

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

一类具有追踪隔离及媒体效应的
SEQIR 传染病模型动力学分析

罗颜涛, 闫玉平, 郭序帆, 洪海明

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 为了研究追踪隔离以及媒体效应对疾病传播的影响, 基于经典的 SIR 传染病模型, 建立了一类具有追踪隔离及媒体效应的 SEQIR 传染病模型。利用下代矩阵方法给出了模型的基本再生数 R_0 , 基于 R_0 给出模型无病平衡点以及地方病平衡点的存在性。当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, 模型存在唯一的地方病平衡点, 利用数值模拟得到了地方病平衡点的全局渐近稳定性。借助数值模拟, 分析了追踪隔离以及媒体效应对疾病传播的影响, 提高媒体报道中相关信息的准确率, 可以提高染病者的追踪隔离率, 减少感染人数, 从而控制疾病的传播。

关键词: SEQIR 模型; 稳定性; 媒体效应; 追踪隔离; 敏感性分析

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.016

传染病是由各种病原体引起的能在人与人、动物与动物或人与动物之间相互传播的疾病。人类历史上出现了很多传染病疫情, 给全世界人民的生命及财产安全带来了威胁。Kermack 与 McKendrick^[1-2] 为了更加深入了解传染病, 减轻传染病对社会和经济的危害, 提出了最经典的传染病 SIR (susceptible-infection-removed) 仓室模型。该模型运用微分方程模型对传染病进行定性分析以及定量研究, 是传染病“动力学建模及研究”快速发展的开端。随后有许多科研人员开展了传染病动力学的研究^[3-5]。

现实生活中影响疾病传播的因素有很多, 例如, 人口稠密情况、病毒生存环境以及疫苗接种率等。除了上述基本因素外, 媒体报道对传染病的传播与控制有着重要影响。媒体具有传播速度快、传播范围广的特点, 可通过报道感染人数、确诊场所等情况, 宣传防护措施, 有效减少未感染者被感染的概率。隔离措施在历史上被广泛使用, 例如, 鼠疫、霍乱、麻疹、破伤风、狂犬病等人类传染病和猪瘟疫等动物传染病的控制, 近年也用于手足口病、SARS、禽流感等疾病的控制^[3-5]。针对新冠肺炎, 隔离措施进一步完善, 政府通过精准的追踪隔离措施, 有效控制了传染病的扩散^[6]。文献[7]将疫苗接种、媒体报道和治疗控制策略引入其所建立的非线性发生率的麻疹传播 SIR 模型, 形成了具有控制策略的传染病模型, 通过数值模拟证明了媒体报道在抑制传染病的传播方面比治疗措施控制效果更好。文献[8]建立了一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型, 研究表明, 媒体对传染病信息的广泛报道以及提高报道信息的准确率可降低疾病传播, 有利于控制传染病。综上所述, 对大多数传染病而言, 媒体报道、追踪隔离是不可忽略的因

收稿日期: 2023-07-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(12201540); 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2022D01C64); 新疆维吾尔自治区高校科研项目(XJEDU2021Y001); 新疆维吾尔自治区大学生创新项目(S202210755091)

第一作者简介: 罗颜涛(1992—), 男, 河南漯河人, 副教授, 博士, 主要从事生物数学研究。

E-mail: luoyantaoxj@163.com

素。在现实生活中,很多被感染者不一定会会有症状表现,但是仍具有该传染病的传染能力,称这类感染者为无症状感染者。由于无症状感染者的存在,传染病的防控及切断传播源的过程会产生偏差,从而影响整体防疫情况。可见,无症状感染者、媒体报道、追踪隔离都是不可忽略的因素,但是同时具有上述三个因素的研究相对缺乏。因此,建立了一类存在追踪隔离及受媒体报道影响的 SEQIR 传染病模型,从中得出模型的阈值即基本再生数,证明出了各类平衡点的存在性。结合理论分析,对模型进行了数值模拟以及对部分重要参数进行了敏感性分析,并给出一些合理化建议。

