【微分方程与动力系统研究】

非局部边界条件下的逆热传导问题

王 谦

(兰州交通大学 数理学院,甘肃 兰州 730070)

摘 要:研究了一类非局部边界条件下的逆热传导问题。由于问题的不适定性,需要额外的超定条件。先用分离变量法构造特征函数系统,再通过辅助谱理论和 Fourier 方法确定解的一般形式,通过级数收敛判别法和 Schauder 不动点定理证明解的存在性,最后利用估计证明解的唯一性和稳定性。同时,采用预测矫正型迭代法和 Crank - Nicoloson 有限差分格式相结合的方法对反演问题进行数值分析,并讨论了数值算例。

关键词:反问题;热传导方程;辅助谱理论;存在性;唯一性;稳定性

中图分类号:O 175 **文献标识码**:A DOI:10.13486/j.cnki.1673 - 2618.2022.06.009

0 引言

数学物理反问题[1-3]是一个以较快速度发展的新兴领域,热传导反问题是它的一个重要分支。近年来,科学家们对热方程中扩散系数的确定产生了兴趣[4-7],这类问题出现在许多数学模型中,如热传导方程、棒内放射性衰变过程等[8-10],也有大量的数值分析案例解决实际问题[11-12]。

本文主要研究在额外超定条件下具有非局部边界条件的热传导方程反问题。设 $T>0$ 是固定常数,在矩阵 $\Omega_T=\{(x,t):0<x<1,0\leqslant t\leqslant T\}$ 中,考虑

$$u_t-a(t)u_{xx}+c(t)u=f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi,0\leqslant x\leqslant 1, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=0,0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$u(0,t)=u(1,t),0\leqslant t\leqslant T \tag{4}$$

的初边值问题,其中,f,φ,c 是已知函数,α 是给定的数字。

方程(1)在数学建模时出现在正在进行放射性衰变或有热源损耗的棒内热传导过程中,函数 $a(t)$ 是扩散系数,可由材料的导热系数、密度、热容确定,方程(2)中函数 $\varphi(x)$ 是初始时刻 $t=0$ 时棒在 x 处的温度,而 $u(x,t)$ 是棒在时刻 t 的温度分布。边界条件(3)表示在棒的左边界 $x=0$ 处有热交换,其中常数 $-\alpha$ 是传热系数 $h(t)$ 和导热系数 $k(t)$ 的比值,即 $-\alpha=\dfrac{h(t)}{k(t)}$。由非局部边界条件(4)可确定,在任何时刻棒的左边界 $\{x=0\}$ 和棒的右边界 $\{x=1\}$ 温度相等。

当扩散系数 $a(t)>0,0\leqslant t\leqslant T$ 已知时,由式(1)~(4)确定 $u(x,t)$ 的问题称为正问题。然而,当 $a(t)>0$ 未知时,上述问题是不适定的。为了纠正这种不适定性,应考虑额外的超定条件

收稿日期:2021 - 12 - 22

基金项目:国家自然科学基金项目(11461039,61663018);甘肃省自然科学基金项目(18JR3RA122)

作者简介:王 谦(1997—),男,山东济宁人,硕士研究生,主要从事数学物理反问题研究。
E-mail:wqian9707@163.com

$$\int_0^1 \chi(t)u(x,t)\mathrm{d}x = E(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

其中，$E(t)$，$\chi(t)$ 是确定函数，这一条件可以看成棒中包含的热能。由方程(1)～(5)确定$\{a(t),u(x,t)\}$的问题是反问题。

1 逆问题的适定性

对属于区间 $C[0,T]\times(C^{2,1}(\Omega_T)\cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T))$ 的一组$\{a(t),u(x,t)\}$，满足方程(1)～(5)且在区间$[0,T]$上 $a(t)>0$ 称为反问题(1)～(5)的经典解。此问题的定义为数据带来了以下一致性条件：

$$\varphi'(0)+\alpha\varphi(0)=0, \varphi(0)=\varphi(1), \int_0^1 \chi(0)\varphi(x)\mathrm{d}x = E(0)。$$

1.1 辅助谱问题

由于函数 $a(t)$ 和 $c(t)$ 与空间无关，且边界条件是线性相关的，分离变量方法适用于反问题(1)～(5)的研究。利用分离变量法，可得

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, 0\leqslant x\leqslant 1, X'(0)+\alpha X(0)=0, X(0)=X(1), \tag{6}$$

其中，λ 是参数。很容易看出系统(6)不是自伴随的。现考虑 $\alpha\neq 0$ 时，系统(6)有特征值 λ_k，$k=0,1,2,\cdots$ 使得

$$\lambda_{2n}=(2\pi n)^2, \lambda_{2n-1}=\mu_n^2, n=1,2,\cdots, \lambda_0=\begin{cases}\mu_0^2, \alpha<0,\\ -s_0^2, \alpha>0,\end{cases}$$

其中，$\mu_n=2\pi n+O(1)\in(2\pi n,2\pi n+\pi)$ 和 $\mu_n=2\pi n+O(1)\in(2\pi n-\pi,2\pi n)$，$n=1,2,\cdots$，分别是方程 $\mu\sin\frac{\mu}{2}+\alpha\cos\frac{\mu}{2}=0$ 在 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 时的单调递增正解，s_0 是方程 $\mathrm{e}^s=1+\frac{2\alpha}{s-\alpha}(\alpha>0)$ 的唯一正解。另外，系统的特征函数 $X_k(x)$，$k=0,1,2,\cdots$ 是

$$X_{2n}(x)=\cos(2\pi nx)-\frac{\alpha}{2\pi n}\sin(2\pi nx), X_{2n-1}(x)=\cos(\mu_n x)-\frac{\alpha}{\mu_n}\sin(\mu_n x), n=1,2,\cdots,$$

$$X_0(x)=\begin{cases}\cos(\mu_0 x)-\dfrac{\alpha}{\mu_0}\sin(\mu_0 x), \alpha<0,\\ \dfrac{s_0-\alpha}{s_0+\alpha}\mathrm{e}^{s_0 x}+\mathrm{e}^{-s_0 x}, \alpha>0。\end{cases} \tag{7}$$

