【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

一类考虑先天免疫和非线性治愈率的时滞传染病模型 Hopf 分岔

张子振，张怡雪

（安徽财经大学 管理科学与工程学院，安徽 蚌埠 233030）

摘　要：考虑到传染病流行过程中先天免疫对个体的重要性，研究了一类具有先天免疫和非线性治愈率的时滞 SEIS 传染病模型。以感染者恢复所需要的时间周期时滞为分岔参数，通过讨论模型特征方程根的分布情况，推导出模型局部渐近稳定和产生 Hopf 分岔的时滞临界点。进而利用中心流形方法，计算出确定 Hopf 分岔性质的显式公式。研究表明，当感染者恢复所需要的时间周期时滞低于临界点时，疾病的传播可以得到有效控制。

关键词：先天免疫；非线性治愈率；时滞；SEIS 模型；Hopf 分岔

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.015

0　引言

传染病一直威胁着人类的生存与健康，严重阻碍经济社会的发展[1]。为了研究传染病的传播规律，国内外学者建立了不同形式的微分方程模型，对各种传染病问题进行定量分析[2-4]。考虑到先天免疫以及医疗资源的匮乏对疾病传播的影响，文献[5]基于如下假设：疾病流行区的总人口分为易感者 $S(t)$、潜伏者 $E(t)$ 和感染者 $I(t)$ 三个群体，并且所有进入疾病流行区的人口均为易感者，其常数输入率为 Γ；易感者和感染者的有效接触率为 β，潜伏者的疾病暴发率为 σ；所有群体的自然死亡率为 δ，疾病导致感染者的死亡率为 μ；由于具有一定的先天免疫，潜伏者的恢复率为 a，潜伏者的营养不良等因素对自身先天免疫的抑制率为 $1/(1+kE(t))$；感染者的恢复率为 γ，医疗资源匮乏等因素对感染者恢复的抑制率为 $1/(1+bI(t))$，提出了具有先天免疫和非线性治愈率的 SEIS 传染病模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Gamma-\delta S(t)-\beta S(t)I(t)+\dfrac{aE(t)}{1+kE(t)}+\dfrac{\gamma I(t)}{1+bI(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\delta E(t)-\sigma E(t)-\dfrac{aE(t)}{1+kE(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma E(t)-(\delta+\mu)I(t)-\dfrac{\gamma I(t)}{1+bI(t)}.\end{cases}\tag{1}$$

显然，文献[5]假设感染者的恢复是瞬时的，这与事实不符。在现实世界中，对感染者进行治疗，并恢复为易感者需要一定的时间周期。基于此，笔者在模型(1)中引入感染者恢复所需要的时间周期时滞，研究具有先天免疫和非线性治愈率的时滞 SEIS 传染病模型

收稿日期：2023-08-02

基金项目：国家自然科学基金项目(12001001)

第一作者简介：张子振(1982—　)，男，山东聊城人，教授，博士，主要从事动力系统稳定性及分岔研究。
E-mail：zzzhaida@163.com

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=\Gamma-\delta S(t)-\beta S(t)I(t)+\dfrac{aE(t)}{1+kE(t)}+\dfrac{\gamma I(t-\zeta)}{1+bI(t-\zeta)},\\ \dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\delta E(t)-\sigma E(t)-\dfrac{aE(t)}{1+kE(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\sigma E(t)-(\delta+\mu)I(t)-\dfrac{\gamma I(t-\zeta)}{1+bI(t-\zeta)}。\end{cases} \tag{2}$$

