如果 $\mathbf{T}$ 有右离散的最大值 p，那么有 $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}\backslash\{p\}$，否则有 $\mathbf{T}_k=\mathbf{T}$。下面介绍 Delta 函数和回归函数的定义。

定义 3[3]　当 $t\in\mathbf{T}^k$ 时，对于 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$，如果对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 t 的领域 U，使得

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)|\leqslant\varepsilon|\sigma(t)-s|,s\in U,$$

那么称 $f^\Delta(t)$ 是 $f(t)$ 的 Delta 导数。

定义 4[9]　如果函数 $r:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$，对于 $\forall\,t\in\mathbf{T}^k$，使得 $1+\mu(t)r(t)\neq0$ 成立，那么称 r 是回归的。时标上全体右稠密连续且回归的函数构成的集合记为 $\mathscr{R}(\mathbf{T},\mathbf{R})$，其正回归集合为

$$\mathscr{R}^+(\mathbf{T},\mathbf{R})=\{r\in\mathscr{R}(\mathbf{T},\mathbf{R}):1+\mu(t)r(t)>0,\forall\,t\in\mathbf{T}\}。$$

定义 5[9]　如果 r 是回归函数，e_r 使得 $e_r(t,s)=\exp\left\{\int_s^t\xi_{\mu(\tau)}(r(\tau))\Delta\tau\right\},\forall\,s,t\in\mathbf{T}$ 成立，其中

$$\xi_h(z)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+hz)}{z},h\neq0,\\ z,h=0\end{cases}$$

为柱变换，那么 e_r 是广义指数函数。

引理 2[10]　设 $\mathbf{T}$ 是概周期时标，如果存在 $-a_i\in\mathscr{R}^+$，$t,s\in\mathbf{T}$，$\tau_p\in\Pi$，那么有

$$e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))-e_{-a_i}(t,\sigma(s))=\int_{\sigma(s)}^t e_{-a_i}(t,\sigma(\theta))(a_i(\theta)-a_i(\theta+\tau_p))e_{-a_i}(\theta+\tau_p,\sigma(s)+\tau_p)\Delta\theta。$$

定义 6[11]　如果时标 $\mathbf{T}$ 满足关系式 $\Pi:\{\tau\in\mathbf{R}:t\pm\tau\in\mathbf{T},\forall\,t\in\mathbf{T}\}\neq\{0\}$，那么称时标 $\mathbf{T}$ 是概周期时标。

定义 7[12]　s 维欧氏空间中实 Clifford 代数定义为

$$\mathscr{A}=\Big\{\sum_{A\subseteq\{1,2,\cdots,s\}}a^Ae_A,a^A\in\mathbf{R}\Big\},$$

其中，$e_A=e_{t_1}e_{t_2}\cdots e_{t_\gamma}=e_{t_1t_2\cdots t_\gamma}$，$A=\{t_1,t_2,\cdots,t_\gamma\}$，$1\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_\gamma\leqslant s$。当 $A\neq\varnothing$ 时，$e_\varnothing=e_0$。称 $e_t=e_{\{t\}}$，$t=1,2,\cdots,s$ 和 $e_\varnothing=e_0=1$ 是 Clifford 代数的生成元或 Clifford 算子，且满足条件

$$\begin{cases}e_g^2=1,g=1,2,\cdots,p,\\ e_g^2=-1,g=p+1,p+2,\cdots,s,p<s,\\ e_ie_j+e_je_i=0,1\leqslant i,j\leqslant s,i\neq j。\end{cases}$$

令 $\Lambda=\{\varnothing,1,2,\cdots,s\}$，可得 $\mathscr{A}=\Big\{\sum\limits_A a^Ae_A,a^A\in\mathbf{R}\Big\}$，其中 $\sum\limits_A$ 是 $\sum\limits_{A\in\Lambda}$ 的缩写且 $\dim\mathscr{A}=2^s$，并记 n 维实 Clifford 值向量空间为 $\mathscr{A}^n$。

引理 3[10]　对于 $x=\sum\limits_A a^Ae_A\in\mathscr{A}$，定义 $\mathscr{A}$ 上的范数 $\|x\|_{\mathscr{A}}$ 为 $\|x\|_{\mathscr{A}}=\max\limits_A\{|x^A|\}$，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathscr{A}^n$，定义 $\mathscr{A}^n$ 上的范数 $\|x\|_{\mathscr{A}^n}$ 为 $\|x\|_{\mathscr{A}^n}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i^A|\}$，则 $(\mathscr{A},\|\cdot\|_{\mathscr{A}})$ 和 $(\mathscr{A}^n,\|\cdot\|_{\mathscr{A}^n})$ 均为 Banach 空间。

引理 4[10]　设 $f_i\in AP(\mathbf{T},X_i)$，其中每个 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是一个 Banach 空间，则对于每一个 $\varepsilon>0$，所有函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 具有一个公共的 ε-概周期。

定义 8[10] 若函数 $x:\mathbf{T}\to\mathscr{A}$，其中 $x^A:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$，则称 $x^{\Delta}(t)=\sum_A (x^A)^{\Delta}(t)e_A$ 为 Clifford 值 x 的 Delta 导数。

定义 9[10] 设 $\mathbf{T}$ 是概周期时标，且 $\mathbf{T}\cap\Pi\neq\varnothing$。若对于每一 $\varepsilon>0$，f 的 ε-移位数集

$$E(f,\varepsilon)=\left\{\tau\in\Pi:\|f(t+\tau)-f(t)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon,\forall t\in\mathbf{T}\right\}$$