任何满足系统(6)中边界条件的函数都可以将特征函数(7)展开成一致收敛级数。由于系统(6)不是自伴随的，必须考虑其伴随谱问题。系统(6)的伴随谱问题形式为

$$Y''(x)+\lambda Y(x)=0, 0\leqslant x\leqslant 1, Y(1)=0, Y'(1)-Y'(0)-\alpha Y(0)=0。 \tag{8}$$

该系统的特征值和系统(6)的特征值相同，系统的特征函数 $Y_n(x)$，$n=0,1,2,\cdots$ 满足

$$Y_{2n}(x)=-\frac{4\pi n}{\alpha}\sin(2\pi nx),$$

$$Y_{2n-1}(x)=\frac{2\mu_n}{\alpha(\mu_0^2+\alpha^2-2\alpha)}((\mu_n^2-\alpha^2)\sin(\mu_n x)+2\alpha\mu\cos(\mu_n x)), n=1,2,\cdots,$$

$$Y_0(x)=\begin{cases}\dfrac{2\mu_0}{\alpha(\mu_0^2+\alpha^2-2\alpha)}((\mu_0^2-\alpha^2)\sin(\mu_0 x)+2\alpha\mu_0\cos(\mu_0 x)), \alpha<0,\\ -\dfrac{(s_0+\alpha)}{2\alpha(s_0^2-\alpha^2+2\alpha)}((s_0-\alpha)^2\mathrm{e}^{s_0 x}-(s_0+\alpha)^2\mathrm{e}^{-s_0 x}), \alpha>0。\end{cases}$$

引理 1 系统(6)和系统(8)在区间$[0,1]$上构成双正交函数系，即对于所有非负整数 i 和 j，

$$(X_i,Y_j)=\int_0^1 X_i(x)Y_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij},$$

其中，δ_{ij} 是 Kronecker 符号。

设 $e_n(x)=\sin(\mu_n x)$ 和 $h_n(x)=\cos(\mu_n x)$，$n=1,2,\cdots$ 是两个数列。

引理 2　如果 $\Psi(x)\in L_2[0,1]$，估计

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(\Psi,e_n)|^2\leqslant c_1\|\Psi\|_{L_2[0,1]}^2,\sum_{n=1}^{\infty}|(\Psi,h_n)|^2\leqslant c_2\|\Psi\|_{L_2[0,1]}^2$$

成立，其中 $(\Psi,e_n)=\int_0^1\Psi(x)e_n(x)\mathrm{d}x$，$c_1,c_2$ 为常数。

由于特征函数 $Y_{2n-1}(x)$ 可由函数 $e_n(x)$，$h_n(x)$ 构成，

$$Y_{2n-1}(x)=a_n e_n(x)+b_n h_n(x),a_n=\frac{2\mu_n(\mu_n^2-\alpha^2)}{\alpha(\mu_n^2+\alpha^2-2\alpha)},b_n=\frac{4\mu_n^2}{\mu_n^2+\alpha^2-2\alpha},$$

利用引理 2 和 Schwarz 不等式可得下列引理：

引理 3　如果 $\Psi(x)\in L_2[0,1]$，估计 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}|(\Psi,Y_{2n-1})|\leqslant c_3\|\Psi\|_{L_2[0,1]}$（$c_3$ 是常数）成立。

引理 4　如果 $\varphi(x)\in C^2[0,1]$ 满足 $\varphi'(0)+\alpha\varphi(0)=0$，$\varphi(0)=\varphi(1)$，那么方程

$$(\varphi,Y_{2n-1})=-\frac{1}{\mu_n^2}(\varphi'',Y_{2n-1}),(\varphi,Y_{2n})=-\frac{1}{(2\pi n)^2}(\varphi'',Y_{2n})$$

成立。

1.2　解的存在性和唯一性

对数据 f,φ,c,E,χ 进行假设，并证明反问题(1)～(5)的存在唯一性。

假设 A_1　$\varphi\in C^4[0,1]$；$\varphi(0)=\varphi(1)$；$\varphi'(0)+\alpha\varphi(0)=0$；$\varphi''(0)=\varphi''(1)$；$\varphi'''(0)+\alpha\varphi''(0)=0$；$\varphi_0=0$，$\alpha\varphi_1>0$，$\alpha\varphi_{2n-1}\geqslant 0$，$n=2,3,\cdots$。

假设 A_2　$f(x,t)\in C(\overline{\Omega}_T)\cap C^4[0,1]$；$f(0,t)=f(1,t)$；$f_x(0,t)+\alpha f(0,t)=0$。
$f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)$，$f_{xxx}(0,t)+\alpha f_{xx}(0,t)$；$f_0=0$，$\alpha f_{2n-1}>0$，$n=1,2,\cdots$。

假设 A_3　$E(t)\in C^1[0,T]$；$E'(t)>0$，$E(t)<0$。

假设 A_4　$\chi(t)\in C^1[0,T]$；$\chi(t)>0$，$\chi'(t)>0$。

假设 A_5　$c(t)\in C^1[0,T]$；$c(t)>0$。其中，$\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)\mathrm{d}x$，$f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)\mathrm{d}x$，$k=0,1,\cdots$。

定理 1　假设 $A_1\sim A_5$ 成立，则反问题(1)～(5)存在解属于 Ω_T，$T>0$ 且 $u(x,t)\in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$，存在一个由问题数据确定的正数 T_0，使得反问题(1)～(5)的解唯一，$0<T\leqslant T_0$。