其中,ζ 表示感染者恢复所需要的时间周期时滞。

1 局部渐近稳定性和 Hopf 分岔的存在性

根据文献[5]的分析可知,如果基本再生数 $R_0=\dfrac{\Gamma\sigma\beta}{\delta(a+\delta+\sigma)(\gamma+\mu+\delta)}>1$,则模型(2)存在疾病平衡点 $V_*(S_*,E_*,I_*)$,其中,

$$S_*=\Omega_1\left[\frac{a}{kI_*(b\delta I_*+\gamma+\delta)+\mu kI_*(bI_*+1)+b\sigma I_*}+\frac{\delta+\sigma}{b\sigma I_*+\sigma}\right],$$

$$E_*=\frac{b(\delta+\mu)I_*^2+(\delta+\mu+\gamma)I_*}{\sigma(bI_*+1)},\Omega_1=\frac{b\delta I_*+\mu(bI_*+1)+\gamma+\delta}{\beta},$$

I_* 是方程

$$\Xi_4I_*^4+\Xi_3I_*^3+\Xi_2I_*^2+\Xi_1I_*+\Xi_0=0 \tag{3}$$

的正根。其中,

$$\Xi_0=\delta(a+\delta+\sigma)(\delta+\gamma+\mu)-\Gamma\beta\sigma,$$

$$\Xi_1=\frac{\Omega_2}{\sigma}+b\delta(\gamma+2\delta)(a+\delta+\sigma)+\sigma\beta(\delta-2b\Gamma)+\frac{\delta^2k(\gamma+\delta)^2}{\sigma}+(\gamma+\delta)[\delta(\beta+k(\gamma+\delta))-\beta\Gamma k],$$

$$\begin{aligned}\Xi_2=&b^2\delta^2(a+\delta)+(\delta^2-\beta\Gamma)+b^2\mu\delta\sigma(a+\delta+\sigma)+2b\mu[\beta\sigma^2+\delta^2k(\gamma+2\delta)+\delta\sigma(\beta+2\delta k+\gamma k)-\beta k\Gamma\sigma]+\\&\mu^2k(\delta+\sigma)(2b\delta+\beta)+\mu\beta k\sigma(\gamma+2\delta)+2\mu\beta k\delta(\gamma+\delta)+2b\delta^4k+2b\delta^3k(\gamma+\delta)+2b\delta^2\sigma(\beta+\gamma k)+\\&b\beta\delta\sigma(\gamma-2k\Gamma+2\sigma)-b\beta\gamma\Gamma k\sigma+b\beta\delta k(\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\sigma),\end{aligned}$$

$$\Xi_3=\frac{\Omega_3}{\sigma}+\mu k(\delta+\sigma)(b\delta+2\beta)+k\beta[\sigma(\gamma+2\delta)+2\delta(\gamma+\delta)],\Xi_4=\frac{b^2k\beta(\delta+\mu)^2(\delta+\sigma)}{\sigma},$$

$$\Omega_2=\mu\delta\sigma(2b(a+\sigma)+\beta+2\gamma k)+2\mu\delta^2(\sigma(b+k)+\gamma k+\delta k)+\mu^2\delta k(\delta+\sigma)+\mu\beta\sigma(\sigma-\Gamma k),$$

$$\Omega_3=b^2(\delta+\mu)[\delta^3k+\delta^2k\sigma+\beta\delta\sigma+\beta\sigma(\sigma-k\Gamma)]。$$

显然,$\Xi_4>0$。如果 $R_0=\dfrac{\Gamma\sigma\beta}{\delta(a+\delta+\sigma)(\gamma+\mu+\delta)}>1$,则 $\Xi_0<0$。于是,方程(3)至少存在一个正根。所以模型(2)存在疾病平衡点。

模型(2)在疾病平衡点 $V_*(S_*,E_*,I_*)$ 处的特征方程为

$$\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0+(J_2\lambda^2+J_1\lambda+J_0)\mathrm{e}^{-\lambda\zeta}=0, \tag{4}$$

