

【微分方程与动力系统研究】

# 具有媒体影响和治疗函数的 SIR 模型

李一程阳, 张 睿

(兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘 要:** 研究了一类具有媒体影响和饱和治疗函数的 SIR 传染病模型, 计算了基本再生数  $R_0$ , 并分析了模型平衡点的存在性和稳定性。当  $R_0 < R_0^* < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  全局渐近稳定; 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $E_1$  全局渐近稳定。最后, 通过数值分析验证结论。

**关键词:** SIR 模型; 媒体影响; 治疗函数; 全局稳定性

**中图分类号:** O 175      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2022.06.008

## 0 引言

传染病的防控和治疗一直是关系人类健康和社会发展的重大问题之一。在传染病模型研究中, LIU 等研究了一类接触率受媒体影响的 SIR 模型<sup>[1]</sup>, 认为媒体报道通过提高易感人群自我防护意识, 降低了疾病传染率。除此以外, 还有其他媒体报道影响疾病传染率的模型<sup>[2-3]</sup>。在疾病传播期间, 与疾病相关的媒体报道逐渐增加, 人们可以及时建立起防范意识, 做好自身保护措施, 进而有效预防疾病传播。同时, 治疗也是控制疾病传播的一个重要手段, 但在实际情况中, 医疗资源往往是具有限制的, 所以感染者的治愈率也受到一定影响, 在传染病模型中加入饱和治疗函数更具有现实意义<sup>[4-6]</sup>。

## 1 建立模型

研究具有媒体影响和饱和治疗函数的 SIR 模型的动力学性态, 建立模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI - dS, \\ \frac{dI}{dt} = (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI - \gamma I - \frac{\beta_2 I}{1+bI} - dI - \alpha I, \\ \frac{dR}{dt} = \frac{\beta_2 I}{1+bI} + \gamma I - dR. \end{cases} \quad (1)$$

此传染病传播过程如图 1 所示。模型(1)中的符号均为正的常数;  $S(t), R(t), I(t)$  分别表示  $t$  时刻的易感者、感染者和康复者;  $A$  为易感者的常数输入率,  $\gamma$  为自然恢复率,  $d$  为自然死亡率,  $\alpha$  为因病死亡率,  $\beta$  为媒体未影响疾病传播前的接触率;  $\beta_1 I/(v+I)$  表示媒体报道后导致传染病减少量, 传染病减少量的最大值是  $\beta_1$ ;  $v$  是公众对疾病发生后的反应速度,  $\beta_2 I/(1+bI)$  是饱和治疗函数。

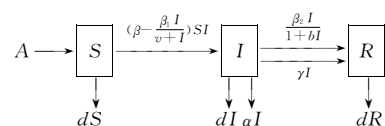


图 1 系统(1)的传染机制图

收稿日期: 2022-04-14

第一作者简介: 李一程阳(1998—), 女, 陕西西安人, 硕士研究生, 主要从事生物数学研究。

E-mail: 1452057609@qq.com

## 2 基本再生数和平衡点的存在性

在生态意义下, 模型(1)中的各个变量和参数均为非负数, 故模型(1)在空间  $\mathbf{R}_+^3 = \{(S, I, R) \in \mathbf{R}^3 : S > 0, I \geq 0, R \geq 0\}$  中进行讨论。

应用下一代矩阵法<sup>[7]</sup>计算模型(1)的基本再生数, 将系统(1)写成  $\frac{dx}{dt} = F(x) - V(x)$  的形式, 其中

$$F(x) = \begin{pmatrix} (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V(x) = \begin{pmatrix} \gamma I + \frac{\beta_2 I}{1+bI} + dI + \alpha I \\ -\frac{\beta_2 I}{1+bI} - \gamma I + dR \\ -A + (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI + dS \end{pmatrix},$$

则

$$DF(x)|_{E_0} = \begin{pmatrix} \frac{A\beta}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, DV(x)|_{E_0} = \begin{pmatrix} \beta_2 + \gamma + d + \alpha & 0 & 0 \\ -\beta_2 - \gamma & d & 0 \\ \frac{A\beta}{d} & 0 & d \end{pmatrix},$$

由于模型(1)的无病平衡点  $E_0 = (\frac{A}{d}, 0, 0)$ , 则基本再生数  $R_0 = \frac{\beta A}{d(\beta_2 + \gamma + d + \alpha)}$ 。

**定理 1** 模型(1)总是存在一个无病平衡点  $E_0 = (\frac{A}{d}, 0, 0)$ 。当  $R_0 > 1, bvd\beta_2 - A\beta_1 - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)\beta v > 0$  时, 模型(1)存在唯一的非病平衡点  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ 。