证明　对任意的 $a(t)\in C[0,T]$，反问题(1)～(5)的解可写成

$$u(x,t)=u_0(t)X_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[u_{2n}(t)X_{2n}(x)+u_{2n-1}(t)X_{2n-1}(x)]。\tag{9}$$

通过 Fourier 方法可看出 $u_k(t)$，$k=0,1,\cdots$ 满足可数个线性方程组

$$u_k'(t)+(\lambda_k a(t)+c(t))u_k(t)=f_k(t),u_k(0)=\varphi_k,\tag{10}$$

其中，λ_k，$k=0,1,2,\cdots$ 是系统(6)的特征值。可得(10)的解为

$$u_0(t)=0,u_k(t)=\varphi_k \mathrm{e}^{\int_0^t-(\lambda_k a(\tau)+c(\tau))\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_k(s)\mathrm{e}^{\int_s^t-(\lambda_k a(\tau)+c(\tau))\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s,k=1,2,\cdots。$$

其中，$\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)\mathrm{d}x$，$f_k=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)\mathrm{d}x$，$k=0,1,2,\cdots$。

在假设 A_1、假设 A_2 和假设 A_5 下，对所有的 $(x,t)\in\overline{\Omega}_T$，级数(9)的上界为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+|\alpha|)|\varphi_k^{(2)}|+T(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+|\alpha|)F_k^{(2)}}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}\right),\tag{11}$$

其中，$F_k^{(i)}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^1\frac{\partial^i f(x,t)}{\partial x^i}Y_k(x)\mathrm{d}x\right|$，$\varphi_k^{(i)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}^i\varphi(x)}{\mathrm{d}x^i}\mathrm{d}x$，$k=1,2,\cdots,i=0,1,2,3,4$。

利用引理 2、Schwarz 不等式和 P 级数判别法，可知优化级数(11) 收敛。通过 Weierstrass 判别法，级数(9) 在矩形$\overline{\Omega}_T$ 中一致收敛。因此 $u(x,t)$ 在矩形$\overline{\Omega}_T$ 中连续。进一步，可分别研究由级数(9) 逐项微分得到的级数。

x -偏导数的优化级数是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(1+\lambda_k^{\frac{1}{2}}\mid\alpha\mid)\mid\varphi_k^{(4)}\mid+T(1+\lambda_k^{\frac{1}{2}}\mid\alpha\mid)F_k^{(2)}}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}\right),\tag{12}$$

xx -偏导数的优化级数是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+\mid\alpha\mid)\mid\varphi_k^{(4)}\mid+T(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+\mid\alpha\mid)F_k^{(4)}}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}\right),\tag{13}$$

t -偏导数的优化级数是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+\mid\alpha\mid)\mid(\lambda_k\overline{m}+\overline{n})\mid\mid\varphi_k^{(4)}\mid+T(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+\mid\alpha\mid)\mid(\lambda_k\overline{m}+\overline{n})F_k^{(4)}}{\lambda_k^{\frac{5}{2}}}+\frac{(\lambda_k^{\frac{1}{2}}+\mid\alpha\mid)F_k^{(2)}}{\lambda_k^{\frac{3}{2}}}\right),\tag{14}$$

其中，$\overline{m}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}a(t)$，$\overline{n}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}c(t)$。

利用引理 2、Schwarz 不等式和 P 级数判别法，可证明级数(12) ～ (14) 收敛。由 Weierstrass 判别法知，级数(12) ～ (14) 在矩形$\overline{\Omega}_T$ 中一致收敛。因此 $u(x,t)\in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T)$。

现在证明扩散系数 $a(t)>0$ 的存在性。由于 $u_t(x,t)$ 在矩形$\overline{\Omega}_T$ 中连续，在假设 $A_4\sim A_5$ 下方程(5) 微分可得

$$\int_0^1\chi'(t)u(x,t)+\chi(t)u_t(x,t)\mathrm{d}x=E'(t)。\tag{15}$$

将式(9) 代入式(15) 可得 $a(t)=G[a(t)]$，其中

$$G[a(t)]=\frac{E'(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\chi(t)f_{2n-1}(t)+(\chi'(t)-\chi(t)c(t))u_{2n-1}(t))}{\chi(t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\alpha[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s]}。$$

现在，可求解算子 $a(t)=G[a(t)]$ 的上下界。由假设的条件和不等式 $\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\leqslant 1$，$n=1,2,\cdots$ 可得 $a(t)\geqslant\frac{\beta_1}{\beta_0}>0$，$0\leqslant t\leqslant T$，其中

$$\beta_0=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha(\varphi_{2n-1}+\int_0^T f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s),$$

$$\beta_1=\min_{0\leqslant t\leqslant T}[E'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha(\chi(t)f_{2n-1}(t)+(\chi'(t)-\chi(t)c(t))u_{2n-1}(t))]。$$

为了得到 $a(t)$ 的上界，考虑

$$a(t)\leqslant\frac{\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}[E'(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\chi(t)f_{2n-1}(t)+(\chi'(t)-\chi(t)c(t))u_{2n-1}(t))]}{\chi(t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s]},$$

由于

$$E(t)=-\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s],$$

可得 $0 < a(t) \leqslant \frac{\beta_2}{\beta_3} < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T$,其中

$$\beta_2 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}[E'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\chi(t) f_{2n-1}(t) + (\chi'(t) - \chi(t)c(t))u_{2n-1}(t))], \beta_3 = \min_{0\leqslant t\leqslant T}(-E(t))。$$