其中,

$$K_0=k_{12}k_{21}k_{33}-k_{11}k_{22}k_{33}+\sigma k_{11}k_{23}-\sigma k_{13}k_{21},K_1=k_{11}k_{22}+k_{11}k_{33}+k_{22}k_{33}-k_{12}k_{21}+\sigma k_{23},$$

$$K_2=-(k_{11}+k_{22}+k_{33}),J_0=k_{12}k_{21}j_{33}-\sigma k_{21}j_{13}-k_{11}k_{22}j_{33},J_1=j_{33}(k_{11}+k_{22}),J_2=-j_{33},$$

$$k_{11}=-\delta-\beta I_*,k_{12}=\frac{a}{(1+kE_*)^2},k_{13}=-\beta S_*,k_{21}=\beta I_*,k_{22}=-\delta-\sigma-\frac{a}{(1+kE_*)^2},k_{23}=\beta S_*,$$

$$k_{32}=\sigma,k_{33}=-\delta-\mu,j_{13}=\frac{\gamma}{(1+bI_*)^2},j_{33}=-\frac{r}{(1+bI_*)^2}。$$

当 $\zeta=0$ 时,方程(4)变为

$$\lambda^3+F_2\lambda^2+F_1\lambda+F_0=0, \tag{5}$$

其中，$F_0=K_0+J_0$，$F_1=K_1+J_1$，$F_2=K_2+J_2$。显然，$F_2=2\delta+\sigma+\mu+\beta I_*+\dfrac{a}{(1+kE_*)^2}+\dfrac{\gamma}{(1+bI_*)^2}>0$。因此，根据 Rough-Hurwiz 定理可知，如果 $F_2F_1>F_0>0$，则当 $\zeta=0$ 时，模型(2)局部渐近稳定。

当 $\zeta>0$ 时，令 $\lambda=\mathrm{i}x(x>0)$ 为方程(4)的根，那么

$$\begin{cases}J_1x\sin(x\zeta)+(J_0-J_2x^2)\cos(x\zeta)=K_2x^2-K_0,\\ J_1x\cos(x\zeta)-(J_0-J_2x^2)\sin(x\zeta)=x^3-K_1x。\end{cases}$$

因此，有

$$x^6+H_2x^4+H_1x^2+H_0=0, \tag{6}$$

其中，$H_0=K_0^2-J_0^2$，$H_1=K_1^2-2K_0K_2-J_1^2+2J_0J_2$，$H_2=K_2^2-2K_1-J_2^2$。令 $x^2=\xi$，则有

$$\xi^3+H_2\xi^2+H_1\xi+H_0=0。 \tag{7}$$

根据文献[6]对方程(7)根的分布情况的讨论，可以得到下列引理。

引理 1　如果(ⅰ) $H_0<0$ 或者(ⅱ) $H_0\geqslant0$，$\Theta=H_2^2-3H_1>0$，$\Theta^*=\dfrac{-H_2+\sqrt{\Theta}}{3}>0$ 且 $f(\Theta^*)\leqslant0$，则方程(7)至少存在一个正根。其中，$f(\xi)=\xi^3+H_2\xi^2+H_1\xi+H_0$。

如果模型(2)的参数满足引理 1 中的条件(ⅰ)或者(ⅱ)，则方程(7)至少存在一个正实根 ξ_0。进而，方程(6)存在正根 $x_0=\sqrt{\xi_0}$，使得方程(4)存在虚根 $\pm\mathrm{i}x_0=\pm\mathrm{i}\sqrt{\xi_0}$。对于 x_0，

$$\zeta_0=\frac{1}{x_0}\times\arccos\left[\frac{(J_1-J_2K_2)x_0^4+(J_0K_2-J_1K_1+J_2K_0)x_0^2-J_0K_0}{J_2^2x_0^4+(J_1^2-2J_0J_2)x_0^2+J_0^2}\right]。$$

进而，有

$$\left[\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\zeta}\right]^{-1}=-\frac{3\lambda^2+2K_2\lambda+K_1}{\lambda(\lambda^3+K_2\lambda^2+K_1\lambda+K_0)}+\frac{2J_2\lambda+J_1}{\lambda(J_2\lambda^2+J_1\lambda+J_0)}-\frac{\zeta}{\lambda},\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\zeta}\right]_{\zeta=\zeta_0}^{-1}=\frac{f'(\xi_0)}{J_2^2x_0^4+(J_1^2-2J_0J_2)x_0^2+J_0^2}。$$