1 模型的建立

将 t 时刻某区域的人口分为易感者 $S(t)$ 、无症状感染者 $E(t)$ 、隔离者 $Q(t)$ 、确诊者 $I(t)$ 、恢复者 $R(t)$ 五类,建立一类具有追踪隔离率及媒体效应的 SEQIR 传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - (1-\alpha)\rho_1(I)SI - \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = \gamma[(1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI] - (\eta + \beta + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} = (1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI] + \beta E - (\mu + \zeta + r_1 + \delta)I, \\ \frac{dQ}{dt} = \alpha m(I)\rho_2(I)SI + \delta I + \eta E - (r_2 + \mu)Q, \\ \frac{dR}{dt} = r_1 I + r_2 Q - \mu R. \end{cases} \quad (1)$$

其中: Λ 表示人口的补充, μ 表示自然死亡率, α 表示去过污染场所人数占总人口的比例, γ 表示易感者转化为无症状感染者的概率, ζ 表示感染者的因病死亡率, r_1 和 r_2 分别表示感染者和隔离者的康复率, β 表示无症状感染者到确诊患者的转化率, η 表示无症状感染者的检出率, δ 表示患者隔离率。根据文献 [9], 到过病毒污染场所的易感者追踪隔离函数为 $m(I) = \frac{I}{\sigma + I} (\sigma > 0)$, 其中 σ 表示媒体报道的被追踪隔离者的相关信息的准确率, σ 越小准确率越高; $\rho_1(I) = \beta_1 - \beta_0 f(I)$, $\rho_2(I) = \beta_2 - \beta_{00} f(I)$, β_1, β_2 表示易感者和感染者的最大有效接触率, β_0, β_{00} 表示媒体报道对疾病传播的最大消减作用, $f(I)$ 表示媒体报道对于传染率的饱和函数, 其满足如下条件: (i) $f(0) = 0$; (ii) $f'(I) \geq 0$; (iii) $\lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = 1$; (iv) $\frac{\partial \{[\beta_1 - \beta_0 f(I)]SI\}}{\partial I} > 0, \frac{\partial \{[\beta_2 - \beta_{00} f(I)]SI\}}{\partial I} > 0$ 。

由于式(1)中第 1~3 个式子不含有 Q 和 R , 因此, 只需要对模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - (1-\alpha)\rho_1(I)SI - \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = \gamma[(1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI] - (\eta + \beta + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} = (1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI] + \beta E - (\mu + \zeta + r_1 + \delta)I \end{cases} \quad (2)$$

开展动力学研究。

2 基本再生数和平衡点的存在性

将系统(2)的微分方程组相加得 $\frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} \leq \Lambda - \mu(S + E + I)$, 由此可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S + E + I) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, 系统(2)的可行域为

$$\theta = \{(S, E, I) \in \mathbf{R}_+^3, S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, 0 < S + E + I \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}, \quad (3)$$

且该可行域为系统(2)的正向不变集。由再生矩阵的方法求出基本再生数 R_0 , 其表达式为

$$R_0 = \frac{\Lambda[(1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2][(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta]}{\mu(\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta)}.$$

定理 1 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)存在唯一地方病平衡点 $Q^* = (S^*, E^*, I^*)$ 。

证明 显然系统(2)存在无病平衡点 E_0 。假若系统(2)存在地方病平衡点 Q^* , 那么 Q^* 满足

$$\begin{cases} \Lambda - (1-\alpha)\rho_1(I^*)S^*I^* - \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)S^*I^* - \mu S^* = 0, \\ \gamma[(1-\alpha)\rho_1(I^*)S^*I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)S^*I^*] - (\eta + \beta + \mu)E^* = 0, \\ (1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_1(I^*)S^*I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)S^*I^*] + \beta E^* - (\mu + \zeta + r_1 + \delta)I^* = 0. \end{cases} \quad (4)$$

