

【微分方程与动力系统研究】

# 带有凸非线性项平均曲率方程正解的分支曲线

王鑫鑫, 高红亮

(兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

**摘 要:** 研究了一维 Minkowski 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题正解的确切个数及其分支曲线, 其中非线性项是带有凸性的, 运用时间映像原理, 得出了该问题没有正解、恰有一个正解、恰有两个正解的结果。

**关键词:** Minkowski 空间; 平均曲率; 时间映像; 正解; 确切个数

**中图分类号:** O 175      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2022.06.010

常微分方程边值问题作为微分方程领域中的一个基本问题, 其正解研究得到了许多学者的关注。本文考虑一维 Minkowski 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = \lambda f(u), x \in (-L, L), \\ u(-L) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

正解的确切个数及其分支曲线, 其中参数  $\lambda > 0, L > 0$ 。

平均曲率问题起源于微分几何和狭义相对论。文献[1]运用 Leray - Schauder 度理论研究了非线性边值问题  $(\varphi(u'))' = f(t, u, u'), l(u, u') = 0$  解的存在性和多解性, 其中  $l(u, u') = 0$  代表在  $[0, T]$  上 Dirichlet、周期或者 Neumann 边界条件,  $\varphi: (-a, a) \rightarrow \mathbf{R}$  是增同胚并且  $\varphi(0) = 0$ 。文献[2]运用变分法和拓扑度理论, 依赖于非线性  $f = f(r, s)$  在  $s = 0$  处的渐近行为, 讨论了给定平均曲率方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = \lambda f(t, u), t \in (0, T), \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性和多解性, 其中参数  $\lambda > 0$ 。文献[3]运用 Leray - Schauder 度理论和临界点理论, 讨论了 Minkowski 空间中 Dirichlet 问题

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right) + f(|x|, v) = 0, x \in B(R); v = 0, x \in \partial B(R)$$

径向正解的存在性。随后, 文献[4]通过上下解方法和 Leray - Schauder 度理论获得了问题

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right) + \lambda \mu(|x|)v^q = 0, x \in B(R); v = 0, x \in \partial B(R)$$

收稿日期: 2022-03-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(11801243)

第一作者简介: 王鑫鑫(1995—), 女, 内蒙古通辽人, 硕士研究生, 主要从事常微分方程边值问题研究。

E-mail: xc1679848253@163.com

通信作者简介: 高红亮(1985—), 男, 甘肃兰州人, 副教授, 主要从事分歧理论及常微分方程边值问题研究。

E-mail: gaohongliang101@163.com

径向正解的存在性和多解性。接着,文献[5]运用变分方法也建立了球域上 Dirichlet 问题径向正解存在性的类似结果。文献[6]运用分歧理论建立了 Minkowski 空间球域上 Dirichlet 问题径向正解的全局结构,就非线性项  $f$  在零点处渐近线性、次线性、超线性的情形证明了径向正解集在一条连通分支上。文献[7]运用分歧理论和拓扑方法将上述结果推广到了一般区域  $\Omega$  上,讨论了 Minkowski 空间给定平均曲率方程 Dirichlet 问题非平凡非负解的全局结构。以上文献对 Minkowski 空间给定平均曲率方程 Dirichlet 问题正解的存在性研究比较详细,对正解确切个数的研究较少。

文献[8]运用时间映像原理研究了问题(1)的正解确切个数及分支曲线,其中  $f:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  是连续函数,且对  $\forall u > 0, f(u) > 0$ 。文献[9]研究了问题(1)正解的确切个数及分支曲线,其中非线性项  $f$  满足:(1)  $f \in (C^0, \mathbf{R}), f(u) > 0, u \in (0, L)$ ; (2)  $f \in C^2((0, \infty), \mathbf{R}), f''(u) > 0$ , 且  $uf'(u) \geq f(u) + \frac{1}{2}u^2 f''(u), u \in (0, L)$ 。文献[10]研究了一维 Minkowski 空间平均曲率方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = \lambda \exp(u), x \in (-L, L), \\ u(-L) = u(L) = 0 \end{cases}$$

正解的确切个数及分支曲线。上述文献分别研究了  $f''(u) > 0$  时,  $f(0) = 0$  与  $f(0) > 0$  的情形,并没有考虑  $f''(u) > 0, f(0) < 0$  时,问题(1)正解的确切个数及分支曲线。