其中，$\xi_0=x_0^2$。所以，如果 $f'(\zeta_0)\neq0$，则 $\mathrm{Re}\left[\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\zeta}\right]_{\zeta=\zeta_0}^{-1}\neq0$。根据文献[7]提出的 Hopf 分岔存在性定理，可以得到下列结论。

定理 1　对于模型(2)，当 $\zeta\in[0,\zeta_0)$ 时，疾病平衡点 $V_*(S_*,E_*,I_*)$ 局部渐近稳定；当 $\zeta=\zeta_0$ 时，模型(2)产生 Hopf 分岔，并在疾病平衡点 $V_*(S_*,E_*,I_*)$ 产生分岔周期解。

2　Hopf 分岔的性质

令 $\zeta=\zeta_0+\omega(\omega\in\mathbf{R})$，$\Psi_1(t)=S(t)-S_*$，$\Psi_2(t)=E(t)-E_*$，$\Psi_3(t)=I(t)-I_*$，$\Psi_i(t)=\Psi_i(\zeta t)$，$i=1,2,3$，定义连续实数空间 $C=C([-1,0],\mathbf{R}^3)$，则模型(2)可以转化为

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=L_\omega\boldsymbol{\Psi}(t)+F(\omega,\boldsymbol{\Psi}(t))。 \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\Psi}(t)=(\Psi_1(t),\Psi_2(t),\Psi_3(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3$，并且

$$L_\omega(\xi)=(\zeta_0+\omega)[\boldsymbol{A}_1\phi(0)+\boldsymbol{A}_2\phi(-1)],\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\0&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&0&j_{13}\\0&0&0\\0&0&j_{33}\end{pmatrix},$$

$$F(\omega,\xi)=(\zeta_0+\omega)[\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3]^{\mathrm{T}},\Delta_1=-\beta\xi_1(0)\xi_3(0)+h_{12}\xi_2^2(0)+h_{13}\xi_3^2(-1)+\cdots,$$

$$\Delta_2=\beta\xi_1(0)\xi_3(0)+h_{22}\xi_2^2(0)+h_{23}\xi_2^3(0)+\cdots,\Delta_3=h_{31}\xi_3^2(-1)+h_{32}\xi_3^3(-1)+\cdots,h_{12}=-\frac{ak}{(1+kE_*)^3},$$

$$h_{13}=-\frac{\gamma b}{(1+bI_*)^3},h_{22}=\frac{ak}{(1+kE_*)^3},h_{23}=-\frac{ak^2}{(1+kE_*)^4},h_{31}=\frac{\gamma b}{(1+bI_*)^3},h_{32}=-\frac{\gamma b^2}{(1+bI_*)^4}。$$

于是，存在分量为有界变差函数的三阶矩阵 $\boldsymbol{f}(\upsilon,\omega)$，当 $\upsilon\in[-1,0]$ 时，使得 $L_\omega(\xi)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\upsilon,\omega)\xi(\upsilon)$。

选取 $\boldsymbol{f}(\upsilon,\omega)=(\zeta_0+\omega)[\boldsymbol{A}_1\eta(\upsilon)+\boldsymbol{A}_2\eta(\upsilon+1)]$。对于 $\xi\in C([-1,0],\mathbf{R}^3)$，定义

$$M(\omega)\xi=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\xi(\upsilon)}{\mathrm{d}\upsilon},-1\leqslant\upsilon<0,\\ \displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\upsilon,\omega)\xi(\upsilon),\upsilon=0,\end{cases}\quad R(\omega)\xi=\begin{cases}0,1\leqslant\upsilon<0,\\ F(\omega,\xi),\upsilon=0。\end{cases}$$