**证明** 令模型(1)左端等于零, 得

$$\begin{cases} A - (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI - dS = 0, \\ (\beta - \frac{\beta_1 I}{v+I})SI - \gamma I - \frac{\beta_2 I}{1+bI} - dI - \alpha I = 0, \\ \frac{\beta_2 I}{1+bI} + \gamma I - dR = 0. \end{cases} \quad (2)$$

无病平衡点  $E_0$  存在性显然成立。

由式(2)中第 2 式和第 3 式可得

$$S^* = \frac{[\beta_2 + (\gamma + d + \alpha)(1 + bI^*)](v + I^*)}{[(\beta - \beta_1)I^* + \beta v](1 + bI^*)}, R^* = \frac{\beta_2 I^* + \gamma I^* (1 + bI^*)}{(1 + bI^*)d}.$$

将上式代入式(2)第 1 式, 并进行简化, 可得

$$A_1 I^{*3} + A_2 I^{*2} + A_3 I^* + A_4 = 0, \quad (3)$$

其中

$$A_1 = -b(\gamma + d + \alpha)(\beta - \beta_1), A_2 = [Ab - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)](\beta - \beta_1) - (\gamma + d + \alpha)(\beta v + bd),$$

$$A_3 = (1 + bv)[A\beta - d(\beta_2 + \gamma + d + \alpha)] + bvd\beta_2 - A\beta_1 - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)\beta v, A_4 = A\beta v - dv(\beta_2 + \gamma + d + \alpha).$$

因为  $\beta > \beta_1$ , 则  $A_1 < 0$ , 由  $R_0 > 1, bvd\beta_2 - A\beta_1 - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)\beta v > 0$ , 可得

$$A_4 = A\beta v - dv(\beta_2 + \gamma + d + \alpha) = dv(\beta_2 + \gamma + d + \alpha)(R_0 - 1) > 0,$$

$$A_3 = d(1 + bv)(\beta_2 + \gamma + d + \alpha)(R_0 - 1) + bvd\beta_2 - A\beta_1 - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)\beta v > 0.$$

设方程(3)有 3 个根  $I_1^*, I_2^*, I_3^*$ , 根据一元三次方程的韦达定理可得

$$I_1^* I_2^* I_3^* = -\frac{A_4}{A_1} > 0, I_1^* I_2^* + I_2^* I_3^* + I_1^* I_3^* = \frac{A_3}{A_1} < 0,$$

即方程(3)存在唯一的正根  $I^*$ , 故在  $R_0 > 1, bvd\beta_2 - A\beta_1 - (\beta_2 + \gamma + d + \alpha)\beta v > 0$  时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$ , 其中

$$S^* = \frac{[\beta_2 + (\gamma + d + \alpha)(1 + bI^*)](v + I^*)}{[(\beta - \beta_1)I^* + \beta v](1 + bI^*)}, R^* = \frac{\beta_2 I^* + \gamma I^* (1 + bI^*)}{(1 + bI^*)d}.$$

### 3 平衡点的稳定性分析

**定理 2** 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $E_0 = (\frac{A}{d}, 0, 0)$  局部渐近稳定。

**证明** 模型(1)在  $E_0$  处的 Jacobian 矩阵

$$J|_{E_0} = \begin{pmatrix} -d & -\frac{\beta A}{d} & 0 \\ 0 & \frac{\beta A}{d} - d - \alpha - \gamma - \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma + \beta_2 & -d \end{pmatrix},$$

其对应特征方程  $(\lambda + d)^2 (\lambda - \frac{\beta A}{d} + d + \alpha + \gamma + \beta_2) = 0$ , 因此当  $R_0 < 1$  时, 特征值为

$$\lambda_{1,2} = -d < 0, \lambda_3 = \frac{\beta A}{d} - d - \alpha - \gamma - \beta_2 = (d + \beta_2 + \alpha + \gamma)(R_0 - 1) < 0.$$

根据文献[8], 无病平衡点  $E_0$  局部渐近稳定。

**定理 3** 当  $R_0 < R_0^* < 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  全局渐近稳定。

**证明** 构造 Lyapunov 函数  $V = I$ , 令  $R_0^* = \frac{\beta A}{d(d + \alpha + \gamma)}$ , 有  $R_0 < R_0^* < 1$ , 则

$$V' = I' = (\beta - \frac{\beta_1 I}{v + I})SI - \gamma I - \frac{\beta_2 I}{1 + bI} - dI - \alpha I = -\frac{\beta_1 SI^2}{v + I} - \frac{\beta_2 I}{1 + bI} + [\frac{\beta A}{d} - (d + \alpha + \gamma)]I = -\frac{\beta_1 SI^2}{v + I} - \frac{\beta_2 I}{1 + bI} + (d + \alpha + \gamma)I(R_0^* - 1) < 0,$$