考虑连续函数集合 $M = \{a(t) \in C[0,T]: 0 < \frac{\beta_1}{\beta_0} \leqslant a(t) \leqslant \frac{\beta_2}{\beta_3}\}$,可看出算子 G 将集合 M 映射到自身,即 $G: M \to M$。进一步,可证明算子 G 是一致有界的和等度连续的。设集合 M_1 是集合 M 的任意有界子集。由于 $G(M_1) \subset M$,则 $G(M_1)$ 是一致有界的。取任一连续函数 $a(t) \in M$ 和任意两点 $t_1, t_2 \in [0,T]$。从算子的定义可得

$$|G(a(t_1)) - G(a(t_2))| \leqslant \frac{|K(t_1) - K(t_2)|}{N(t_2)} + \frac{|K(t_1)(N(t_1) - N(t_2))|}{N(t_1)N(t_2)}, \tag{16}$$

其中,

$$K(t) = E'(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\mu_n^2}\chi(t) f_{2n-1}(t) + (\chi'(t) - \chi(t)c(t))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}u_{2n-1}(t),$$

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(t)2\alpha[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s]。$$

有

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leqslant (\beta_4 + \frac{\beta_2}{\beta_3}\beta_5 + \bar{n}\beta_0 + \beta_6)|t_1 - t_2|, \tag{17}$$

其中,

$$\beta_4 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\chi'(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha[\varphi_{2n-1} + \int_0^T f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s],$$

$$\beta_5 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\mu_n^2[\varphi_{2n-1} + \int_0^T f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s], \beta_6 = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha f_{2n-1}(t)。$$

由于 $K(t)$ 在闭集 $[0,T]$ 内连续,那么对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta_1 = \delta(\varepsilon) > 0$,对全部 $t_1, t_2 \in [0,T]$,当 $|t_1 - t_2| < \delta_1$ 时,$|K(t_1) - K(t_2)| < \beta_3\frac{\varepsilon}{2}$。选取 $\delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \frac{\beta_3^3}{\beta_2(\beta_2\beta_5 + \beta_3(\beta_4 + \bar{n}\beta_0 + \beta_6))}\}$,当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时,由不等式(17)可得

$$|N(t_1) - N(t_2)| < \frac{\beta_3^3}{2\beta_2}\varepsilon。 \tag{18}$$

由不等式(16)～(18)得,对全部 $t_1, t_2 \in [0,T]$,当 $|t_1 - t_2| < \delta$ 时,有 $|G(a(t_1)) - G(a(t_2))| < \varepsilon$,这证明集合 $G(M_1)$ 是等度连续的。因此,集合 $G(M_1)$ 是紧集,算子 G 是紧的,并且将集合 M 映射到它自身,利用 Schauder 不动点定理,有 $a(t) \in C[0,T]$。

现已证明解 (a,u) 的存在性,下面证明解 (a,u) 的唯一性。假设反问题(1)～(5)存在两个解 (a,u) 和 (b,v),由方程(9)与算子 $a(t) = G[a(t)]$,得

$$u(x,t) - v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_k a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau} - \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_k b(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau})X_k(x) +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(s)(\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_k a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau} - \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_k b(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau})\mathrm{d}sX_k(x), \tag{19}$$

$$a(t) - b(t) = G(a(t)) - G(b(t))。 \tag{20}$$

设

$$P(a(t)) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(t)2\alpha[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s],$$

$$Q(a(t)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau} + \int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s],$$

那么

$$|G(a(t))-G(b(t))|\leqslant\frac{E'(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\chi(t)f_{2n-1}(t)}{P(a(t))P(b(t))}|P(b(t))-P(a(t))|+$$

$$\frac{|\chi'(t)-\chi(t)c(t)|}{P(a(t))P(b(t))}|Q(a(t))|P(b(t))-P(a(t))|-P(a(t))|Q(a(t))-Q(b(t))||。$$

由估计

$$|\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}b(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant|\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau}|\mathrm{e}^{-\int_s^t c(\tau)\mathrm{d}\tau}\leqslant\mu_n^2T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|a(t)-b(t)|$$

可得

$$|P(a(t))-P(b(t))|\leqslant\beta_5T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|a(t)-b(t)|,|Q(a(t))-Q(b(t))|\leqslant\beta_6T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|a(t)-b(t)|,$$

其中，$\beta_6=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\alpha[\varphi_{2n-1}+\int_0^T f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s]$。有

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}|G(a(t))-G(b(t))|\leqslant(\frac{\beta_7}{\beta_3^2}\beta_5+\frac{\beta_8}{\beta_3^2}(\beta_9\beta_5+\beta_{10}\beta_6))T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|a(t)-b(t)|,\tag{21}$$

其中，

$$\beta_7=\max_{0\leqslant t\leqslant T}E'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\chi(t)f_{2n-1}(t),\beta_8=\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\chi'(t)-\chi(t)c(t)|,$$

$$\beta_9=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}[\varphi_{2n-1}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s],\beta_{10}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(t)2\alpha[\varphi_{2n-1}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{d}s]。$$

表示 $\beta(T)=(\frac{\beta_7}{\beta_3^2}\beta_5+\frac{\beta_8}{\beta_3^2}(\beta_9\beta_5+\beta_{10}\beta_6))T$，选择固定的正整数 T_0，使得$(\frac{\beta_7}{\beta_3^2}\beta_5+\frac{\beta_8}{\beta_3^2}(\beta_9\beta_5+\beta_{10}\beta_6))T_0<1$，即对任意的 $T\in(0,T_0]$，不等式 $\beta(T)<1$ 都成立。

由式(20)(21)易得 $\|a-b\|_{C[0,T]}\leqslant\beta(T)\|a-b\|_{C[0,T]}$，则 $a(t)=b(t)$。将 $a(t)=b(t)$ 代入式(19)，可得 $u(x,t)=v(x,t)$。定理证毕。