则模型(8)可以变为

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t)=M(\omega)\boldsymbol{\Psi}(t)+R(\omega)\boldsymbol{\Psi}(t),\tag{9}$$

其中，$\Psi_t=\Psi(t+\mu),\mu\in[-1,0]$。

对于 $\chi\in C^1([0,1],(\mathbf{R}^3)^*)$，定义

$$M^*\chi(s)=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}\chi(s)}{\mathrm{d}s},0<s\leqslant 1,\\ \displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t,0)\chi(-t),s=0,\end{cases}$$

及双线性内积

$$\langle\chi(s),\xi(\upsilon)\rangle=\bar{\chi}(0)\xi(0)-\int_{\upsilon=-1}^{0}\int_{\varepsilon=0}^{0}\bar{\chi}(\varepsilon-\upsilon)\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\upsilon)\xi(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon,\tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{f}(\upsilon)=\boldsymbol{f}(\upsilon,0)$。

令 $\boldsymbol{\Psi}(\upsilon)=(1,\Psi_2,\Psi_3)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon}$ 为 $M(0)$ 对应于 $+\mathrm{i}x_0\zeta_0$ 的特征向量，则有

$$\Psi_2=\frac{\mathrm{i}x_0-[k_{11}+(k_{13}+j_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0})\Psi_3]}{k_{12}},\Psi_3=\frac{-(x_0^2+\mathrm{i}x_0k_{22}+k_{12}k_{21})}{k_{12}k_{23}+(\mathrm{i}x_0-k_{22})[k_{11}+(k_{13}+j_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0})]}。$$

令 $\boldsymbol{\Psi}^*(s)=D(1,\Psi_2^*,\Psi_3^*)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0\zeta_0 s}$ 为 $M^*(0)$ 对应于 $-\mathrm{i}x_0\zeta_0$ 的特征向量，得到

$$\Psi_2^*=-\frac{\mathrm{i}x_0+k_{11}}{k_{21}},\Psi_3^*=-\frac{(k_{22}+\mathrm{i}x_0)\Psi_2^*+k_{12}}{k_{32}}。$$

根据方程(10)，有 $\bar{D}=[1+\Psi_2\bar{\Psi}_2^*+\Psi_3\bar{\Psi}_3^*+\zeta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0}\Psi_3(j_{13}+j_{13}\bar{\Psi}_3^*)]^{-1}$，从而使得 $\langle\boldsymbol{\Psi}^*(s),\boldsymbol{\Psi}(\upsilon)\rangle=1$。利用文献[8]中相似的计算过程，计算得到中心流形系数：

$$g_{20}=2\bar{D}\zeta_0[\beta(\Psi_2^*-1)\Psi_3+(h_{12}+h_{22}\Psi_2^*)\Psi_2^2+(h_{13}+h_{31}\Psi_3^*)\Psi_3^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}],$$

$$g_{11}=\bar{D}\zeta_0[\beta(\Psi_2^*-1)(\Psi_3+\bar{\Psi}_3)+2\Psi_2\bar{\Psi}_2(h_{12}+h_{22}\Psi_2^*)+2\Psi_3\bar{\Psi}_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}(h_{13}+h_{31}\Psi_3^*)],$$

$$g_{02}=2\bar{D}\zeta_0[\beta(\Psi_2^*-1)\bar{\Psi}_3+(h_{12}+h_{22}\Psi_2^*)\bar{\Psi}_2^2+(h_{13}+h_{31}\Psi_3^*)\bar{\Psi}_3^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}],$$