都在时标 $\mathbf{T}$ 上稠密，则称 $f\in C_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$ 为 Clifford 值概周期函数。时标上全体 Clifford 值概周期函数构成的集合记为 $AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，这里的 $C_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$ 表示时标 $\mathbf{T}$ 到 n 维 Clifford 代数空间 $\mathscr{A}^n$ 的全体右稠密连续函数构成的集合。

2 时标上 Clifford 值伪概周期函数

定义函数空间

$$PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)=\left\{f\in BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n):\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{t_0-\gamma}^{t_0+\gamma}\|f(s)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s=0,t_0\in\mathbf{T},r\in\Pi\right\},$$

这里的 $BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$ 表示时标 $\mathbf{T}$ 到 n 维 Clifford 代数空间 $\mathscr{A}^n$ 的全体有界右稠密连续函数构成的集合，由引理 1 可知 $(BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),\|\cdot\|_{\infty})$ 是 Banach 空间。

定义 10 设 $\mathbf{T}$ 是概周期时标，且 $\mathbf{T}\cap\Pi\neq\varnothing$。若 $f\in BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$ 可以表示成 $f=g+h$ 的形式，其中 $g\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$h\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，那么 f 是 Clifford 值伪概周期函数。时标 $\mathbf{T}$ 到 n 维 Clifford 代数空间 $\mathscr{A}^n$ 的全体右稠密伪概周期函数构成的集合记为 $PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

引理 5 如果 $f,g\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A})$，$k\in\mathbf{R}$，那么 $f+g,fg,kf\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A})$。

引理 6 设 $\mathbf{T}$ 是概周期时标，且 $\mathbf{T}\cap\Pi\neq\varnothing$。若 $f\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，有界集 $U\subset\mathbf{T}$，则 $F(U)$ 是有界集。

证明 采用反证法。假设 $f(U)$ 不是有界集，则对于任意的正整数 p，存在 $t_p\in U$，使得 $\|f(t_p)\|_{\mathscr{A}^n}>p$，令 $\{t_p\}$ 是单调递增的数列也是可以实现的。$\{t_p\}$ 是 U 和 $\mathbf{T}$ 中的有界点列，一定存在收敛子列。设 $\{t_p\}$ 的子列 $\{t_{p_k}\}$ 收敛于 t_0，又因为 $\mathbf{T}$ 是完备的，则有 $t_0\in\mathbf{T}$，即 $\lim_{k\to+\infty}t_{p_k}=t_0$，$t_0\in\mathbf{T}$。因为 t_0 是 $\mathbf{T}$ 上存在的极限点，所以排除 t_0 是孤立点的可能。

(Ⅰ) 如果 t_0 是 $\mathbf{T}$ 上的右稠密点。因为 $f\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以 f 是右稠密连续函数。对于 $\forall\,0<\varepsilon\leqslant1$，$\exists\rho_0>0$，当 $t\in(t_0-\rho_0,t_0+\rho_0)\cap\mathbf{T}$ 使得 $\|f(t)-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon\leqslant1$ 成立时，有

$$\|f(t)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\|f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}+\varepsilon\leqslant\|f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}+1。$$

(Ⅱ) 如果 t_0 是 $\mathbf{T}$ 上的左稠密点。因为 f 是右稠密连续函数，所以它在左稠密点的左极限存在。取上述 ε，$\exists\rho_1>0$ 以及 $\alpha\in\mathscr{A}^n$，当 $t\in(t_0-\rho_1,t_0]\cap\mathbf{T}$ 时，有 $\|f(t)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon}{2}$，$\|f(t_0)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon}{2}$ 成立。计算可得

$$\|f(t)-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}=\|f(t)-\alpha+\alpha-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\|f(t)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}+\|\alpha-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\leqslant1。$$

由此可知，令 $\rho=\min\{\rho_0,\rho_1\}$，总有关系式 $\|f(t)-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon\leqslant1$，$t\in(t_0-\rho,t_0]\cap\mathbf{T}$ 成立。又因为 $\lim_{k\to\infty}t_{p_k}=t_0$，且 $\{t_{p_k}\}$ 是单调递增数列，所以对于 $\rho>0$，存在 $K\in\mathbf{Z}^+$，当 $k>K$ 时，$t_{p_k}\in(t_0-\rho,t_0]\cap\mathbf{T}$，使得 $\|f(t_{p_k})-f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon\leqslant1$ 成立。所以

$$\|f(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}=\|f(t_0)-f(t_{p_k})+f(t_{p_k})\|_{\mathscr{A}^n}\geqslant\|f(t_{p_k})\|_{\mathscr{A}^n}-\|f(t_0)-f(t_{p_k})\|_{\mathscr{A}^n}>p_k-1,$$

而 $\lim_{k\to\infty}p_k=+\infty$，与 $\|f(t_0)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon}{2}$ 矛盾。所以 $f(U)$ 是有界集，证毕。

引理 7 若 $f=g+h$，其中 $g\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$h\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则有 $g(\mathbf{T})\subset\overline{f(\mathbf{T})}$，且 $\|g\|_{\infty}\leqslant\|f\|_{\infty}$。

证明 采用反证法。假设 $g(\mathbf{T})\subset\overline{f(\mathbf{T})}$ 不成立，则存在 $t_0\in\mathbf{T}$ 及 $\varepsilon_0>0$ 使得 $\inf_{s\in\mathbf{T}}\|g(t_0)-f(s)\|_{\mathscr{A}^n}>\varepsilon_0$。