1.3 解的 Lipschitz 稳定性

定理 2 设数据$\{f,\varphi,E,c,\chi\}$满足假设 $A_1\sim A_5$ 和

$$\|f\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}\leqslant N_1,\|\varphi\|_{C^4[0,1]}\leqslant N_2,\|E\|_{C^1[0,T]}\leqslant N_3,\|C\|_{C[0,1]}\leqslant N_4,\|\chi\|_{C^1[0,1]}\leqslant N_5。$$

那么反问题(1)～(5)的解(a,u)连续地依赖于足够小的数据 T。

证明 考虑数据(f,φ,E,c,χ)和$\{\tilde{f},\tilde{\varphi},\tilde{E},\tilde{c},\tilde{\chi}\}$满足定理的假设，设反问题(1)～(5)的解$(a,u)$和$(\tilde{a},\tilde{u})$分别对应于$(f,\varphi,E,c,\chi)$和$\{\tilde{f},\tilde{\varphi},\tilde{E},\tilde{c},\tilde{\chi}\}$，根据算子 $a(t)=G[a(t)]$，有

$$a(t)=\frac{E'(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\chi(t)f_{2n-1}(t)+(\chi'(t)-\chi(t)c(t))u_{2n-1}(t))}{\chi(t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\alpha[\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s]},$$

$$\tilde{a}(t)=\frac{\tilde{E}'(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\tilde{\chi}(t)\tilde{f}_{2n-1}(t)+(\tilde{\chi}'(t)-\tilde{\chi}(t)\tilde{c}(t))\tilde{u}_{2n-1}(t))}{\tilde{\chi}(t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\alpha[\tilde{\varphi}_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t\tilde{f}_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s]}。$$

其中，

$$u_{2n-1}(t)=\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{u}_{2n-1}(t)=\tilde{\varphi}_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_0^t\tilde{f}_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t\lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s。$$

首先对 $a-\tilde{a}$ 进行估计，可得

$$|E'(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{\varphi}_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}-\tilde{E}'(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant$$

$$|E'(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{\varphi}_{2n-1}(\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau})+\tilde{E}'(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}(\tilde{\varphi}_{2n-1}-\varphi_{2n-1})\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+$$

$$\tilde{E}'(t)(\tilde{\chi}(t)-\chi(t))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}+(\tilde{E}'(t)-E'(t))\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|。$$

由于

$$|\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant\frac{|\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}|}{\mathrm{e}^{\int_0^t \tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}^{\int_0^t c(\tau)\mathrm{d}\tau}}\leqslant$$

$$|\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant|\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)\mathrm{d}\tau}-\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)\mathrm{d}\tau}|\mathrm{e}^{TN_4}\leqslant\mu_n^2 T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\tilde{a}(t)-a(t)|\mathrm{e}^{TN_4},$$

利用定理 2 的假设，有估计

$$|E'(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{\varphi}_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}-\tilde{E}'(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\varphi_{2n-1}\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant$$

$$2|\alpha|(T\mathrm{e}^{TN_4}N_2N_3N_5\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}+N_3N_5\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4[0,T]}+$$

$$N_2N_3\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]}+N_2N_5\|E-\tilde{E}\|_{C^1[0,T]})。$$

以此类推，有估计

$$|E'(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\int_0^t\tilde{f}_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}\tilde{a}(\tau)+\tilde{c}(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s-\tilde{E}'(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\int_0^t f_{2n-1}(s)\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_{2n-1}a(\tau)+c(\tau)\mathrm{d}\tau}|\leqslant$$

$$2|\alpha|T(T\mathrm{e}^{TN_4}N_1N_3N_5\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}+N_3N_5\|f-\tilde{f}\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}+$$

$$N_1N_5\|E-\tilde{E}\|_{C^1[0,T]}+N_1N_3\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]}),$$

$$|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\chi(t)f_{2n-1}(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\tilde{u}_{2n-1}(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{\chi}(t)\tilde{f}_{2n-1}(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha u_{2n-1}(t)|\leqslant$$

$$4\alpha^2T\mathrm{e}^{TN_4}N_1N_5^2(N_2+TN_1)\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}+4\alpha^2N_5^2(N_2+2TN_1)\|f-\tilde{f}\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}+$$

$$4\alpha^2N_1N_5^2\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4[0,T]}+2\alpha N_5N_1(N_2+N_1)\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]},$$

$$|\chi'(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}u_{2n-1}(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\tilde{u}_{2n-1}(t)-\tilde{\chi}'(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{u}_{2n-1}(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha u_{2n-1}(t)|\leqslant$$

$$8\alpha^2N_5(N_2^2+2TN_1N_2+T^2N_1^2)(T\mathrm{e}^{TN_4}N_5\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}+\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]})+$$

$$8\alpha^2N_5^2(N_2+TN_1)(T\|f-\tilde{f}\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4[0,T]}),$$

$$|\chi(t)c(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}u_{2n-1}(t)\tilde{\chi}(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha\tilde{u}_{2n-1}(t)-\tilde{\chi}(t)\tilde{c}(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\mu_n^2}\tilde{u}_{2n-1}(t)\chi(t)\sum_{n=1}^{\infty}2\alpha u_{2n-1}(t)|\leqslant$$

$$4\alpha^2N_5(N_2^2+2TN_1N_2+T^2N_1^2)(2T\mathrm{e}^{TN_4}N_4N_5\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}+2N_4\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]}+$$

$$N_5\|c-\tilde{c}\|_{C[0,T]})+8\alpha^2N_4N_5^2(N_2+TN_1)(T\|f-\tilde{f}\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}+\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4[0,T]})。$$