由式(4)的第 1 及第 2、3 个方程分别可得

$$S^* = \frac{\Lambda}{(1-\alpha)\rho_1(I^*)I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)I^* + \mu} = h(I^*),$$

$$I^* = \frac{\mu + \zeta + r_1 + \delta}{(1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_1(I^*) + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)]} - \frac{\Lambda\beta\gamma}{(\mu + \beta + \eta)[(1-\gamma)(1-\alpha)\rho_1(I^*)I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)I^* + \mu]} = g(I^*),$$

令

$$F(I^*) = h(I^*) - g(I^*) = \frac{\Lambda(1-\gamma) + \frac{\Lambda\beta\gamma}{(\mu + \beta + \eta)}}{(1-\gamma)(1-\alpha)\rho_1(I^*)I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)I^* + \mu} - \frac{I(\mu + \zeta + r_1 + \delta)}{(1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_2(I^*)I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)I^*]},$$

因为 $R_0 > 1$, 所以 $R_0 = \frac{\Lambda[(1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2][(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta]}{\mu(\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta)} > 1$ 。当 $I^* = \frac{\Lambda}{\mu + \zeta + r_1 + \delta}$ 时, $F(I^*) = h(I^*) - g(I^*) < 0$; 当 $I^* = 0$ 时,

$$F(I^*) = h(I^*) - g(I^*) > \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{\Lambda\beta\gamma}{(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu)\mu} - \frac{\Lambda[(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta]}{(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu)\mu} = 0,$$

故 $F(I^*) = 0$ 存在唯一解。将 I^* 代入式(4)得 $S^* = \frac{\Lambda}{(1-\alpha)\rho_1(I^*)I^* + \alpha(1-m(I^*))\rho_2(I^*)I^* + \mu}$ 。

综上, 当 $R_0 > 1$ 时, 存在地方病平衡点 $Q^* = (S^*, E^*, I^*)$ 。故式(2)存在地方病平衡点。定理 1 得证。

3 平衡点稳定性分析

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 局部稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定。

证明 系统(2)无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ 的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -(\eta + \beta + \mu) & \gamma \frac{\Lambda}{\mu} (1-\alpha)(\beta_1 + \alpha\beta_2) \\ \beta & (1-\gamma) \frac{\Lambda}{\mu} (1-\alpha)(\beta_1 + \alpha\beta_2) - (\mu + \zeta + r_1 + \delta) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

为方便计算, 令 $C = \gamma \frac{\Lambda}{\mu} (1-\alpha)[\beta_1 + \alpha\beta_2]$, $D = (1-\gamma) \frac{\Lambda}{\mu} (1-\alpha)[\beta_1 + \alpha\beta_2] - (\mu + \zeta + r_1 + \delta)$, 则无病平衡点处的特征方程为 $\lambda^2 + (\eta + \beta + \mu - D)\lambda - [D(\eta + \beta + \mu) + \beta C] = 0$, 由韦达定理得出两个特征根满足

$$\lambda_1 + \lambda_2 = D - (\eta + \beta + \mu), \lambda_1 \lambda_2 = -[D(\eta + \beta + \mu) + \beta C].$$

当 $R_0 < 1$ 时, 有 $R_0 = \frac{\Lambda[(1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2][(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta]}{\mu(\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta)} < 1$, 则 D 满足

$$D < \left[\frac{(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu)}{(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta} - 1 \right] (\mu + \zeta + r_1 + \delta) < 0,$$

故特征根满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = D - (\eta + \beta + \mu) < 0$ 。又因为

$$\lambda_1 \lambda_2 = -[D(\eta + \beta + \mu) + \beta C] > -[(\eta + \beta + \mu)(1-\gamma) + \gamma\beta] \frac{(\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta)}{(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta} - (\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta) = 0,$$

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0, \lambda_1 \lambda_2 > 0$, 因此 λ_1, λ_2 都小于零。由 Routh-Hurwitz 判据^[10]可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点的 E_0 局部渐近稳定, 当 $R_0 > 1$ 时, 方程存在一个正根, 故无平衡点 E_0 不稳定。