$$\begin{aligned}g_{21}=2\bar{D}\zeta_0&[\beta(\Psi_2^*-1)(W_{11}^{(3)}(-1)+\frac{1}{2}W_{20}^{(3)}(-1)+\frac{1}{2}\bar{\Psi}_3W_{20}^{(1)}(0)+\Psi_3W_{11}^{(1)}(0))]+\\&(h_{12}+h_{22}\Psi_2^*)[2\Psi_2W_{11}^{(2)}(0)+\bar{\Psi}_2W_{20}^{(2)}(0)]+3h_{23}\Psi_2^*\Psi_2^2\bar{\Psi}_2+\\&(h_{13}+h_{31}\Psi_3^*)[2\Psi_3W_{11}^{(3)}(-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0}+\bar{\Psi}_3W_{20}^{(3)}(-1)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}]+3h_{32}\Psi_3^*\Psi_3^2\bar{\Psi}_3\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x_0\zeta_0}。\end{aligned}$$

其中，

$$W_{20}(\upsilon)=\frac{\mathrm{i}g_{20}\boldsymbol{\Psi}(0)}{x_0\zeta_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon}+\frac{\mathrm{i}\bar{g}_{02}\bar{\boldsymbol{\Psi}}(0)}{3x_0\zeta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon}+\boldsymbol{Q}_1\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon},W_{11}(\upsilon)=-\frac{\mathrm{i}g_{11}\boldsymbol{\Psi}(0)}{x_0\zeta_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon}+\frac{\mathrm{i}\bar{g}_{11}\bar{\boldsymbol{\Psi}}(0)}{x_0\zeta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_0\zeta_0\upsilon}+\boldsymbol{Q}_2,$$

且有

$$\boldsymbol{Q}_1=2\begin{pmatrix}k_{11}^*&-k_{12}&-k_{13}-j_{13}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}\\-k_{21}&k_{22}^*&-k_{23}\\0&-k_{32}&k_{33}^*\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}Q_1^{(1)}\\Q_1^{(2)}\\Q_1^{(3)}\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_2=-\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}+j_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\0&k_{32}&k_{33}+j_{33}\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}Q_2^{(1)}\\Q_2^{(2)}\\Q_2^{(3)}\end{pmatrix}。$$

其中，

$$k_{11}^*=2\mathrm{i}x_0-k_{11},k_{22}^*=2\mathrm{i}x_0-k_{22},k_{33}^*=2\mathrm{i}x_0-k_{33}-j_{33}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0},Q_1^{(1)}=-\beta\Psi_3+h_{12}\Psi_2^2+h_{13}\Psi_3^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0},$$

$$Q_1^{(2)}=\beta\Psi_3+h_{22}\Psi_2^2,Q_1^{(3)}=h_{31}\Psi_3^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0},Q_2^{(1)}=-\beta(\Psi_3+\bar{\Psi}_3)+2h_{12}\Psi_2\bar{\Psi}_2+2h_{13}\Psi_3\bar{\Psi}_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0},$$

$$Q_2^{(2)}=\beta(\Psi_3+\overline{\Psi}_3)+2h_{22}\Psi_2\overline{\Psi}_2,Q_2^{(3)}=2h_{31}\Psi_3\overline{\Psi}_3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x_0\zeta_0}。$$

最终，可以计算得到决定 Hopf 分叉性质的系数表达式

$$C_1(0)=\frac{\mathrm{i}}{2x_0\zeta_0}\left(g_{11}g_{20}-2|g_{11}|^2-\frac{|g_{02}|^2}{3}\right)+\frac{g_{21}}{2},\mu_2=-\frac{\mathrm{Re}\{C_1(0)\}}{\mathrm{Re}\{\lambda'(\zeta_0)\}},$$

$$\beta_2=2\mathrm{Re}\{C_1(0)\},T_2=-\frac{\mathrm{Im}\{C_1(0)\}+\mu_2\mathrm{Im}(\lambda'(\zeta_0))}{x_0\zeta_0}。$$

于是，可以得到下列结论。

定理 2　若 $\mu_2>0$，则模型(2)的 Hopf 分岔是超临界的；若 $\beta_2<0$，则模型(2)的 Hopf 分岔周期解是稳定的；若 $T_2>0$，则模型(2)的 Hopf 分岔周期是递增的。