（Ⅰ）如果 t_0 是 $\mathbf{T}$ 上的右稠密点。因为 $g\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以 g 是 $\mathbf{T}$ 上右稠密连续函数。对于 $\varepsilon_0>0$，$\exists\rho_0>0$，当 $t_1\in(t_0-\rho_0,t_0+\rho_0)\cap\mathbf{T}$ 时，$\|g(t)-g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立。

（Ⅱ）如果 t_0 是 $\mathbf{T}$ 上的左稠密点。取上述 ε_0，$\exists\rho_1>0$ 以及 $\alpha\in\mathscr{A}^n$，当 $t_1\in(t_0-\rho_1,t_0)\cap\mathbf{T}$ 时，

$$\|g(t_1)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon_0}{4},\ \|g(t_0)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon_0}{4}$$

成立。计算可得

$$\|g(t_1)-g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}=\|g(t_1)-\alpha+\alpha-g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\|g(t_1)-\alpha\|_{\mathscr{A}^n}+\|\alpha-g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{4}+\frac{\varepsilon_0}{4}=\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

由此可知，令 $\rho=\min\{\rho_0,\rho_1\}$，总有关系式 $\|g(t_1)-g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}<\dfrac{\varepsilon_0}{2}$，$t_1\in(t_0-\rho,t_0]\cap\mathbf{T}$ 成立。又因为 $g\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，由定义 10 知，对于给定的 $\varepsilon_0>0$，存在 $l_{\frac{\varepsilon_0}{4}}=l(\dfrac{\varepsilon_0}{4})\in(0,+\infty)\cap\mathbf{T}$，使得 $\mathbf{T}$ 上每一个以 $l_{\frac{\varepsilon_0}{4}}$ 为长度的区间中，都至少存在一点 $\tau\in\Pi$ 使得当 $t_1\in(t_0-\rho,t_0)\cap\mathbf{T}$ 时，$\|g(t_1+\tau)-g(t_1)\|_{\mathscr{A}^n}<\dfrac{\varepsilon_0}{4}$成立。则有

$$\begin{gathered}\|h(t_1+\tau)\|_{\mathscr{A}^n}=\|f(t_1+\tau)-g(t_1+\tau)\|_{\mathscr{A}^n}=\\ \|f(t_1+\tau)+g(t_0)-g(t_0)+g(t_1)-g(t_1)-g(t_1+\tau)\|_{\mathscr{A}^n}\geqslant\\ \|f(t_1+\tau)+g(t_0)\|_{\mathscr{A}^n}-\|g(t_0)-g(t_1)\|_{\mathscr{A}^n}-\|g(t_1)+g(t_1+\tau)\|_{\mathscr{A}^n}\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{\varepsilon_0}{4}=\frac{\varepsilon_0}{4}。\end{gathered}$$

所以函数 $\|h(\cdot)\|_{\mathscr{A}^n}$ 将有界集 $(t_0+\tau-\rho,t_0+\tau+\rho)$ 映到无界集 $(-\infty,-\dfrac{\varepsilon_0}{4}]\cup[\dfrac{\varepsilon_0}{4},+\infty)$。因为 $h\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以 h 是右稠密连续函数，会将有界集映成有界集，矛盾，所以 $g(\mathbf{T})\subset\overline{f(\mathbf{T})}$。

同样地，采用反证法，如果 $\|g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ 不成立，则对于任意的 $t\in\mathbf{T}$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\|g\|_\infty-\|f\|_\infty}{2}$，$\exists t_2\in\mathbf{R}$，有 $\|g(t)-f(t_2)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon_1$ 以及

$$\begin{gathered}\|g(t)\|_{\mathscr{A}^n}-\varepsilon_1=\|g(t)\|_{\mathscr{A}^n}-\frac{\|g\|_\infty-\|f\|_\infty}{2}\leqslant\|g(t)\|_{\mathscr{A}^n}-\|g(t)-f(t_2)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\\ \|g(t)-(g(t)-f(t_2))\|_{\mathscr{A}^n}=\|f(t_2)\|_{\mathscr{A}^n}\end{gathered}$$

成立。计算可得

$$\|f\|_\infty<\frac{\|g\|_\infty+\|f\|_\infty}{2}\leqslant\|f(t_2)\|_{\mathscr{A}^n}。$$

矛盾，证毕。

定理 1　如果 $\{x_p\}\subset PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，并满足关系式

$$\lim_{p\to\infty}\|x_p(t)-x(t)\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\sup_{t\in\mathbf{T}}\|x_p(t)-x(t)\|_{\mathscr{A}^n}=0,$$

那么 $x(t)\subset PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

证明　对每一个正整数 p，因为 $x_p\subset PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，由定义 10 知，$x_p(t)$可表示成 $x_p(t)=y_p(t)+z_p(t)$，其中 $y_p\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$z_p\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。由引理 7 可知，$\|y_p\|_\infty\leqslant\|x_p\|_\infty$，当 $y_p-y_q\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$z_p-z_q\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$时，有 $\|y_p-y_q\|_\infty\leqslant\|x_p-x_q\|_\infty$。又 $\lim\limits_{p\to\infty}\|x_p(t)-x(t)\|_\infty=0$，所以$\{x_p(t)\}$是柯西序列。因为$(AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),\|\cdot\|_\infty)$是 Banach 空间，则 $\exists y\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，使得 $\lim\limits_{p\to\infty}\|y_p(t)-y(t)\|_\infty=0$。设 $z=x-y$，当 p 趋于∞时，有

$$\|z_p-z\|_\infty=\|x_p-y_p-(x-y)\|_\infty\leqslant\|x_p(t)-x(t)\|_\infty+\|y_p(t)-y(t)\|_\infty\to0,$$