受以上文献启发,本文研究一维 Minkowski 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题(1)正解的确切个数及分支曲线,其中  $\lambda > 0, L > 0$ 。

(H1)  $f \in C^2([0, \infty), \mathbf{R}), f(0) < 0, f'(u) > 0, f''(u) > 0, u \in (0, s), s \in (k, L)$ 。

(H2)  $f \in C^2([0, \infty), \mathbf{R}), uf'(u) \geq f(u) + \frac{1}{2}u^2 f''(u), u \in (0, L)$ 。

假设非线性项  $f$  满足条件(H1)(H2),据此可画出  $f(u)$  与  $F(u)$  的图像,如图 1、图 2 所示。图中,  $\beta$  与  $k$  分别为  $f(u)$  与  $F(u)$  唯一的正零点。

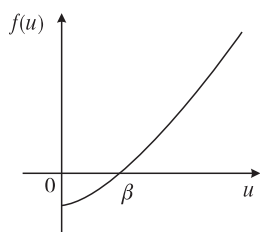


图 1  $f(u)$  的图像

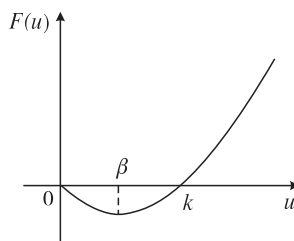


图 2  $F(u)$  的图像

### 1 预备知识

设  $u(x)$  是问题(1)的正解,  $u(x)$  关于  $x=0$  对称并且在  $x=0$  处取得最大值,当  $-L < x < 0$  时  $u'(x) > 0$ , 当  $0 < x < L$  时  $u'(x) < 0$ 。问题(1)等价于问题

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = \lambda f(u), x \in (0, L), \\ u'(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

令  $v = \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}, u(0) = s$ , 则  $(u, v)$  是定义在  $[0, L]$  上问题

$$u' = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, -v' = f_\lambda(u), u(0) = s, u(L) = 0, v(0) = 0$$

的解。记  $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ 。令  $H(x) = \sqrt{1+v^2(x)} - 1 + F_\lambda(u(x))$ ，通过计算可知

$$\frac{dH(x)}{dx} = \frac{v(x)}{\sqrt{1+v^2(x)}}(v'(x) + f_\lambda(u)) \equiv 0。$$

则  $H(x) = c$ ，其中  $c$  为常数。故可知  $H(0) = c = \lambda F(s)$ ，即  $\frac{1}{\sqrt{1-u'^2}} - 1 + F_\lambda(u) = F_\lambda(s)$ ，由此可得

$$-u' = \frac{\sqrt{(F_\lambda(s) - F_\lambda(u))[2 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))]}{1 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))}，$$

从而有

$$-\frac{1 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))}{\sqrt{(F_\lambda(s) - F_\lambda(u))[2 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))]} du = dx， \tag{2}$$

对式(2)的两端在  $(0, L)$  上积分，有

$$T_\lambda(s) = \int_0^s \frac{1 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))}{\sqrt{(F_\lambda(s) - F_\lambda(u))[2 + (F_\lambda(s) - F_\lambda(u))]} du = L。 \tag{3}$$

$T_\lambda(s)$  称为  $f$  的时间映像。

记  $F_\lambda(s) = \lambda F(s)$ ， $f_\lambda(s) = \lambda f(s)$ ， $A = A(s, u) = sf(s) - uf(u)$ ， $B = B(s, u) = F(s) - F(u)$ ， $C = C(s, u) = s^2 f'(s) - u^2 f'(u)$ ，则

$$T_\lambda(s) = \int_0^s \frac{\lambda B + 1}{\sqrt{\lambda^2 B^2 + 2\lambda B}} du。 \tag{4}$$

**引理 1**<sup>[8]</sup> 若(H1)成立，则

$$T'_\lambda(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\lambda^3 B^3 + 3\lambda^2 B^2 + \lambda(2B - A)}{(\lambda^2 B^2 + 2\lambda B)^{\frac{3}{2}}} du = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\Delta F(1 + \Delta F)(2 + \Delta F) - \Delta \bar{f}}{[\Delta F(2 + \Delta F)]^{\frac{3}{2}}} du， \tag{5}$$

$$T''_\lambda(s) = \frac{1}{s^2} \int_0^s \frac{B(3A^2 - BC - 2AB)\lambda^3 + (3A^2 - 4AB - 2BC)\lambda^2}{(\lambda^2 B^2 + 2\lambda B)^{\frac{5}{2}}} du =$$

$$\frac{1}{s^2} \int_0^s \frac{3\Delta \bar{f}^2(1 + \Delta F) - \Delta F(2 + \Delta F)(2\Delta \bar{f} + \Delta \bar{f}')}{[\Delta F(2 + \Delta F)]^{\frac{5}{2}}} du。$$