3　仿真示例

选取文献[5]中给定的部分参数取值，同时考虑模型(2)产生 Hopf 分岔的充分条件，选取 $a=0.5$，$\beta=0.25$，$b=0.025$，$\Gamma=1.3$，$\delta=0.01$，$\mu=0.02$，$k=0.015$，$\sigma=0.08$，$\gamma=0.4$，则可以得到模型(2)的示例模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}(t)}=1.3-0.01S(t)-0.25S(t)I(t)+\dfrac{0.5E(t)}{1+0.015E(t)}+\dfrac{0.4I(t-\zeta)}{1+0.025I(t-\zeta)},\\ \dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}(t)}=0.25S(t)I(t)-0.01E(t)-0.08E(t)-\dfrac{0.5E(t)}{1+0.015E(t)},\\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=0.08E(t)-(0.01+0.02)I(t)-\dfrac{0.4I(t-\zeta)}{1+0.025I(t-\zeta)}。\end{cases}\tag{11}$$

利用 Matlab 软件可以计算得到示例模型(11)存在唯一有疾病平衡点 $D_*(5.0882,69.8339,18.3707)$，并计算得到 $x_0=2.0254$，$\zeta_0=10.4691$。根据定理 1，当 $\zeta\in[0,\zeta_0=10.4691)$ 时，模型(11)局部渐近稳定，仿真效果如图 1 所示。

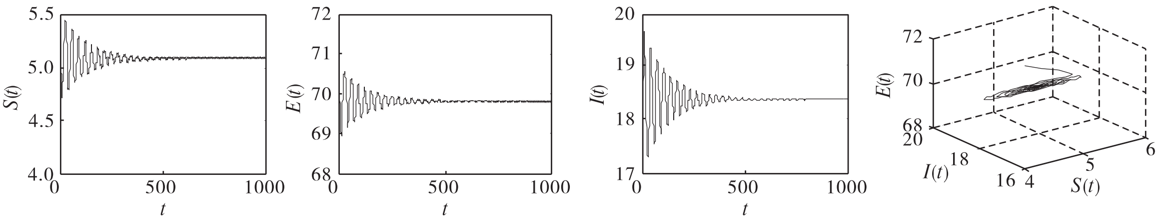

图 1　当 $\zeta=9.8765$ 时，模型(11)局部渐近稳定

当 ζ 的取值越过临界点 $\zeta_0=10.4691$ 时，模型(11)失去稳定，产生 Hopf 分岔，并在有疾病平衡点 $D_*(5.0882,69.8339,18.3707)$ 附近产生分岔周期解，仿真效果如图 2 所示。另外，利用 Matlab 软件计算得到 $C_1(0)=-0.674\,292+\mathrm{i}1.308\,461$，$\lambda'(\zeta_0)=0.536\,944-\mathrm{i}0.781\,951$，进而得到 $\mu_2=1.255\,796>0$，$\beta_2=-1.348\,584<0$，$T_2=-0.015\,397<0$。所以，由定理 2 可知，示例模型(11)在 $\zeta_0=10.4691$ 处产生的 Hopf 分岔是超临界的，分岔周期解是稳定且递减的。