即 $\lim\limits_{p\to\infty}\|z_p(t)-z(t)\|_\infty=0$。因为$(BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),\|\cdot\|_\infty)$是 Banach 空间，则 $z\in BC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。同时由

$$\| z(t) \|_{\mathscr{A}^n} = \| z(t)-z_p(t)+z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n} \leqslant \| z(t)-z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n} + \| z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n} \leqslant \| z(t)-z_p(t) \|_\infty + \| z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n}$$

可以得到

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z(t) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s \leqslant \frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z(t)-z_p(t) \|_\infty \Delta s + \frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s。$$

当 $r\to\infty$时，因为 $z_p \in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，可得 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z_p(t) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s=0$，那么有

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z(t) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s \leqslant \frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z(t)-z_p(t) \|_\infty \Delta S。$$

令 $p\to\infty$，有 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| z(t) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s=0$，所以 $z\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则 $x(t)\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，证毕。

推论 1 $(PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n), \| \cdot \|_\infty)$是 Banach 空间。

引理 8 如果函数 $f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 满足 Lipschitcz 条件，$\phi\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$\theta\in\Pi$，则

$$f(\phi(t-\theta))\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)。$$

证明 因为 $\phi\in PAC_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以 ϕ 可分解成 $\phi=\phi_1+\phi_2$。其中，$\phi_1\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$\phi_2\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。令 $E(t)=f(\phi(t-\theta))$，则有

$$E(t)=f(\phi(t-\theta))=f(\phi_1(t-\theta))+f(\phi(t-\theta))-f(\phi_1(t-\theta))=E_1(t)+E_2(t),$$

其中，$E_1(t)=f(\phi_1(t-\theta))$，$E_2(t)=f(\phi(t-\theta))-f(\phi_1(t-\theta))$。因为 ϕ_1 和 ϕ_2 都是右稠密连续函数，并且 f 满足 Lipschitcz 条件，所以 $E_1(t)$、$E_2(t)$是右稠密连续函数。

首先证 $E_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。因为 $\phi_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，故由定义 10 知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $l=l(\varepsilon)\in(0,+\infty)\cap\Pi$，使得 $\mathbf{T}$ 上每一个以 $l(\varepsilon)$为长度的区间中，都至少存在一点 $\tau\in\Pi$，使得

$$\| \phi_1(t+\tau)-\phi_1(t) \|_{\mathscr{A}^n} < \frac{\varepsilon}{L}$$

成立。又因为 f 满足 Lipschitcz 条件，所以$\exists L>0$，使得对$\forall u,v\in\mathscr{A}$，都有 $\| f(u)-f(v) \|_{\mathscr{A}^n} < L\| u-v \|_{\mathscr{A}^n}$ 成立，故有

$$\| E_1(t+\tau)-E_1(t) \|_{\mathscr{A}^n} = \| f(\phi_1(t+\tau-\theta))-f(\phi_1(t-\theta)) \|_{\mathscr{A}^n} \leqslant L\| \phi_1(t+\tau-\theta)-\phi_1(t-\theta) \|_{\mathscr{A}^n} \leqslant L\frac{\varepsilon}{L}=\varepsilon,$$

即 $E_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

再证 $E_2(t)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。因为 f 满足 Lipschitcz 条件，所以

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| E_2(s) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s = \frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| f(\phi(s-\theta))-f(\phi_1(s-\theta)) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s \leqslant$$
$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} L\| \phi(s-\theta)-\phi_1(s-\theta) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s = \frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} L\| \phi_2(s-\theta) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s。$$

又因为 $\phi_2\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则有

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r} \| E_2(s) \|_{\mathscr{A}^n} \Delta s=0,$$

即 $E_2(t)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则 $E(t)=f(\phi(t-\theta))\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，证毕。

引理 9 如果函数 $f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 满足 Lipschitcz 条件，$K:[0,+\infty)\cap\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 是连续右稠可积函数，且 $0\leqslant\int_0^{+\infty}|K(\delta)|\Delta\delta\leqslant K^+$，这里的 K^+ 是一个正的常数，对于 $\phi\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则有

$$\int_0^{+\infty} K(s)f(\phi(t-s))\Delta s\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)。$$

证明 因为 $\phi\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，故 ϕ 可以表示成 $\phi=\phi_1+\phi_2$。其中，$\phi_1\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，$\phi_2\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。令 $Q(t)=\int_0^{+\infty} K(s)f(\phi(t-s))\Delta s$，则有

$$Q(t)=\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi(t-s))\Delta s=\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi_1(t-s)+\phi_2(t-s))\Delta s=$$

$$\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi_1(t-s))\Delta s+\int_0^{+\infty}K(s)[f(\phi_1(t-s)+\phi_2(t-s))-f(\phi_1(t-s))]\Delta s=Q_1(t)+Q_2(t),$$

其中，

$$Q_1(t)=\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi_1(t-s))\Delta s,Q_2(t)=\int_0^{+\infty}K(s)[f(\phi_1(t-s)+\phi_2(t-s))-f(\phi_1(t-s))]\Delta s。$$