显然当  $I = 0$  时,  $V' = 0$ 。由 Lasalle 不变集原理知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ , 由模型(1)的极限方程可知  $E_0$  是全局吸引, 结合  $E_0$  局部稳定性知,  $E_0$  全局渐近稳定。

(L1)  $H_1 < 0, H_2^2 - 4H_1 H_3 < 0$ 。

**定理 4** 当  $R_0 > 1$ 、条件(L1)成立时, 地方病平衡点  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$  是局部渐近稳定的。

**证明** 模型(1)在  $E_1$  处的 Jacobian 矩阵

$$J|_{E_1} = \begin{pmatrix} -(\beta - \frac{\beta_1 I^*}{v + I^*})I^* - d & -\beta S^* + \frac{2\beta_1 v S^* I^* + \beta_1 S^* I^{*2}}{(v + I^*)^2} & 0 \\ (\beta - \frac{\beta_1 I^*}{v + I^*})I^* & \beta S^* - \frac{2\beta_1 v S^* I^* + \beta_1 S^* I^{*2}}{(v + I^*)^2} - d - \alpha - \gamma - \frac{\beta_2}{(1 + bI^*)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2}{(1 + bI^*)^2} + \gamma & -d \end{pmatrix},$$

其对应特征方程为

$$|\lambda' - J|_{E_1} = \begin{pmatrix} \lambda' + a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & \lambda' + a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & \lambda' + a_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$a_{11} = (\beta - \frac{\beta_1 I^*}{v + I^*})I^* + d, a_{12} = \beta S^* - \frac{2\beta_1 v S^* I^* + \beta_1 S^* I^{*2}}{(v + I^*)^2}, a_{21} = -(\beta - \frac{\beta_1 I^*}{v + I^*})I^*,$$

$$a_{22} = -\beta S^* + \frac{2\beta_1 v S^* I^* + \beta_1 S^* I^{*2}}{(v + I^*)^2} + d + \alpha + \gamma + \frac{\beta_2}{(1 + bI^*)^2}, a_{32} = -\frac{\beta_2}{(1 + bI^*)^2} - \gamma, a_{33} = d.$$

此时特征方程可写为

$$(\lambda' + a_{33})[(\lambda' + a_{11})(\lambda' + a_{22}) - a_{12}a_{21}] = 0. \tag{4}$$

以上各元素已知  $a_{11}, a_{33} > 0, a_{21}, a_{32} < 0$ , 假设函数  $f(I^*) = H_1 I^{*2} + H_2 I^* + H_3$ , 其中

$$H_1 = [\beta_2 b(\beta - \beta_1) - \beta_1 b v(d + \alpha + \gamma)], H_2 = 2\beta_1 b v[(\beta - \beta_1) - (d + \alpha + \gamma)],$$

$$H_3 = (\beta b v - \beta_1)[\beta_2 v + v(d + \alpha + \gamma)] - \beta v^2(d + \alpha + \gamma),$$

当条件(L1)成立时, 则有  $f(I^*) < 0$ , 此时  $a_{22} > 0$ .

由方程(4)可知  $\lambda'_1 = -a_{33} < 0$ , 故可根据方程  $(\lambda' + a_{11})(\lambda' + a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$ , 判断其余两个特征值  $\lambda'_2, \lambda'_3$ . 通过计算得到  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ , 则  $\Delta_1 = a_{11} + a_{22} > 0, \Delta_2 = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) > 0$ , 根据 Hurwitz 准则<sup>[9]</sup>, 当  $R_0 > 1$  且(L1)成立时, 方程(4)的所有特征根具有负实部,  $E_1$  局部渐近稳定.

**定理 5** 当  $R_0 > 1$  且条件(L1)成立时, 地方病平衡点  $E_1 = (S^*, I^*, R^*)$  是全局渐近稳定的.

**证明** 由于模型(1)中的第 1、第 2 方程不含  $R$ , 可将模型(1)简化为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - (\beta - \frac{\beta_1 I}{v + I})SI - dS, \\ \frac{dI}{dt} = (\beta - \frac{\beta_1 I}{v + I})SI - \gamma I - \frac{\beta_2 I}{1 + bI} - dI - \alpha I. \end{cases} \tag{5}$$

模型(5)和模型(1)的初始条件相同, 其动力学性态的研究一致,  $D = \{(S, I) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq S + I \leq \frac{A}{d}, S \geq 0, I \geq 0\}$  是模型(5)的正向不变集.