由以上估计，整理得

$$(1-M_1)\|a-\tilde{a}\|_{C[0,T]}\leqslant M_2(\|f-\tilde{f}\|_{C^{4,0}[\bar{\Omega}_T]}+\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{C^4[0,T]}+\|E-\tilde{E}\|_{C^1[0,T]}+$$

$$\|c-\tilde{c}\|_{C[0,T]}+\|\chi-\tilde{\chi}\|_{C^1[0,T]})。$$

由于 M_1 依赖于 T，不等式 $M_1 < 1$ 对足够小的 T 成立，因此所求结果是 $M = \frac{M_2}{(1-M_1)}$，对方程(9)，可利用以上方法得到类似的估计 $u - \tilde{u}$。定理证明完毕。

2 数值方法

在本节中，描述了应用于反问题(1)～(5)的数值方法，用 Matlab 实现数值方法。首先，将矩阵$[0,1]\times[0,T]$细分为 $M\times N$ 个网格，空间步长 $h=\frac{1}{M}$，时间步长 $k=\frac{T}{N}$。然后，添加一条线 $x=-h$，生成非局部边界条件(4)中处理混合边界条件所需的虚点。由于方程(1)是一个热方程，故有限差分法一个很好的选择是 Crank - Nicolson 格式。Crank - Nicolson 格式具有无条件的稳定性和特点，并且在 h,k 中是二阶精度的。在本节中，利用以下符号：对函数 $F(x,t)$，$F_{i,j}=F(ih,jk)$；对函数 $F(x)$，$F_i=F(ih)$；对函数 $F(t)$，$F_j=F(jk)$；同时，用 $v_{i,j}$ 表示 $u_{i,j}=u(ih,jk)$ 的有限差分逼近，反问题(1)～(5)的 Crank - Nicolson 格式为

$$\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{k}=\frac{1}{4h^2}(a_{j+1}+a_j)[(v_{i+1,j+1}-2v_{i,j+1}+v_{i-1,j+1})+(v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j})]+\frac{1}{2}(c_{j+1}+c_j)v_{i,j}+\frac{1}{2}(f_{i,j+1}+f_{i,j}), \tag{22}$$

$$v_{i,0}=\varphi_j, v_{0,j}=v_{M,j}, v_{-1,j}=2\alpha h v_{0,j}+v_{1,j}, \tag{23}$$

其中，$0\leqslant i\leqslant M$，$0\leqslant j\leqslant N$ 分别是时间步长和空间步长的指标。在初始时刻 $t=0$ 时，应根据初始条件和兼容性要求进行调整。

对 $0\leqslant i\leqslant M$，$0\leqslant j\leqslant N-1$，差分格式(22)(23)给出了 $M+1$ 个未知数 $v_{i,j+1}$ 的 $M+1$ 个联立方程。因此，当 $0\leqslant j\leqslant N-1$ 时，对每个时间步长 t_{j+1}，上述差分方程可表述为$(M+1)\times(M+1)$个方程组，形式为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{j+1}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^j+\boldsymbol{f}^j$。其中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1+2R_j-2\alpha hR_j & -2R_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -R_j & 1+2R_j & -R_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_j & 1+2R_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -R_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2R_j & -R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -R_j & 1+2R_j & -R_j \\ 0 & -2R_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+2R_j-2\alpha hR_j \end{pmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1-2R_j+2\alpha hR_j-C_j & 2R_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ R_j & 1-2R_j-C_j & R_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_j & 1-2R_j-C_j & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2R_j-C_j & R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_j & 1-2R_j-C_j & R_j \\ 0 & 2R_j & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-2R_j+2\alpha hR_j-C_j \end{pmatrix}_{(M+1)\times(M+1)},$$

$$R_j=\frac{k}{4h^2}(a_{j+1}+a_j), C_j=\frac{k}{2}(c_{j+1}+c_j), \boldsymbol{v}^j=(v_{0,j},v_{1,j},\cdots,v_{M,j})^{\mathrm{T}}_{(M+1)\times 1},$$

$$\boldsymbol{f}^j=\left(\frac{k}{2}(f_{0,j+1}+f_{0,j}),\cdots,\frac{k}{2}(f_{M-1,j+1}+f_{M-1,j}),\frac{k}{2}(f_{0,j+1}+f_{0,j})\right)^{\mathrm{T}}_{(M+1)\times 1}。$$

现在，构造预测-矫正迭代法，并描述如推进计算。首先，在方程(1) 左右两边同乘以 $\chi(t)$，再关于 x 从 0 到 1 进行积分，根据方程(5)，有

$$a(t)=\frac{E'(t)\chi(t)-\chi'(t)E(t)+\chi(t)c(t)E(t)-\chi^2(t)\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x}{\chi^2(t)(u_x(1,t)-u_x(0,t))}。\tag{24}$$

进一步，用梯度方法离散积分，对分母上的导数进行前、后差分，再利用差分格式 $v_{-1,j}=2\alpha h v_{0,j}+v_{1,j}$ 得到方程(24) 的有限差分形式

$$a_j=\frac{\frac{1}{4}(c_{j+1}+c_j)(E_{j+1}+E_j)+\frac{1}{k}(E_{j+1}-E_j)}{\frac{1}{2h}(\chi_{j+1}+\chi_j)[2v_{0,j}-v_{1,j}-v_{M-1,j}]}-$$

$$\frac{\frac{1}{2k}(\chi_{j+1}-\chi_j)(E_{j+1}+E_j)}{\frac{1}{4h}(\chi_{j+1}+\chi_j)^2[2v_{0,j}-v_{1,j}-v_{M-1,j}]}-\frac{fin(j)}{\frac{1}{h}[2v_{0,j}-v_{1,j}-v_{M-1,j}]},\tag{25}$$