首先证 $Q_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。因为 $\phi_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 $l=l(\varepsilon)\in(0,+\infty)\cap\Pi$，使得 $\mathbf{T}$ 上每一个以 $l(\varepsilon)$ 为长度的区间中，都至少存在一点 $\tau\in\Pi$，使得 $\|\phi_1(s+\tau)-\phi_1(s)\|_{\mathscr{A}^n}<\frac{\varepsilon}{LK^+}$ 成立，又因为 f 满足 Lipschitcz 条件，所以有

$$\|Q_1(t+\tau)-Q_1(t)\|_{\mathscr{A}^n}=\left\|\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi_1(t+\tau-s))\Delta s-\int_0^{+\infty}K(s)f(\phi_1(t-s))\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}=$$

$$\left\|\int_0^{+\infty}K(s)[f(\phi_1(t+\tau-s))-f(\phi_1(t-s))]\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}=\left\|\int_{-\infty}^{t}K(s)[f(\phi_1(s+\tau))-f(\phi_1(s))]\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant$$

$$L\int_{-\infty}^{t}|K(s)|\cdot\|\phi_1(t+\tau-\theta)-\phi_1(t-\theta)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\leqslant LK^+\frac{\varepsilon}{LK^+}=\varepsilon,$$

即 $Q_1(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

再证 $Q_2(t)\in PAP^0_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。由

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|Q_2(s)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s=\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\left\|\int_0^{+\infty}K(s)[f(\phi_1(s-\theta)+\phi_2(s-\theta))-f(\phi_1(s-\theta))]\Delta\theta\right\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\leqslant$$

$$L\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_0^{+\infty}|K(s)|\cdot\|\phi_1(s-\theta)+\phi_2(s-\theta)-\phi_1(s-\theta)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta\theta\Delta s\leqslant LK^+\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_0^{+\infty}\|\phi_2(s-\theta)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta\theta\Delta s,$$

$$\phi_2\in PAP^0_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),$$

得

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|Q_2(s)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s=0$$

成立，即 $Q_2(t)\in PAP^0_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则 $Q(t)\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，证毕。

3　时标上 Clifford 值伪概周期函数解的存在性

考虑具 D 算子和分布时滞的细胞神经网络模型

$$\begin{cases}[x_i(t)-p_i(t)x_i(t-r_i(t))]^{\Delta}=-a_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j(x_j(t))+\\ \sum_{j=1}^{n}c_{ij}\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)g_j(x_j(t-s))\Delta s+I_i(t),\\ x_i(s)=\phi_i(s),s\in(-\infty,0]\cap\mathbf{T},\end{cases}\tag{1}$$

其中，$x_i(t)\in\mathscr{A}$ 是第 i 个神经元在 t 时刻的状态，$p_i(t),a_i(t),b_{ij}(t),c_{ij}(t)\in\mathscr{A}$ 是连接权重函数，$I_i(t)\in\mathscr{A}$ 是外部输入函数 $f_j,g_j:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 是激活函数，$\phi_i(t)\in(C(-\infty,0]\cap\mathbf{T},\mathscr{A})$。对以上参数做如下假设：

(H1) $p_i(t),a_i(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),b_{ij}(t),c_{ij}(t),I_i(t)\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

(H2) f_j 和 g_j 满足 Lipschitcz 条件，存在 $L_j^f,L_j^g>0$，使得对 $\forall u,v\in\mathscr{A}$，有

$$\|f_j(u)-f_j(v)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L_j^f\|u-v\|_{\mathscr{A}^n},\|g_j(u)-g_j(v)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L_j^g\|u-v\|_{\mathscr{A}^n},$$

且 $f_j(0)=g_j(0)=0$，并令 $L^f=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{L_j^f\},L^g=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{L_j^g\}$。

(H3) $K_{ji}:[0,+\infty)\cap\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 是连续的右稠可积函数，满足关系式 $0\leqslant\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)\Delta\delta\leqslant+\infty$。

令 $y_i(t)=x_i(t)-p_i(t)x_i(t-r_i(t))$，系统(1)转变成

$$\begin{cases} y_i^{\Delta}(t)=-a_i(t)y_i(t)-a_i(t)p_i(t)x_i(t-r_i(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)f_j(x_j(t))+ \\ \quad \sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(s)g_j(x_j(t-s))\Delta s+I_i(t), \\ y_i(s)=\phi_i(s)-p_i(s)\phi_i(s-r_i(s)),s\in(-\infty,0]\cap\mathbf{T}。\end{cases} \tag{2}$$

引理 10 假设(H1)～(H3)成立，如果 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，那么函数 $y^{\phi}=(y_1^{\phi},y_2^{\phi},\cdots,y_n^{\phi})^{\mathrm{T}}\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，它的第 i 个分量是

$$y_i^{\phi}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i(s,\phi)\Delta s,$$

其中，

$$W_i(s,\phi)=-a_i(s)p_i(s)\phi_i(s-r_i(s))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(\phi_j(s))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(\phi_j(s-\delta))\Delta\delta+I_i(s)。$$

证明 由引理 8、引理 9 以及(H1)～(H3)可得 $W_i(s,\phi)\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。不妨设

$$W_i(s,\phi)=W_i^1(s,\phi)+W_i^2(s,\phi),W_i^1(s,\phi)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),W_i^2(s,\phi)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n),$$

所以有

$$y_i^{\phi}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s+\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^2(s,\phi)\Delta s=y_i^{\phi_1}(t)+y_i^{\phi_2}(t),$$

其中

$$y_i^{\phi_1}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s,y_i^{\phi_2}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^2(s,\phi)\Delta s。$$

首先证 $y_i^{\phi_1}(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。因为 $a_i(t),W_i^1(s,\phi)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，故由引理 4 可知，对于无穷小列$\{\varepsilon_p\}$中的每一个 $\varepsilon_p>0$，存在 $l(\varepsilon_p)\in(0,+\infty)\cap\Pi$，使得 $\mathbf{T}$ 上每一个以 $l(\varepsilon_p)$ 为长度的区间中，都至少存在一点 $\tau_p\in\Pi$，使得

$$\|a_i(s+\tau_p,\phi)-a_i(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon_p,\ \|W_i^1(s+\tau_p,\phi)-W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon_p$$