令

$$F(S, I) = A - (\beta - \frac{\beta_1 I}{v + I})SI - dS, G(S, I) = (\beta - \frac{\beta_1 I}{v + I})SI - \gamma I - \frac{\beta_2 I}{1 + bI} - dI - \alpha I,$$

构造 Dulac 函数  $B = \frac{1}{SI}$ , 那么

$$\frac{\partial(BF)}{\partial S} + \frac{\partial(BG)}{\partial I} = -\frac{A}{IS^2} - \frac{\beta_1 v}{(v + I)^2} - \frac{\beta_2 b S}{[(1 + bI)S]^2} < 0,$$

根据 Bendixson - Dulac 理论知在  $D$  内没有极限环, 即  $E_1$  是全局渐近稳定的.

### 4 数值分析

给出模型(1)的数值模拟: 取  $A = 5, \beta = 0.002, v = 30, d = 0.02, \beta_2 = 0.0015, \gamma = 0.05, \alpha = 0.1$ , 得到图 2 所示的时间序列图和图 3 所示的相图.

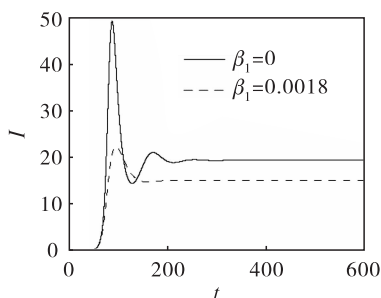


图 2  $I(t)$  时间序列图

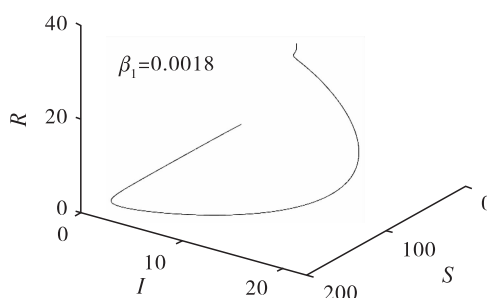


图 3 模型(1)的相图

可以看出, 当  $\beta_1$  从 0 增大为 0.0018 时, 图 2 中染病者的人数减少, 即媒体报道对传染病的传播有抑制作用. 模型(1)中无病平衡点  $E_0$  与地方病平衡点  $E_1$  均为全局渐近稳定的.

## 5 结论

通过对一类受媒体影响且具有饱和治疗函数的 SIR 模型做动力学分析,证明了模型(1)平衡点的稳定性:当  $R_0 < R_0^* < 1$  时,无病平衡点  $E_0$  全局渐近稳定;当  $R_0 > 1$  时,地方病平衡点  $E_1$  全局渐近稳定。计算得到模型(1)的基本再生数  $R_0 = \frac{\beta A}{d(\beta_2 + \gamma + d + \alpha)}$ ,可以看出饱和治疗函数中的治疗率  $\beta_2$  使  $R_0$  变小,说明有效的治疗措施可以直接抑制疾病的传播。与媒体报道相关的传染率  $\beta_1$  不影响  $R_0$ ,即媒体报道并不能直接影响疾病的传播,但通过后续的计算及数值模拟可以看出,媒体报道相关的传染率  $\beta_1$  的增加会导致染病者人数的减少,所以及时有效的媒体报道可以间接预防传染病传播。

## 参 考 文 献:

- [1] LIU Y, CUI J A. The impact of media coverage on the dynamics of infectious disease[J]. International journal of biomathematics, 2008, 1(1): 65 - 74.
- [2] 张林, 李存林, 郭文娟. 基于媒体报道下的一类 SIRS 传染病模型研究[J]. 数学杂志, 2018, 38(5): 887 - 895.
- [3] 刘茂省, 韩宁艳. 饱和发生率受媒体报道影响的 SEIS 模型的研究[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(10): 216 - 222.
- [4] 陈桦剑, 韦煜明. 具有饱和发生率和恢复率的潜伏期时滞 SEIR 模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(2): 48 - 53.
- [5] 雷仙鹤, 刘三红, 庞留勇. 疫苗接种、媒体报道和治疗措施对传染病传播影响的数学模型研究[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(9): 275 - 283.
- [6] XU Z, LIU X. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2008, 348(1): 433 - 443.
- [7] 吴艳红. 一类具有媒体影响、垂直传染、隔离治疗的 SIQRS 传染病模型[D]. 武汉: 华中师范大学, 2018.
- [8] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

## SIR Models with Media Effects and Therapeutic Functions

LI Yi-cheng-yang, ZHANG Rui

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** A class of SIR infectious disease models with media-influenced and therapeutic functions is studied. The existence of the basic regeneration number  $R_0$  and the equilibrium point of the model are obtained. When  $R_0 < R_0^* < 1$ , the disease-free equilibrium point  $E_0$  is globally asymptotically stable. When  $R_0 > 1$ , the endemic equilibrium point  $E_1$  is globally asymptotically stable. Finally, the conclusion is verified by numerical analysis.

**Keywords:** SIR model; media influence; therapeutic function; global stability

(责任编辑: 贾晶晶)