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 当 $R_0 < 1$ 时, 构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{I^2}{\mu + \zeta + r_1 + \delta}, \frac{dV}{dt} = \frac{2I}{\mu + \zeta + r_1 + \delta} \{ (1-\gamma)[(1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI] + \frac{\beta\gamma\Lambda}{\eta + \beta + \mu} \frac{(1-\alpha)\rho_1(I)I + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)I}{(1-\alpha)\rho_1(I)I + \alpha(1-m(I))\rho_2(I)I + \mu} - (\mu + \zeta + r_1 + \delta)I \} \leq 2I^2 \left\{ \frac{\Lambda[(1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2][(1-\gamma)(\eta + \beta + \mu) + \gamma\beta]}{\mu(\eta + \beta + \mu)(\mu + \zeta + r_1 + \delta)} - 1 \right\} \leq 2I^2 (R_0 - 1).$$

因此, $R_0 < 1$ 时 $\frac{dV}{dt} < 0$, 由 LaSalle 不变集原理^[11]得式(2)的无病平衡点 E_0 全局吸引, 再结合定理 2, 可得 E_0 全局渐近稳定。

注 由于模型的维数较高, 各舱室耦合比较紧密, 对于地方病平衡点的存在性以及全局渐近稳定性难以进行计算, 但在数值模拟部分给出一定说明。

4 数值模拟

为研究媒体报道对疾病传播的影响。取函数 $f(I) = \frac{I}{\tau + I}$ (τ 为易感者在媒体报道下对疾病信息的认识的偏差情况) 对式(2)数值模拟。参数取值为 $\beta_2 = 0.9, \mu = 0.2, \zeta = 0.0002, \gamma_1 = 0.1, \alpha = 0.1, \beta_0 = 0.45, \beta_{00} = 0.85, \gamma = 0.5, \Lambda = 0.4, \delta = 0.3, \beta = 0.1, \sigma = 200, \eta = 0.0003, \beta_1 = 0.5, \tau = 0.075$, 其中 (S, E, I) 的初值为 $(1.5, 0.2, 0.5)$, 得到 $R_0 = 1.1993 > 1$ 。将人口输入率 Λ 由 0.4 改为 0.33 得到 $R_0 = 0.9894 < 1$, 如图 1、图 2 所示。

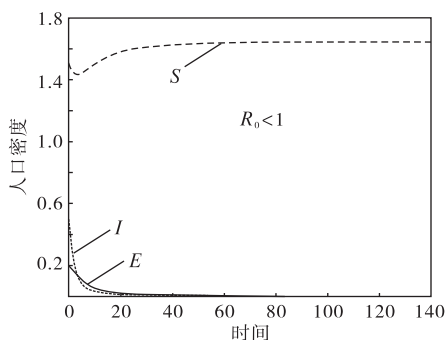


图 1 无病平衡点的三个舱室人口变化

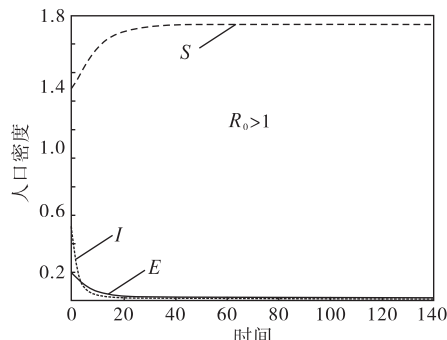


图 2 地方病平衡点的三个舱室人口变化

由图 1 可以看出, 通过增加防护措施, 减少易感人群的产生, E, I 中的人口迅速消失, S 中人口变得安全, 最后整个模型趋于稳定, 符合理论证明, 无病平衡点是全局稳定的。图 2 的基本再生数大于 1, 表明地方病平衡点全局渐近稳定, 病毒将一直存在。因此针对新冠肺炎, 我国政府加强把控输入病例, 加强防控