其中  $\Delta F = \lambda(F(s) - F(u))$ ， $\Delta \bar{f} = \lambda(sf(s) - uf(u))$ ， $\Delta \bar{f}' = \lambda(s^2 f'(s) - u^2 f'(u))$ 。

**引理 2**<sup>[11]</sup> 若(H1)成立，则：对任意  $s \in (k, L)$ ， $\lambda > 0$ ， $T_\lambda(s)$  关于  $\lambda$  严格递减；对任意  $s \in (k, L)$ ，有  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = \infty$ ， $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(s) = s$ 。

**引理 3** 若(H1)成立，则对于  $\lambda > 0$ ， $T_\lambda(k)$  是存在的，并且  $T_\lambda(k)$  是连续且单调递减的函数。

**证明** 因  $F(k) = 0$ ，则

$$B(k, kt) = F(k) - F(kt) = -F(kt) = -\int_0^{kt} f(s) ds < -f(0)kt。 \tag{6}$$

设存在  $h \in C[0, k]$  使得

$$F(u) = u(u - k)h(u)。 \tag{7}$$

因当  $0 < u < k$  时  $F(u) < 0$ ，再结合式(7)，得到  $h(u) > 0$ ；当  $u = 0$  与  $u = k$  时，分别运用洛必达法则，有

$$h(0) = \lim_{u \rightarrow 0} h(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(u)}{u(u - k)} = \frac{f(0)}{-k} > 0，h(k) = \lim_{u \rightarrow k} h(u) = \lim_{u \rightarrow k} \frac{F(u)}{u(u - k)} = \frac{f(k)}{k} > 0。$$

綜上当  $0 \leq u \leq k$  时， $h(u) > 0$ 。

存在  $M > 0$  使得当  $0 \leq u \leq k$  时， $h(u) > M$ 。根据式(6)，当  $0 < t < 1$  时，

$$-f(0)k > -f(0)kt > B(k, kt) = -F(kt) = -kt(kt - k)h(kt) > k^2 t(1 - t)M。 \tag{8}$$

当  $s \geq k$  且  $0 < u < s$  时，有  $F(s) - F(u) > 0$ ，再由式(8)可知

$$\begin{aligned}
 T_\lambda(k) &= k \int_0^1 \frac{\lambda B(k, kt) + 1}{\sqrt{\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)}} dt < k \int_0^1 \frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{2\lambda B(k, kt)}} dt < \\
 &k \int_0^1 \frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{2\lambda k^2 t(1-t)M}} dt = k \frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{2\lambda k^2 M}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \\
 &k \frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{2\lambda k^2 M}} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \right] < \\
 &\frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{2\lambda M}} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}t}} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-t)}} dt \right] = 2\sqrt{2} \frac{\lambda(-f(0)k) + 1}{\sqrt{\lambda M}} < \infty.
 \end{aligned}$$

因此, 当  $\lambda > 0$  时  $T_\lambda(k)$  存在. 再根据式(4) 和引理 2, 当  $\lambda > 0$  时  $T_\lambda(k)$  是连续且单调递减的函数,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} T_\lambda(k) = \infty, \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(k) = k$ .

**引理 4** 若(H1) 成立, 则  $\lim_{s \rightarrow k^+} T'_\lambda(s) = -\infty$ .

**证明** 令  $\theta(u) = 2F(u) - uf(u)$ , 可知  $\theta'(u) = f(u) - uf'(u), \theta''(u) = -uf''(u)$ . 因  $f(0) < 0, f''(u) > 0$ , 所以  $\theta'(0) < 0, \theta''(0) < 0$ .  $\theta(u)$  的图像如图 3 所示.