成立，由引理 2 可知有

$$e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))-e_{-a_i}(t,\sigma(s))=\int_{\sigma(s)}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(\theta))(a_i(\theta)-a_i(\theta+\tau_p))e_{-a_i}(\theta+\tau_p,\sigma(s)+\tau_p)\Delta\theta。$$

所以

$$\begin{aligned}
&\|y_i^{\phi_1}(t+\tau_p)-y_i^{\phi_1}(t)\|_{\mathscr{A}^n}=\left\|\int_{-\infty}^{t+\tau_p}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}= \\
&\left\|\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s+\tau_p,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}= \\
&\left\|\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s+\tau_p,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s,\phi)\Delta s+\right. \\
&\left.\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant \\
&\left\|\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s+\tau_p,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}+ \\
&\left\|\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))W_i^1(s,\phi)\Delta s-\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^1(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant \\
&\int_{-\infty}^{t}\|e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))\|_{\mathscr{A}^n}\|W_i^1(s+\tau_p,\phi)-W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s+ \\
&\int_{-\infty}^{t}\|e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))-e_{-a_i}(t,\sigma(s))\|_{\mathscr{A}^n}\|W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\leqslant
\end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon}{a_i^-}+\sup_{t\in\mathbf{T}}\left\{\|W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\right\}\int_{-\infty}^{t}\|e_{-a_i}(t+\tau_p,\sigma(s+\tau_p))-e_{-a_i}(t,\sigma(s))\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{a_i^-}+\sup_{t\in\mathbf{T}}\left\{\|W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\right\}\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\sigma(s)}\|e_{-a_i}(t,\sigma(\theta))(a_i(\theta+\tau_p)-a_i(\theta))e_{-a_i}(\theta+\tau_p,\sigma(s)+\tau_p)\Delta\theta\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{a_i^-}+\sup_{t\in\mathbf{T}}\left\{\|W_i^1(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\frac{\varepsilon}{(a_i^-)^2}\text{。}\right.$$

所以任取 $\varepsilon>0$，$\exists P\in\mathbf{Z}^+$，当 $p>P$ 时，有 $\|y_i^{\phi_1}(t+\tau_p)-y_i^{\phi_1}(t)\|_{\mathscr{A}^n}<\varepsilon_p<\varepsilon$，即 $y_i^{\phi_1}(t)\in AP(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。

再证 $y_i^{\phi_2}(t)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$。对于正常数 $\forall\tau_1\in\Pi$，有

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|y_i^{\phi_2}(s)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s=\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i^2(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant$$

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))\|W_i^2(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{t}e_{\ominus a_i}(t,\sigma(s))\|W_i^2(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant$$

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{t}e^{a_i^-(\sigma(s)-t)}\|W_i^2(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{t}e^{a_i^-(s+\tau_1-t)}\|W_i^2(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant$$

$$\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{\tau_1}e^{a_i^-(s)}\|W_i^2(s-\tau_1+t,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{a_i^-(s)}\|W_i^2(s-\tau_1+t,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\leqslant$$

$$\frac{1}{2r}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{a_1^-(s)}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|W_i^2(s-\tau_1+t,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s\Delta t\text{。}$$

又因为 $W_i^2(s,\phi)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，所以由 $\mathbf{T}$ 上的勒贝格控制收敛定理可以得到

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{t_0-r}^{t_0+r}\|y_i^{\phi_2}(s)\|_{\mathscr{A}^n}\Delta s=0$$

成立，即 $y_i^{\phi_2}(t)\in PAP_{rd}^0(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，则 $y_i^{\phi}(t)\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$，证毕。

构造空间 $\mathscr{B}_0$，对于概周期函数 ϕ，满足

$$\mathscr{B}_0=\{\phi\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n):\|\phi-h\|_0\leqslant\rho\},$$

其中，范数 $\|\cdot\|_0=\sup\limits_{t\in\mathbf{T}}\max\limits_{i\in I}\|\cdot\|_{\mathscr{A}^n}$，该空间是 Banach 空间。

定理 2　假设(H1)～(H3)成立，若

$$p^++\frac{a^+p^++b^+L^f+c^+K^+L^g}{a^-}\leqslant\frac{\rho}{\rho+1},$$

其中，

$$a^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i(t)\},a^-=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i(t)\},K^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}\left\{\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)\Delta\delta\right\},$$

$$p^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{p_i(t)\},b^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^+\right\},c^+=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^+\right\},$$

则系统(1)在空间 $\mathscr{B}_0$ 上有唯一的伪概周期解 $x^*(t)$。

证明　由引理 10 可知，若 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in PAP_{rd}(\mathbf{T},\mathscr{A}^n)$是

$$y_i^{\phi}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))W_i(s,\phi)\Delta s$$

的伪概周期解，其中

$$W_i(s,\phi)=-a_i(s)p_i(s)\phi_i(s-r_i(s))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(\phi_j(s))+$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(\phi_j(s-\delta))\Delta\delta+I_i(s),$$

则 y 也是系统(2)的伪概周期解，并且

$$(p_1(t)\phi_1(t-r_1(t)),p_2(t)\phi_2(t-r_2(t)),\cdots,p_n(t)\phi_n(t-r_n(t)))^{\mathrm{T}}+y^{\phi}(t)$$

