【校庆特稿】

自由积 C^*-代数中的 0-1 率

张伦传[1]，郭懋正[2]

(1. 中国人民大学 数学学院，北京 100086；2. 北京大学 数学科学学院，北京 100871)

摘　要：在自由概率论框架下，刻画了非交换情形的 Kolmogorov 型 0-1 率和 Hewitt-Savage 型 0-1 率。

关键词：自由积 C^*-代数；Kolmogorov 型 0-1 率；Hewitt-Savage 型 0-1 率

中图分类号：O 151　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.001

1　引言及主要结论

Gootman 和 Kannan[1] 基于由独立有限 von Neumann 子代数序列生成的张量积代数，给出了 Kolmogorov 型和 Hewitt-Savage 型 0-1 率的非交换形式，其中 von Neumann 子代数序列中的子代数两两相互交换。他们在文献[1]中提出了几个公开问题，其中之一是(参见文献[1]问题 2.15)：去掉 von Neumann 子代数序列中的子代数两两相互交换这个条件，上述 0-1 率是否成立，如何刻画？本文在自由概率论框架下基于自由积 C^*-代数，正面回答了上述问题。

三十年前由算子代数学家 Voiculescu 开创的自由概率论[2]是算子代数的一个重要研究方向，同时为算子代数研究提供了强有力的方法和工具。以自由概率论为主要工具解决了算子代数中几个著名的公开问题。Speicher[3] 在 Hilbert C^*-模框架下以组合理论为工具把自由概率论拓展到算子值情形。关于 Hilbert C^*-模基本理论可参考文献[4]。

下面介绍本文用到的有关自由概率论的基本概念和知识：给定 von Neumann-代数 A，ϕ 是 A 上的忠实、正常迹类态，则称 (A,ϕ) 是一个 C^*-概率空间，A 中的元素叫作随机变量。“自由”和“分布”是自由概率论中两个核心概念：A 中的一族 von Neumann 子代数 $(A_i)_{i\in I}$ 称为关于迹类态 ϕ 是自由的，指若任给正整数 n，当 $a_j\in A_{i_j}$，$i_1\neq i_2$，$i_2\neq i_3$，$\cdots$，$i_{n-1}\neq i_n$，且每个 $\phi(a_j)=0$，$1\leqslant j\leqslant n$ 时，有 $\phi(a_1a_2\cdots a_n)=0$。其中 I 是指标集。进而，A 中的子集族 $(S_i)_{i\in I}$ 称为自由的，指若 $(C^*(S_i))_{i\in I}$ 是自由的，其中每个 $C^*(S_i)(i\in I)$ 表示由 S_i 生成的 A 的 von Neumann 子代数。给定 C^*-概率空间 (A,ϕ)。设随机变量 $a\in A$。记 $C[x]$ 为关于未知量 x 的复系数多项式环，μ 是定义在 $C[x]$ 上的线性泛函，使得

$$\mu(P(x))=\phi(P(a)),\ \forall\, P(x)\in C[x],$$

则 μ 叫作 a 的分布。特别地，若 a 是自伴元，即 $a^*=a$，则 a 的分布恰好是定义在其谱集 $\sigma(a)$ 上的唯一的概率测度。给定 A 的一族随机变量 $(a_i)_{i\in I}$。记 $C<x_i;i\in I>$ 为非交换变量族 $(x_i)_{i\in I}$ 生成的复系数非交换多项式环。若定义在 $C<x_i;i\in I>$ 上的线性泛函 μ 满足等式

$$\mu(P(x_{i_1},\cdots,x_{i_n}))=\phi(P(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})),\ \forall\, P\in C<x_i;i\in I>,$$

收稿日期：2024-06-03

第一作者简介：张伦传(1965—　)，男，山东滨州人，教授，博士，博士生导师，主要从事量子概率和量子随机过程研究。E-mail：zhanglc@ruc.edu.cn

则称 μ 是随机变量族$\{a_i\}_{i\in I}$的联合分布。进而，$(a_i)_{i\in I}\cup(a_i^*)_{i\in I}$的分布叫作$(a_i)_{i\in I}$的 $*$ 分布。