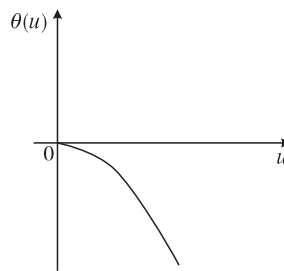


图 3  $\theta(u)$  的图像

易知当  $u > 0$  时,  $\theta'(u) < 0$ . 首先证明

$$\int_0^1 \frac{\theta(k) - \theta(kt)}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt = -\infty. \tag{9}$$

设存在  $t^* \in (0, 1)$  使得当  $0 < t < t^* < 1$  时,  $B(k, kt) < 1$ , 则

$$\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt) < (\lambda^2 + 2\lambda)B(k, kt) < (\lambda^2 + 2\lambda)(-f(0)kt).$$

又当  $u > 0$  时  $\theta'(u) < 0$ , 进而  $\theta(k) - \theta(kt) < 0$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\theta(k) - \theta(kt)}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt &\leq \int_0^{t^*} \frac{\theta(k) - \theta(kt)}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt \leq \\
 &\frac{\theta(k) - \theta(kt^*)}{[(\lambda^2 + 2\lambda)(-f(0)k)]^{\frac{3}{2}}} \int_0^{t^*} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt = -\infty.
 \end{aligned}$$

式(9) 证明完毕. 其次证明  $\lim_{s \rightarrow k^+} T'_\lambda(s) = -\infty$ . 根据式(8), 有  $\int_0^1 [\lambda B^{\frac{3}{2}}(k, kt) + 3B^{\frac{1}{2}}(k, kt)] dt < \infty$ . 又当  $s \geq k$

且  $0 < u < s$  时  $F(s) - F(u) > 0$ , 且  $2B(s, u) - A(s, u) = \theta(s) - \theta(u)$ , 再根据式(5)(9), 可得

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow k^+} T'_\lambda(s) &= \int_0^1 \frac{\lambda^3 B^3(k, kt) + 3\lambda^2 B^2(k, kt) + \lambda[\theta(k) - \theta(kt)]}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt = \\
 &\int_0^1 \frac{\lambda^3 B^3(k, kt) + 3\lambda^2 B^2(k, kt)}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt + \int_0^1 \frac{\lambda[\theta(k) - \theta(kt)]}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt \leq \\
 &\int_0^1 \frac{\lambda^3 B^3(k, kt) + 3\lambda^2 B^2(k, kt)}{[2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt + \int_0^1 \frac{\lambda[\theta(k) - \theta(kt)]}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt = \\
 &\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} \int_0^1 [\lambda B^{\frac{3}{2}}(k, kt) + 3B^{\frac{1}{2}}(k, kt)] dt + \int_0^1 \frac{\lambda[\theta(k) - \theta(kt)]}{[\lambda^2 B^2(k, kt) + 2\lambda B(k, kt)]^{\frac{3}{2}}} dt = -\infty.
 \end{aligned}$$

引理 4 证明完毕.

**引理 5** 若  $f$  满足(H1) 与(H2), 则  $T''_\lambda(s) > 0, s \in (k, L)$ .

**证明** 因  $1 + \Delta F > \frac{1}{2}(2 + \Delta F)$ , 则

$$T''_\lambda(s) = \frac{1}{s^2} \int_0^s \frac{3\Delta \bar{f}^2(1 + \Delta F) - \Delta F(2 + \Delta F)(2\Delta \bar{f} + \Delta \bar{f}')}{[\Delta F(2 + \Delta F)]^{\frac{5}{2}}} du >$$

$$\frac{1}{2s^2} \int_0^s \frac{(2 + \Delta F)(3\Delta \bar{f}^2 - 4\Delta \bar{f}\Delta F - 2\Delta F\Delta \bar{f}')}{[\Delta F(2 + \Delta F)]^{\frac{5}{2}}} du = \frac{1}{2s^2} \int_0^s \frac{(2 + \Delta F)[3(\Delta \bar{f} - 2\Delta F)\Delta \bar{f} + 2\Delta \bar{f}\Delta F - 2\Delta F\Delta \bar{f}']}{[\Delta F(2 + \Delta F)]^{\frac{5}{2}}} du。$$

因  $\Delta \bar{f} - 2\Delta F = \lambda[sf(s) - 2F(s)] - \lambda[uf(u) - 2F(u)]$ , 令  $h_1(u) = uf(u) - 2F(u)$ , 则

$$\Delta \bar{f} - 2\Delta F = \lambda[h_1(s) - h_1(u)], u \in (0, s)。$$

又知  $h_1'(u) = uf'(u) - f(u)$ ,  $h_1''(u) = uf''(u) > 0$ ,  $h_1(0) = 0$ ,  $h_1'(0) = -f(0) > 0$ , 因此  $h_1(u)$  的图像如图 4 所示。