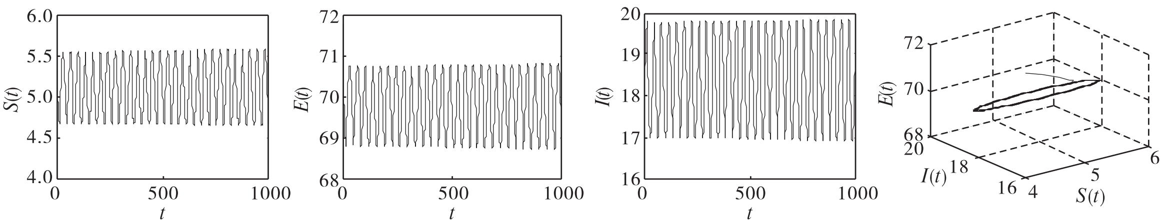

图 2　当 $\zeta=11.4887$ 时，模型(11)失去稳定并产生 Hopf 分岔

4　小结

本文在文献[5]的基础上，考虑感染者恢复所需要的时间周期，研究了一类具有先天免疫和非线性治

愈率的时滞 SEIS 传染病模型。以感染者恢复所需要的时间周期时滞为分岔参数，讨论了模型局部渐近稳定性和 Hopf 分岔的存在性，并研究了 Hopf 分岔的性质。研究表明，感染者恢复所经历的时间周期越短，疾病的传播越容易控制；反之，疾病的传播控制难度越大，甚至将失去控制。因此，疾病患者应该尽量早发现早治疗，以有效控制疾病的传播。本文所得结果是对文献[7]的适当补充。本文仅限于模型(2)局部 Hopf 分岔问题的研究，全局 Hopf 分岔或者分岔周期解的大范围存在问题，还有待进一步研究。

参考文献：

[1] 胡新利，郑田田，杨亚莉. 基于 Beverton-Holt 出生函数的阶段结构传染病模型的稳定性和分支[J]. 工程数学学报，2022，39(4)：599-609.

[2] 焦战. 不同扩散策略下 SI 传染病模型的行波解[J]. 吉林大学学报(理学版)，2022，60(3)：494-506.

[3] BAE J H，LEE S M. Investigation of SIS epidemics on dynamic network models with temporary link deactivation control schemes[J]. Mathematical biosciences and engineering，2022(6)：6317-6330.

[4] 孙亚楠，薛亚奎，孙松. 受疾病意识影响的 SIR 传染病模型分析[J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2021，55(3)：337-342.

[5] JAIN S，KUMAR S. Dynamical analysis of SEIS model with nonlinear innate immunity and saturated treatment[J]. The European physical journal plus，2021，136(9). DOI：10.1140/epjp/s13360-21-01944-5.

[6] SONG Y L，WEI J J. Bifurcation analysis for Chen's system with delayed feedback and its application to control of chaos[J]. Chaos，solitons and fractals，2004，22(1)：75-91.

[7] HASSARD B，KAZARINOFF N，WAN Y. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1981.

[8] UPADHYAY R K，KUMARI S. Discrete and data packet delays as determinants of switching stability in wireless sensor networks[J]. Applied mathematical modelling，2019，72(8)：513-536.

Hopf Bifurcation of a Delayed Epidemic Model Considering Innate Immunity and Nonlinear Cure Rate

ZHANG Zizhen，ZHANG Yixue

(*School of Management Science and Engineering*，

Anhui University of Finance and Economics，*Bengbu* 233030，*China*)

Abstract：Considering the importance of innate immunity to individuals in the process of infectious diseases，a delayed SEIS epidemic model with innate immunity and nonlinear cure rate is studied in this paper. Taking the cure period delay of the infectious disease as the bifurcation parameter，the threshold value of the time delay for the local asymptotic stability of the proposed model and occurrence of Hopf bifurcation are obtained by discussing the distribution of the roots of the characteristic equation of the model. Then，by using the central manifold method，the explicit formulas for determining properties of the Hopf bifurcation are calculated. Research shows that the infectious disease can be effectively controlled when the cure period delay of the infectious disease is below the threshold value of the time delay.

Keywords：innate immunity；nonlinear cure rate；delay；SEIS model；Hopf bifurcation

(责任编辑：贾晶晶)

引用格式 张子振，张怡雪. 一类考虑先天免疫和非线性治愈率的时滞传染病模型 Hopf 分岔[J]. 山东航空学院学报，2024，41(1)：115-120. ZHANG Z Z，ZHANG Y X. Hopf bifurcation of a delayed epidemic model considering innate immunity and nonlinear cure rate[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2024，41(1)：115-120.