并对个别病例实行隔离, 组织密接者进行核酸检测, 防止病毒长期存在并蔓延。

对基本再生数敏感性分析, 各参数初值取 $\beta_2=0.9, \zeta=0.0002, \gamma_1=0.1, \alpha=0.1, \beta_0=0.45, \beta_{00}=0.85, \gamma=0.5, \Delta=0.4, \delta=0.3, \beta=0.1, \sigma=200, \eta=0.0003, \beta_1=0.5, \tau=0.075, (S, E, I)$ 的初值 $(1.5, 0.2, 0.5)$, 考察各参数取值在 $(0, 1)$ 上基本再生数 R_0 的变化, 见图 3~6。

由图 3 可以看出, 自然死亡率 μ 对基本在生数影响很小。由图 4 可以看出, 因病死亡率 ζ 、患者隔离率 δ 、患者康复率 r_1 的提升会降低疾病的传播, 它们切断了传染源, 有阻止疾病传播的作用, 比如埃博拉病毒, 因为其致死率非常高, 病人无法在短时间内携带病毒移动, 使得病毒没有在全球扩散开来。

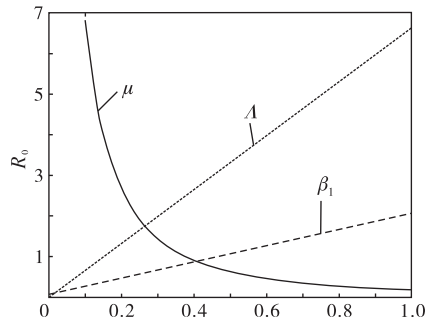


图 3 参数 β_1, Δ, μ 在区间 $(0, 1)$ 对 R_0 的影响

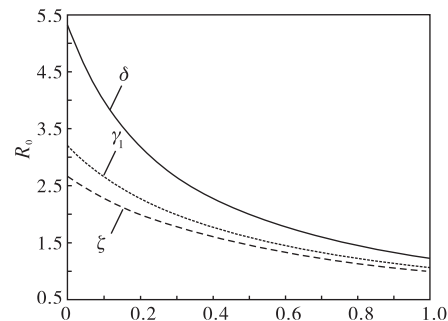


图 4 参数 ζ, δ, γ_1 在区间 $(0, 1)$ 对 R_0 的影响

由图 5 可以看出, 检测率 η 、未去污染场所的人数比例 α 、易感者未被转化为无症状感染者的概率 γ 的提高对疾病的传播有抑制作用。图 3 中人口常数输入率 Δ , 以及图 6 的有效接触率 β_1 和 β_2 对疾病的传播有直接促进作用, 因为病毒传播必须要传播媒介和易感者。所以, 要减少病毒的传播, 不仅可以增加对于基本再生数有负相关的参数条件, 也可以减少正相关的参数条件。如针对新冠肺炎, 采取戴口罩、远程工作和线上教学等手段减少有效接触率, 从而阻止病毒大面积的扩散。