给定两个 C^*-概率空间(A,ϕ)和(B,ψ)，及分别生成 A 和 B 的随机变量族$(a_i)_{i\in I}\subset A$，$(b_i)_{i\in I}\subset B$，即$C^*((a_i)_{i\in I})=A$，$C^*((b_i)_{i\in I})=B$。易证，$(a_i)_{i\in I}$和$(b_i)_{i\in I}$的 $*$ 分布相同的充要条件是，存在从 A 到 B 上的 $*$ 同构映射 Φ，使得 $\phi=\psi\circ\Phi$ 且 $\Phi(a_i)=b_i$，$\forall i\in I$。

在上述基础上，本文基于约化自由积代数获得了非交换情形的 Kolmogorov 型 0-1 率和 Hewitt-Savage 型 0-1 率。

下面介绍一下约化自由积的构造。

2 约化自由积

给定一列 von Neumann 代数$(A_i,\phi_i)_{i\in N}$，且其中每个 von Neumann 代数 $A_i(i\in I)$都存在忠实、正常迹类态 ϕ_i。于是由文献[2]可构造约化自由积 von Neumann 代数$(A,\phi)=*_{i\in N}(A_i,\phi_i)$。于是 A 有忠实、正常迹类态 ϕ，且满足 $\phi|A_i=\phi_i(i\in I)$。对每个 $A_i(i\in I)$做分解：$A_i=C1\oplus A_i^{\circ}$，其中

$$A_i^{\circ}=\{a\in A_i:\phi_i(a)=0\}。$$

于是代数自由积

$$A^{\circ}=C1\bigoplus\bigoplus\{A_{i(1)}^{\circ}\otimes A_{i(2)}^{\circ}\otimes\cdots\otimes A_{i(n)}^{\circ}:i(k)\in N,1\leqslant k\leqslant n,i(k)\neq i(k+1),1\leqslant k\leqslant n-1,n\in N\},$$

在 A 中范数稠。接下来考虑(A,ϕ)的欧氏结构：对于任何 $a,b\in A$，令$<a,b>=\phi(b*a)$，则

$$\|a\|_2=<a,a>^{1/2},a\in A。$$

$\|a\|_2=\sqrt{\phi(a*a)}$称为 a 的 L^2-范数。A 的子集 $\overline{A}$ 称为标准正交基，指若 $\overline{A}$ 中元素关于上述欧氏内积两两正交，而且 $\overline{A}$ 的线性包在 A 中范数稠密。若单位元 $1\in\overline{A}$，差集 $\overline{A}\backslash 1$ 记为$\overline{A}^{\circ}$。

若 A 是可分的 von Neumann 代数，例如超 II_1-型因子，则 A 中存在可数的标准正交基。选取稠密 A 的稠密子列$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，令$\overline{A}_0=\{1\}$，归纳构造有限标准正交集，使得$\overline{A}_0\subseteq\overline{A}_1\subseteq\overline{A}_2\subseteq\cdots$，且对于任何正整数 n，都满足条件：

(1) $a_n\in\operatorname{span}\overline{A}_n$；

(2) $\operatorname{span}\overline{A}_n$ 是自伴集，即若 $a\in\operatorname{span}\overline{A}_n$，则 $a^*\in\operatorname{span}\overline{A}_n$；

(3) $a,b\in\overline{A}_{n-1}\Rightarrow ab\in\operatorname{span}\overline{A}_n$。

事实上，从$\overline{A}_0$ 开始，若$\overline{A}_{n-1}$已构造完成，记 A_n'为由 a_n，$\overline{A}_{n-1}$和$\overline{A}_{n-1}\cdot\overline{A}_{n-1}$及其元素的共轭元素一起生成的 A 中的有限维子空间；选取$\overline{A}_n$ 包含$\overline{A}_{n-1}$且为 A_n'的标准正交基。从而由上述构造易知，$\overline{A}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\overline{A}_n$ 是 A 的标准正交基。A 中形如 $a=a_1a_2\cdots a_n$ 的元素叫作长度为 n 的约化字，其中 $a_j\in A_{i(j)}$，$\phi(a_j)=0$，且 $i(1)\neq i(2)$，$i(2)\neq i(3)$，$\cdots$，$i(n-1)\neq i(n)$。特别地，A 的单位元1 in A叫作长度为 0 的约化字。对于每个长度为 $n(\geqslant 1)$的约化字 a，有 $\phi(a)=0$。A 中所有约化字形成的线性包是 A 中范数稠密的 $*$-子代数。