其中，$c_j=c(jk)$，$\chi_j=\chi(jk)$，$E_j=E(jk)$，$fin(j)=h[\frac{f_{0,j}}{2}+\sum_{i=1}^{M-1}f_{i,j}+\frac{f_{M,j}}{2}]$，$f_{i,j}=f(ih,jk)$。

利用相容性条件，由方程(24) 得

$$a_0=\frac{\frac{1}{4}(c_1+c_0)(E_1+E_0)+\frac{1}{k}(E_1-E_0)}{\frac{1}{2h}(\chi_1+\chi_0)[2\varphi_0-\varphi_1-\varphi_{M-1}]}-\frac{\frac{1}{2k}(\chi_1-\chi_0)(E_1+E_0)}{\frac{1}{4h}(\chi_1+\chi_0)^2[2\varphi_0-\varphi_1-\varphi_{M-1}]}h\frac{fin(0)}{[2\varphi_0-\varphi_1-\varphi_{M-1}]}\approx$$

$$\frac{c(0)E(0)+E'(0)}{\chi(0)(\varphi'(1)-\varphi'(0))}-\frac{\chi'(0)E(0)}{\chi^2(0)(\varphi'(1)-\varphi'(0))}-\frac{\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x}{\varphi'(1)-\varphi'(0)}。$$

由于 $\varphi(x)$ 已知，故可求出 a_0 的值。为了求解在 j 时间层的方程 $Av^{j+1}=Bv^j+f^j$，需要对 a_{j+1} 进行预测。因为在实际计算中时间步长很小，可将 a_{j+1} 的值看成 a_j 的值。因此，可将 a_{j+1} 的第一个良好的初始预测记为 $a_{j+1(0)}$，即 $a_{j+1(0)}=a_j$，$j=0,1,2,\cdots$。

由 $a_{j+1(0)}$，a_j 可解线性方程 $Av^{j+1}=Bv^j+f^j$，可解出对应 $a_{j+1(0)}$ 的一组解 $v_{i,j+1(0)}$，$i=0,1,2,\cdots,M$。用 $a_{j+1(s)}$ 表示 $a(t)$ 在 $j+1$ 时间层第 s 次预测，$v_{i,j+1(s)}$ 表示由 $a_{j+1(s)}(j=0,1,2,\cdots,N-1;s=0,1,2,\cdots)$ 得到的对应一组解。确定 $a_{j+1(s)}$，$v_{i,j+1(s)}$ 为合理的近似值前要进行一些修改，可利用方程(25) 得

$$a_{j+1(s+1)}=\frac{\frac{1}{4}(c_{j+1}+c_j)(E_{j+1}+E_j)+\frac{1}{k}(E_{j+1}-E_j)}{\frac{1}{2h}(\chi_{j+1}+\chi_j)[2v_{0,j+1(s)}-v_{1,j+1(s)}-v_{M-1,j+1(s)}]}-$$

$$\frac{\frac{1}{2k}(\chi_{j+1}+\chi_j)(E_{j+1}-E_j)}{\frac{1}{4h}(\chi_{j+1}+\chi_j)^2[2v_{0,j+1(s)}-v_{1,j+1(s)}-v_{M-1,j+1(s)}]}-\frac{fin(j)}{\frac{1}{h}[2v_{0,j+1(s)}-v_{1,j+1(s)}-v_{M-1,j+1(s)}]},$$

也可由差分格式(22)得

$$\frac{v_{i,j+1(s+1)}-v_{i,j}}{k}=\frac{1}{4h^2}(a_{j+1(s+1)}+a_j)[(v_{i+1,j+1(s+1)}-2v_{i,j+1(s+1)}+v_{i-1,j+1(s+1)})+$$

$$(v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j})]+\frac{1}{2}(c_{j+1}+c_j)v_{i,j}+\frac{1}{2}(f_{i,j+1}+f_{i,j}),\tag{26}$$

$$v_{i,0}=\varphi_i,v_{0,j}=v_{M,j},v_{-1,j}=2\alpha h v_{0,j}+v_{1,j}。\tag{27}$$

采用高斯消去法可解出系统(26)(27),得到对应于 $a_{j+1(s+1)}$ 的一组解 $v_{i,j+1(s+1)}$,其中,$s=0,1,\cdots$,$i=0,1,\cdots,M$。对于给定的公差 $\varepsilon>0$,如果收敛标准 $|a_{j+1(s+1)}-a_{j+1(s)}|\leqslant\varepsilon$, $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant M}|v_{i,j+1(s+1)}-v_{i,j+1(s)}|\leqslant\varepsilon$ 成立,则接受 $a_{j+1(s+1)}$,$v_{i,j+1(s+1)}$,$i=0,1,\cdots,M$ 作为时间层上对应的 a_{j+1},$v_{i,j+1}$,$i=0,1,\cdots,M$。通过这种迭代,可由第 j 层的数据计算第 $j+1$ 层的数据。

3 数值实验及结果

给出两个例子说明预测-矫正迭代法和 Crank - Nicoloson 有限差分格式相结合方法的准确性和稳定性,并讨论它们的结果。

算例 1 考虑反问题(1)～(5)在 $T=1$ 时的情况。取输入数据

$$f(x,t)=2(1+t)\exp(t)+(1+t+t^2)(1+x-x^2),\chi(t)=1+t,$$

$$c(t)=t,\varphi(x)=1+x-x^2,E(t)=\frac{7}{6}(1+t)^2,$$

且服从 $\alpha=-1$ 时的边界条件(3)。可计算出 $u(x,t)$ 和 $a(t)$ 的精确值为

$$u(x,t)=(1+t)(1+x-x^2),a(t)=\exp(t)。$$

利用第 2 节中的数值方法,取空间步长和时间步长为 $h=k=0.01$,并选择迭代收敛准则为

$$|a_{j+1(s+1)}-a_{j+1(s)}|<h^3,\max_{0\leqslant i\leqslant M}|v_{i,j+1(s+1)}-v_{i,j+1(s)}|<h^3,$$