也是伪概周期的。定义 $h(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}}$,它的第 i 个分量是

$$h_i(t)=\int_{-\infty}^{t} e_{-a_i}(t,\sigma(s))I_i(s)\Delta s。$$

若 $\phi\in\mathscr{B}_0$,则有

$$\|\phi\|_0=\|\phi-h+h\|_0\leqslant\|\phi-h\|_0+\|h\|_0\leqslant\rho+I,$$

这里 $I=\|h\|_0$。定义映射 $T:B_0\rightarrow B_0$ 使得

$$T(\phi)(t)=(p_1(t)\phi_1(t-r_1(t)),p_2(t)\phi_2(t-r_2(t)),\cdots,p_n(t)\phi_n(t-r_n(t)))^{\mathrm{T}}+y^{\phi}(t),\forall\phi\in B_0。$$

首先证明当 $\phi\in\mathscr{B}_0$ 时有 $T(\phi)\in\mathscr{B}_0$。

$$\|T(\phi)(t)-h(t)\|_0=\sup_{t\in\mathbf{T}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|p_i(t)\phi_1(t-r_i(t))+\int_{-\infty}^{t} e_{-a_i}(t,\sigma(s))H_i(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n},$$

其中

$$H_i(s,\phi)=-a_i(s)p_i(s)\phi_i(s-r_i(s))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(\phi_j(s))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(\phi_j(s-\delta))\Delta\delta, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}&\|f_j(\phi_j(s))\|_{\mathscr{A}^n}=\|f_j(\phi_j(s))-f_j(0)+f_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\\&\|f_j(\phi_j(s))-f_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}+\|f_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L^f\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}。\end{aligned}\quad (4)$$

由条件(H2)、(H3)可知

$$\begin{aligned}&\|g_j(\phi_j(s-\delta))\|_{\mathscr{A}^n}=\|g_j(\phi_j(s-\delta))-g_j(0)+g_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\\&\|g_j(\phi_j(s-\delta))-g_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}+\|g_j(0)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L^g\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}。\end{aligned}\quad (5)$$

同理

$$\|H_i(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant a^+p^+\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}+b^+L^f\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}+c^+K^+L^g\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}。$$

由式(3)～(5)可得

$$\|H_i(s,\phi)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant a^+p^+\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}+b^+L^f\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}+c^+K^+L^g\|\phi\|_{\mathscr{A}^n}。$$

从而

$$\|T(\phi)(t)-h(t)\|_0\leqslant\left(p^++\frac{a^+p^++b^+L^f+c^+K^+L^g}{a^-}\right)\|\phi\|_0\leqslant\rho。$$

由此知 **T** 是自反映射。

再证 **T** 是压缩映射。如果 $\phi,\psi\in\mathscr{B}_0$,那么

$$T(\psi)(t)=(p_1(t)\psi_1(t-r_1(t)),p_2(t)\psi_2(t-r_2(t)),\cdots,p_n(t)\psi_n(t-r_n(t)))^{\mathrm{T}}+y^{\psi}(t),\forall\psi\in\mathscr{B}_0,$$

伪概周期解为 $y^{\psi}(t)=(y_1^{\psi}(t),y_2^{\psi}(t),\cdots,y_n^{\psi}(t))^{\mathrm{T}}$,解的第 i 个分量为

$$y_i^{\psi}(t)=\int_{-\infty}^{t} e_{-a_i}(t,\sigma(s))V_i(s,\psi)\Delta s,$$

其中

$$V_i(s,\psi)=-a_i(s)p_i(s)\psi_i(s-r_i(s))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(\psi_j(s))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(\psi_j(s-\delta))\Delta\delta+I_i(s)。$$

考虑

$$\|T(\phi)(t)-T(\psi)(t)\|_0=\sup_{t\in\mathbf{T}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|p_i(t)[\phi_i(t-r_i(t))-\psi_i(t-r_i(t))]+\int_{-\infty}^{t} e_{-a_i}(t,\sigma(s))Q_i(s,\phi)\Delta s\right\|_{\mathscr{A}^n},$$

其中

$$Q_i(s,\phi,\psi)=-a_i(s)p_i(s)\gamma_i(s)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)\widetilde{f}_j(s,\phi,\psi)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)\widetilde{g}_j(s,\phi,\psi)\Delta\delta。\quad (6)$$

令

$$\gamma_i(s)=\phi_i(s-r_i(s))-\psi_i(s-r_i(s)),\widetilde{f}_j(s,\phi,\psi)=f_j(\phi_j(s))-f_j(\psi_j(s)),$$

$$\widetilde{g}_j(s,\phi,\psi)=g_j(\phi_j(s-\delta))-g_j(\psi_j(s-\delta))。$$

根据无穷范数的定义，显然有

$$\|\gamma_i(s)\|_{\mathscr{A}^n}=\|\phi_j(s-r_i(s))-\psi_j(s-r_i(s))\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant\|\phi-\psi\|_0。\tag{7}$$

由条件(H2)、(H3)可知

$$\|\widetilde{f}_j(s,\phi,\psi)\|_{\mathscr{A}^n}=\|f_j(\phi_j(s))-f_j(\psi_j(s))\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L^f\|\phi-\psi\|_0。\tag{8}$$

同理

$$\|\widetilde{g}_j(s,\phi,\psi)\|_{\mathscr{A}^n}=\|g_j(\phi_j(s-\delta))-g_j(\psi_j(s-\delta))\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant L^g\|\phi-\psi\|_0。\tag{9}$$

由式(6)～(9)可以得到

$$\|Q_i(s,\phi,\psi)\|_{\mathscr{A}^n}\leqslant(a^+p^++b^+L^f+c^+K^+L^g)\|\phi-\psi\|_0,$$