设$\overline{A}_i$ 是 A_i 的标准正交基，$i\in I$。对于每个正整数 n，记 X_n 为形如 $x_1x_2\cdots x_n$ 的约化字全体的集，其中 $x_j\in\overline{A}_{i(j)}^{\circ}$，$j=1,2,\cdots,n$，而且 $i(1)\neq i(2)$，$i(2)\neq i(3)$，$\cdots$，$i(n-1)\neq i(n)$。记 $X_0=\{1\}$，令

$$*_{i\in N}\overline{A}_i=\bigcup_{n=0}^{\infty}X_n。$$

由约化自由积的构造(参考文献[2,5])，易知 $*_{i\in N}\overline{A}_i$ 关于 A 的欧氏结构是 A 中相应于 ϕ 的正交集，其线性包包含 A 中所有约化字，于是其范数闭包等于 A，从而为 A 的标准正交基。

3 主要结果的叙述及证明

定理 1(Kolmogorov 型 0-1 率) 设$(A,\phi)=*_{i\in N}(A_i,\phi_i)$，其中序列$(A_i,\phi_i)(i\in N)$中每个 von Neumann-代数 A_i 均具有忠实的正常的迹类态 $\phi_i(i\in N)$。任给正整数集 N 的有限子集 F，令 A_F 为由

$\{A_i\}_{i\overline{\in} F}$生成的 A 的 von Neumann-子代数。若 $\Delta=\bigcap A_F$，其中 F 取遍 N 的所有有限子集族，则 $\Delta=\{\lambda 1:\lambda\in C\}$，1 是 A 的单位元。

证明　注意到$(A_i)_{i\in N}$是 A 中的自由 von Neumann-子代数族。任取正整数集 N 的有限子集 F，记 A^F 为由$\bigcup_{i\in F}A_i$ 生成的 A 的 von Neumann-子代数。因

$$A^{\circ}=C1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{(l_1\neq l_2,l_2\neq l_3,\cdots,l_{n-1}\neq l_n)}A^{\circ}_{l_1}\cdots A^{\circ}_{l_n}$$

在 A 中稠，且 $A^{\circ}\subseteq\bigcup_F A^F$，故$\bigcup_F A^F$ 在 A 中稠。由文献[2]命题 2.5.5 知，A_F 和 A^F 在 A 中是自由的。从而对于任给的 $a\in\Delta$，任给的有限子集 $F\subset N$，及任给的 $b\in A^F$，有

$$\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)。\tag{1}$$

因 ϕ 是正常的，及$\bigcup_F A^F$ 在 A 中稠，等式(1)对于任何 $b\in A$ 都成立。在等式(1)中令 $b=a$，得 $\phi(aa)=(\phi(a))^2$。于是对于任意投影元 $p\in\Delta$ 都有 $\phi(p)=(\phi(p))^2$，从而得 $\phi(p)=1$ 或 0。因 von Neumann 代数 Δ 是由投影元的线性包关于弱拓扑生成的，故 $\Delta=\{C1\}$。证明完毕。

为刻画 Hewitt-Savage 型 0-1 率，引入对称算子概念：

给定具有忠实迹类态的 von Neumann-代数 A，考虑代数自由积

$$A^{\circ}=C1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{(l_1\neq l_2,l_2\neq l_3,\cdots,l_{n-1}\neq l_n)}A^{\circ}_{l_1}\cdots A^{\circ}_{l_n},$$

令 $a=\lambda+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中

$$a_n=\sum\nolimits_{(s),(t)}\lambda_n^{(s),(t)}a_{t_1}^{s_1}\cdots a_{t_n}^{s_n},s_1\neq s_2,s_2\neq s_3,\cdots,s_{n-1}\neq s_n,(s)=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in N^{\infty},$$

$$(t)=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in N^{\infty},a_{t_i}^{s_j}\in\overline{A}^{s_j},\overline{A}^1=(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_n^1,\cdots)。$$

存在 $*$-同构 $T_{j,i}:A_i\mapsto A_j$，使得 $a_k^j=T_{j,i}a_k^i$。

记 S_n 为 n 次对称群。给定 $\sigma\in S=\bigcup_n S_n$，定义

$$\sigma(a)=\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(a_n),$$

其中

$$\sigma(a_n)=\sum\nolimits_{(s),(t)}\lambda_n^{\sigma(s),(t)}a_{t_1}^{\sigma(s_1)}\cdots a_{t_n}^{\sigma(s_n)}。$$