综上所述可知  $\Delta \bar{f} - 2\Delta F \geq 0$ , 即  $\Delta \bar{f} \geq 2\Delta F$ , 因此

$$3(\Delta \bar{f} - 2\Delta F)\Delta \bar{f} + 2\Delta \bar{f}\Delta F - 2\Delta F\Delta \bar{f}' \geq 3(\Delta \bar{f} - 2\Delta F) \cdot 2\Delta F + 2\Delta \bar{f}\Delta F - 2\Delta F\Delta \bar{f}' = 2\Delta F(4\Delta \bar{f} - 6\Delta F - \Delta \bar{f}')。$$

又易知

$$4\Delta \bar{f} - 6\Delta F - \Delta \bar{f}' = \lambda[4sf(s) - 6F(s) - s^2 f'(s)] - \lambda[4uf(u) - 6F(u) - u^2 f'(u)]，$$

令  $h_2(u) = 4uf(u) - 6F(u) - u^2 f'(u)$ , 则  $4\Delta \bar{f} - 6\Delta F - \Delta \bar{f}' = \lambda[h_2(s) -$

$h_2(u)]$ ,  $u \in (0, s)$ 。可知  $h_2'(u) = 2uf'(u) - 2f(u) - u^2 f''(u)$ , 由条件(H2)可知  $h_2'(u) \geq 0$ , 则  $T_\lambda''(s) > 0$ 。

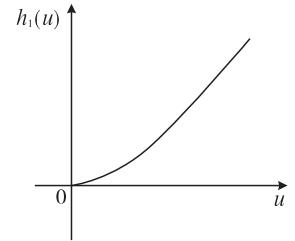


图 4  $h_1(u)$  的图像

## 2 主要结果

**定理 1** 若非线性项  $f$  满足条件(H1)和(H2), 则存在  $0 < \lambda_* < \lambda^*$ , 使得: 当  $0 < \lambda < \lambda_*$  时问题(1)没有正解; 当  $\lambda = \lambda_*$  或  $\lambda > \lambda^*$  时问题(1)恰有一个正解; 当  $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$  时问题(1)恰有两个正解。

**证明** 由时间映像的定义得知, 问题(1)等价于找到一个  $s \in (k, L)$  使得  $T_\lambda(s) = L$ 。那么问题(1)的解就等价于  $T_\lambda(s) = L$  的解。由式(3)可知,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(s_0) = s_0$ ,  $s_0 \in (k, L)$ , 即当  $\lambda \rightarrow \infty$  时, 存在  $s_0 \in (k, L)$  使得  $T_\lambda(s_0) < L$ 。由引理 3 可知, 对于  $\lambda > 0$ ,  $T_\lambda(k)$  是存在的, 并且  $T_\lambda(k)$  是连续且单调递减的函数。由引理 4 可知  $\lim_{s \rightarrow k^+} T_\lambda'(s) = -\infty$ , 再结合引理 2 和引理 5, 就可以得到  $T_\lambda(s)$  的图像, 见图 5。因此, 存在  $0 < \lambda_* < \lambda^*$  使得: 当  $0 < \lambda < \lambda_*$  时问题(1)没有正解; 当  $\lambda = \lambda_*$  或  $\lambda > \lambda^*$  时问题(1)恰有一个正解; 当  $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$  时问题(1)恰有两个正解, 如图 6 所示。

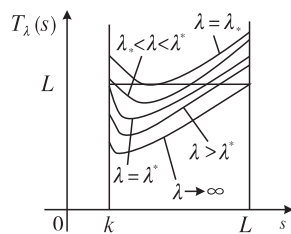


图 5  $T_\lambda(s)$  的图像

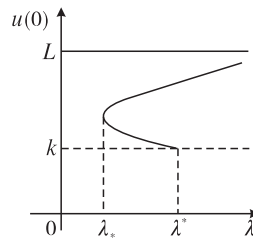


图 6 问题(1)的分支曲线

**例 1**  $f(u) = u^2 - 1, u > 0$ 。

**证明** 通过计算得  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f'(u) = 2u > 0$ ,  $f''(u) = 2 > 0$ ,  $uf'(u) - f(u) - \frac{1}{2}u^2 f''(u) = 1$ , 故非线性项  $f$  满足条件(H1)和(H2), 并求得  $k = \sqrt{3}$ 。因此, 根据定理 1, 存在  $0 < \lambda_* < \lambda^*$ , 使得: 当  $0 < \lambda < \lambda_*$  时问题(1)没有正解; 当  $\lambda = \lambda_*$  或  $\lambda > \lambda^*$  时问题(1)恰有一个正解; 当  $\lambda_* < \lambda < \lambda^*$  时问题(1)恰有两个正解。