可得一个非常快速的收敛。一般来说,需要 2～3 次修改,就能得到一个比较合适的 a_{j+1} 和 $v_{i,j+1}$。图 1(a)展示了 $a(t)$ 的精确解和比较近似的数值解,可看出数值解与精确解有很好的一致性。

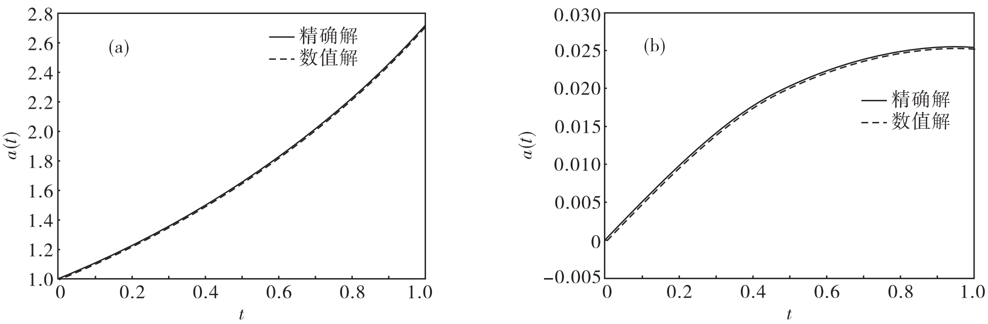

图 1 $a(t)$ 的精确解和数值解

算例 2 同样考虑在 $T=1$ 时的反问题(1)～(5)。取输入数据

$$f(x,t)=\frac{2t}{\pi}\cos(2\pi x)-5xt\sin(2\pi x),\chi(t)=t,c(t)=\frac{t}{1+t^2},\varphi(x)=-x\sin(2\pi x),E(t)=\frac{t+t^3}{2\pi},$$

且服从边界条件 $\alpha=-2$ 的边界条件(3)。易得 $u(x,t)$ 和 $a(t)$ 的精确值为

$$u(x,t)=-(1+t^2)x\sin(2\pi x),a(t)=\frac{t}{2\pi^2(1+t^2)}。$$

并取 $h=k=0.005$ 和迭代的收敛准则为

$$|a_{j+1(s+1)}-a_{j+1(s)}|<h^3,\max_{0\leqslant i\leqslant M}|v_{i,j+1(s+1)}-v_{i,j+1(s)}|<h^3。$$

由第 2 节的数值方法,可得到一个非常快速的收敛,只需要迭代两次,就能得到符合收敛准则的数值解。图 1(b)是 $a(t)$ 的精确解和比较近似的数值解,由 $a(t)$ 的数值解可得 $u(x,t)$ 的数值解,同样可看出数值解与精确解有很好的一致性。

参 考 文 献:

[1] 姜礼尚,陈亚浙,刘西垣,等.数学物理方程讲义[M].北京:高等教育出版社,2007.

[2] 刘继军.不适定问题的正则化方法及应用[M].北京:科学出版社,2005.

[3] 韩波,李莉.非线性不适定问题的求解方法及其应用[M].北京:科学出版社,2011.

[4] 伍卓群,尹景学,王春朋.椭圆与抛物型方程引论[M].北京:科学出版社,2003.

[5] KAMYNIN V L,KOSTIN A B. Two inverse problems of finding a coefficient in a parabolic equation[J]. Differential equations,2010,46(3):375-386.

[6] LESNIC D,YOUSEFI S A,IVANCHOV M. Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions[J]. Journal of applied mathematics and computing,2013,41(1/2):301-320.

[7] ISMAILOV M I,OǦUR B. An inverse diffusion problem with nonlocal boundary conditions[J]. Numerical methods for partial differential equations,2016,32(2):564-590.

[8] HELMER K G,DARDZINSKI B J,SOTAK C H. The application of porous-media theory to the investigation of time-dependent diffusion in *in vivo* systems[J]. NMR in biomedicine,1995,8(7/8):297-306.

[9] MOITSHEKI R J. Transient heat diffusion with temperature-dependent conductivity and time-dependent heat transfer coefficient[J]. Mathematical problems in engineering,2008,2008:Article ID 347568. DOI:10.1155/2008/347568.

[10] ERGATIS P E,MASSOUROS P G,ATHANASOULI G C,et al. Time-dependent heat transfer coefficient of a wall[J]. International journal of energy research,2003,27(9):795-811.

[11] HAZANEE A,LESNIC D. Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation [J]. International journal of mechanical sciences,2014,88:259-266.

[12] SHAMSI M,DEHGHAN M. Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation from over-specified boundary data using the pseudospectral Legendre method[J]. Numerical methods for partial differential equations,2007,23(1):196-210.

An Inverse Heat Conduction Problem under Nonlocal Boundary Conditions

WANG Qian

(*School of Mathematics and Physics*,*Lanzhou Jiaotong University*,*Lanzhou* 730070,*China*)

Abstract:A class of inverse heat conduction problem under nonlocal boundary conditions is studied. Since the inverse problem is ill-posed,the additional over-determined condition has been required. The characteristic function system is constructed by separating variables,and the general form of the solution is determined by the auxiliary spectral theory and Fourier method. The existence of the solution is proved by series convergence criterion and Schauder fixed point theorem,and the uniqueness and stability of the solution are proved by estimation. At the same time,the predictive correction iteration method and Crank-Nicoloson finite difference scheme are used to analyze the inversion problem,and numerical examples are discussed.

Keywords:inverse problem;heat conduction equation;auxiliary spectral theory;existence;uniqueness;stability

(责任编辑:贾晶晶)