若 $s_i\in S_n$，则 $\sigma(s_i)\in S_n$；若 $s_i\overline{\in}S_n$，则令 $\sigma(s_i)=s_i$。

定义 1　设 $a\in A^{\circ}$。若对于每个 $\sigma\in S=\bigcup_n S_n$，都有 $\sigma(a)=a$，则称 a 是对称算子，也叫对称元。

定理 2(Hewitt-Savage 型 0-1 率)　设$(A,\phi)=*_{i\in N}(A_i,\phi_i)$，其中序列$(A_i,\phi_i)(i\in N)$中每个 von Neumann-代数 A_i 都具有忠实迹类态 ϕ_i，$i\in N$，且$(A_i)_{i\in N}$同分布，则 A 中对称算子全体生成的 von Neumann-子代数 Δ 是$\{\lambda 1:\lambda\in C\}$。

证明　任给 $a\in\Delta$，于是 $\sigma(a)=a$。因 $a=\lambda+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n=\sum\nolimits_{(s),(t)}\lambda_n^{(s),(t)}a_{t_1}^{s_1}\cdots a_{t_n}^{s_n}$。下证 $\sigma(a_n)=a_n$，$n\in N$。假若存在某个 $n_0\in N$ 使得 $\sigma(a_{n_0})\neq a_{n_0}$，则得

$$0=<\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(a_n),a_{n_0}>=<a_{n_0},a_{n_0}>\neq 0,$$

得到矛盾。接下来只需证明每个 $\lambda_n^{(s,t)}=0$。因 $a_n=\sum\nolimits_{(s),(t)}\lambda_n^{(s,t)}a_{t_1}^{s_1}\cdots a_{t_n}^{s_n}$，其中

$$\sum\nolimits_{(s),(t)}|\lambda_n^{(s,t)}|^2<\infty,\sigma(a_n)=\sum\nolimits_{(s),(t)}\lambda_n^{(s,t)}a_{t_1}^{\sigma(s_1)}\cdots a_{t_n}^{(s_n)}。$$

注意到

$$a_n=\sum\nolimits_{\sigma(s),t}\lambda_n^{(\sigma(s),t)}a_{t_1}^{\sigma(s_1)}\cdots a_{t_n}^{\sigma(s_n)},$$

从而对于每个 $\sigma \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$，都有 $\lambda_n^{(s,t)} = \lambda_n^{(\sigma(s),t)}$。因此 $\lambda_n^{(s,t)}$ 均为常数。任意固定 t，假若 $\lambda_n^{(s,t)} \neq 0$，则 $\{\lambda_n^{(s,t)}\}$ 中存在常数子列 $\{\lambda_n^t\}$，从而导致 $\sum_s |\lambda_n^t|^2 = \infty$，矛盾。证毕。

参考文献：

[1] GOOTMAN E C, KANNAN D. Zero-one laws in finite W^*-algebras[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1976, 55(3): 743-756.

[2] VOICULESCU D, DYKEMA K J, NICA A. Free random variables[M]//CRM Monograph series, vol. 1. Providence, RI: American Mathematical Society, 1992.

[3] SPEICHER R. Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability theory[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1998, 132(627). DOI: 10.1090/memo/0627.

[4] ZHANG L C. Hilbert C^*-modules and quantum Markov semigroups[M]. Singapore: Springer Nature, 2024.

[5] DYKEMA K, RORDAM M, HAAGERUP U. The stable rank of some free product C^*-algebras [J]. Duke mathematical journal, 1997, 90(1): 95-121.

Zero-one Laws in Free Product C^*-algebras

ZHANG Lunchuan[1], GUO Maozheng[2]

(1. *School of Mathermatics, Renmin University of China, Beijing* 100086, *China*;
2. *School of Mathematical Science, Peking University, Beijing* 100871, *China*)

Abstract: The noncommutative analogue of Kolmogorov' type zero-one law and Hewitt-Savage' type zero-one law is characterized under the frame of free probability.

Keywords: free product C^*-algebras; Kolmogorov' type zero-one law; Hewitt-Savage' type zero-one law

（责任编辑：贾晶晶）

引用格式 张伦传，郭懋正. 自由积 C^*-代数中的 0-1 率[J]. 山东航空学院学报，2024，41(1)：5-8. ZHANG L C, GUO M Z. Zero-one laws in free product C^*-algebras[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2024, 41(1): 5-8.