## 3 结论

本文研究了一维 Minkowski 空间中给定平均曲率方程 Dirichlet 问题正解的确切个数及其分支曲线,

并在非线性项满足一定条件时,运用时间映像原理得到存在  $0 < \lambda_* < \lambda^*$ ,使得:当  $0 < \lambda < \lambda_*$  时问题(1)没有正解;当  $\lambda = \lambda_*$  或  $\lambda > \lambda^*$  时问题(1)恰有一个正解;当  $\lambda_* < \lambda \leq \lambda^*$  时问题(1)恰有两个正解的结果。

### 参 考 文 献:

- [1] BEREANU C, MAWHIN J. Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular  $\phi$ -Laplacian[J]. Journal of differential equations, 2007, 243(2): 536 - 557.
- [2] COELHO I, CORSATO C, OBERSNEL F. et al. Positive solutions of the Dirichlet problem for the one-dimensional Minkowski-curvature equation[J]. Advanced nonlinear studies, 2012, 12: 621 - 638.
- [3] BEREANU C, JEBELEAN P, TORRES P J. Positive radial solutions for Dirichlet problems with mean curvature operators in Minkowski space[J]. Journal of functional analysis, 2013, 264(1): 270 - 287.
- [4] BEREANU C, JEBELEAN P, TORRES P J. Multiple positive radial solutions for a Dirichlet problem involving the mean curvature operator in Minkowski space[J]. Journal of functional analysis, 2013, 265(4): 644 - 659.
- [5] COELHO I, CORSATO C, RIVETTI S. Positive radial solutions of the Dirichlet problem for the Minkowski-curvature equation in a ball[J]. Topological methods in nonlinear analysis, 2014(1): 23 - 39.
- [6] MA R Y, GAO H L, LU Y Q. Global structure of radial positive solutions for a prescribed mean curvature problem in a ball[J]. Journal of functional analysis, 2016, 270(7): 2430 - 2455.
- [7] DAI G W. Bifurcation and positive solutions for problem with mean curvature operator in Minkowski space[J]. Calculus of variations and partial differential equations, 2016, 55(4): Article number 72.
- [8] ZHANG X M, FENG M Q. Bifurcation diagrams and exact multiplicity of positive solutions of one-dimensional prescribed mean curvature equation in Minkowski space[J]. Communications in contemporary mathematics, 2018, 21(3): 111 - 137.
- [9] GAO H L, XU J. Bifurcation curves and exact multiplicity of positive solutions for Dirichlet problems with the Minkowski-curvature equation[J]. Boundary value problems, 2021(1): Article number 81. DOI: 10.1186/s13661-021-01558-x.
- [10] HUANG S Y. Global bifurcation diagrams for Liouville-Bratu-Gelfand problem with Minkowski-curvature operator[J]. Journal of dynamics and differential equations, 2021(3): 1 - 16. DOI: 10.1007/s10884-021-09982-4.
- [11] HUANG S Y. Global bifurcation and exact multiplicity of positive solutions for the one-dimensional Minkowski-curvature problem with sign-changing nonlinearity[J]. Communications on pure and applied analysis, 2019, 18(6): 3267 - 3284.

## Branch Curves of Positive Solutions of Given Mean Curvature Equations in a One-dimensional Minkowski Space

WANG Xin-xin, GAO Hong-liang

(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** The exact multiplicity of positive solutions and bifurcation curves of Dirichlet problem of the one-dimensional Minkowski-curvature equation are studied. Since the nonlinear term is convex, by using the time mapping principle, the problem with no positive solution, exactly one positive solution and exactly two positive solutions is obtained

**Keywords:** Minkowski space; mean curvature; time map; positive solution; exact multiplicity

(责任编辑:贾晶晶)