从而

$$\|T(\phi)(t)-T(\psi)(t)\|_0\leqslant\left(p^++\frac{a^+p^++b^+L^f+c^+K^+L^g}{a^-}\right)\|\phi-\psi\|_0\leqslant\|\phi-\psi\|_0,$$

由此可以判定 **T** 是压缩映射。

由 Banach 不动点定理可知 **T** 有唯一的不动点 $x^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t),\cdots,x_n^*(t))^{\mathrm{T}}\in\mathscr{B}_0$ 使得

$$x^*(t)=T(x^*)(t)=(p_1(t)x_1^*(t-r_1(t)),p_2(t)x_2^*(t-r_2(t)),\cdots,p_n(t)x_n^*(t-r_n(t)))^{\mathrm{T}}+x^{**}(t)$$

成立，这里 $x^{**}(t)=(x_1^{**}(t),x_2^{**}(t),\cdots,x_n^{**}(t))^{\mathrm{T}}$，第 i 个分量为

$$x_i^{**}(t)=\int_{-\infty}^{t}e_{-a_i}(t,\sigma(s))O_i(s,x^*)\Delta s,$$

其中

$$O_i(s,x^*)=-a_i(s)p_i(s)x_i(s-r_i(s))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(x_j^*(s))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(s)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(x_j^*(s-\delta))\Delta\delta+I_i(s)。$$

从而有

$$[x_i^*(t)-p_i(t)x_i^*(t-r_i(t))]^{\Delta}=-a_i(t)x_i^*(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s)f_j(x_j^*(t))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(t)\int_0^{+\infty}K_{ji}(\delta)g_j(x_j^*(s-\delta))\Delta\delta+I_i(t)。$$

可知 x^* 是系统(1)的一个伪概周期解。

4　结论

对系统(1)进行了定性研究，讨论了该系统伪概周期解的存在性，详细给出了时标 **T** 到 n 维 Clifford 代数空间 $\mathscr{A}^n$ 的右稠密伪概周期函数的定义，系统性地分析了时标上具 D 算子和分布时滞的 Clifford 值细胞神经网络模型其概周期解的存在性，探讨了分布时滞对此类神经网络的伪概周期解的存在性会产生的影响。目前的研究已经将实变量伪概周期函数以及伪概周期序列的概念进行了合理推广，但只讨论了右稠密函数的情况，未来可进一步探讨左稠密伪概周期函数的定义以及其相关性质，并以 Nabla 算子为切入点，分析对于不同神经网络伪概周期解的存在性和稳定性。

参考文献：

［1］　CLIFFORD W K. Applications of Grassmann's extensive algebra[J]. American journal of mathematics, 1878,1(4):350-358.

［2］　PEARSON J K, BISSET D L. Back propagation in a Clifford algebra[J]. Artificial neural networks, 1992,2:413-416.

[3] ZHANG C Y. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations[J]. Journal of mathematical analysis and applications，1994，181(1)：62-76.

[4] STEPANOFF W. Sur quelques généralisations des fonctions presque périodiques[J]. Comptes rendus，1925，181：90-92.

[5] DIAGANA T. Weighted pseudo almost periodic functions and applications[J]. Comptes rendus mathematique，2006，343(10)：643-646.

[6] YAO L. Global exponential convergence of neutral type shunting inhibitory cellular neural networks with D operator[J]. Neural processing letters，2017，45：401-409.

[7] 申时萍. 时标上几类 Clifford 值神经网络模型的概周期函数类解的存在性及稳定性[D]. 昆明：云南大学，2020.

[8] SHEN S，LI Y. S_p-almost periodic solutions of Clifford-valued fuzzy cellular neural networks with time-varying delays[J]. Neural processing letters，2020，51(2)：1749-1769.

[9] BOHNER M，PETERSON A. Dynamic equations on time scales：an introduction with applications [M]. Boston：Birkhauser，2001.

[10] 赵莉莉. 时标上的 Clifford 值概周期函数与动力方程的 Clifford 值概周期解[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2024，48(1)：19-28.

[11] WANG C，AGARWAL R P，O′REGAN D，et al. Theory of translation closedness for time scales with applications in translation functions and dynamic equations[M]. Zurich：Springer Nature Switzerland AG，2020.

[12] BRACKX F，DELANGHE R，SOMMEN F. Clifford analysis[M]. London：Pitman Books Limited，1982.

Existence of pseudo almost periodic solutions for Clifford-valued cellular neural networks with D operators and distributed delay on time scale

WANG Xiangyu

(*School of Mathematics and Statistics*，*Yunnan University*，*Kunming* 650504，*China*)

Abstract：Starting from the definition of Clifford-valued almost periodic function on time scale，the definition of the right dense pseudo almost periodic function from time scale $\mathbf{T}$ to n Clifford algebraic space $\mathscr{A}^n$ is provided and its related properties are discussed. The completeness of the space of pseudo almost periodic functions with Clifford values on time scale has been obtained. By using Banach fixed point theorem and the calculus theory on time scale，has established the sufficient condition of the existence of pseudo almost periodic solutions of cellular neural networks with D operator and distributed delay on time scale has been established.

Keywords：time scale；Clifford value；D operator；distributed delay；cellular neural network

(责任编辑：贾晶晶)

引用格式 王翔宇. 时标上具 D 算子和分布时滞的 Clifford 值细胞神经网络的伪概周期解的存在性[J]. 山东航空学院学报，2025，42(6)：90-100.

WANG X Y. Existence of pseudo almost periodic solutions for Clifford-valued cellular neural networks with D operators and distributed delay on time scale[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2025，42(6)：90-100.