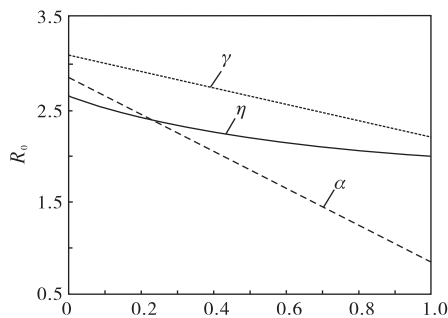


图 5 参数 α, γ, η 在区间 $(0, 1)$ 对 R_0 的影响

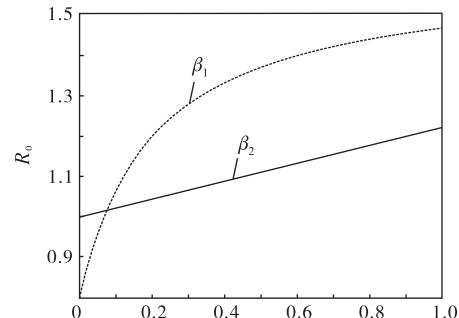


图 6 参数 β_1, β_2 在区间 $(0, 1)$ 对 R_0 的影响

5 结束语

为研究追踪隔离率及媒体效应疾病防控的影响, 建立了一类具有媒体效应且存在追踪隔离的 SEQIR 模型, 研究了模型 (2) 各个平衡点的存在性、稳定性和持久性。通过对模型进行数值模拟发现: 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点处全局渐近稳定, 与定理 3 一致; 在可行域内存在地方病平衡点。此外, 对影响因子 $\beta_0, \beta_{00}, \tau$ 和 σ 进行了敏感性分析, 得到采取媒体报道和追踪隔离措施可有效控制传染病的蔓延。若添加对疫苗接种情况的考虑, 模型能够更加真实地反映疾病在现实复杂社会网络中的传播情况, 更严谨细致地研究媒体报道与感染者的关系。

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G A. A contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society A, 1927, 115(772): 700-721. DOI:10.1098/rspa.1927.0118.

- [2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-I. 1927[J]. Bulletin of mathematical biology, 1991, 53(1/2): 33-55.
- [3] SHI L, ZHAO H Y, WU D Y. Modelling and analysis of HFMD with the effects of vaccination, contaminated environments and quarantine in mainland China[J]. Mathematical biosciences and engineering, 2019, 16(1): 474-500.
- [4] YANG J Y, WANG G Q, ZHANG S. Impact of household quarantine on SARS-Cov-2 infection in mainland China: a mean-field modelling approach[J]. Mathematical biosciences and engineering, 2020, 17(5): 4500-4512.
- [5] SATO H, NAKADA H, YAMAGUCHI R, et al. When should we intervene to control the 2009 influenza A (H1N1) pandemic[J]. Eurosurveillance, 2010, 15(1): 19455.
- [6] 王霞, 唐三一, 陈勇, 等. 新型冠状病毒肺炎疫情影响下武汉及周边地区何时复工? 数据驱动的网络模型分析[J]. 中国科学: 数学, 2020, 50(7): 969-978.
- [7] 雷仙鹤, 刘三红, 庞留勇. 疫苗接种、媒体报道和治疗措施对传染病传播影响的数学模型研究[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(9): 275-283.
- [8] 张钰倩, 张太雷, 侯雯珊, 等. 一类具有媒体效应和追踪隔离的 SEQIR 时滞传染病模型[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(2): 159-169.
- [9] 李峰. 具有无症状感染的传染病动力学建模分析及应用[D]. 太原: 中北大学, 2021.
- [10] 李从清. 系统稳定性的劳斯判据与赫尔维茨判据的等价性论证[J]. 天津城市建设学院学报, 2009, 15(3): 207-210.
- [11] 徐润. 关于李雅普诺夫稳定性理论若干定理的推广[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2003(2): 87-90.

A Class of SEQIR Infectious Disease Models with Tracking Isolation Rate and Media Effect

LUO Yantao, YAN Yuping, GUO Xufan, HONG Haiming

(School of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: In order to study the impact of tracking isolation and media effect on disease transmission, a class of SEQIR infectious disease model with tracking isolation and media effect is developed based on the classical SIR infectious disease model. Firstly, the basic regeneration number R_0 of the model is given by the next-generation matrix method, and the existence of the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point of the model is given based on the basic regeneration number R_0 . When $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium point is global asymptotically stable, and when $R_0 > 1$, the model has a unique endemic equilibrium point, and the global asymptotic stability of the endemic equilibrium point is obtained by numerical simulation. Finally, with the help of numerical simulation, the effects of tracking isolation and media effects on disease transmission are analyzed.

Keywords: SEQIR model; stability; media effects; tracking isolation; sensitivity analysis

(责任编辑: 贾晶晶)

引用格式 罗颜涛, 闫玉平, 郭序帆, 等. 一类具有追踪隔离及媒体效应的 SEQIR 传染病模型动力学分析[J]. 山东航空学院学报, 2024, 41(1): 121-126. LUO Y T, YAN Y P, GUO X F, et al. A class of SEQIR infectious disease models with tracking isolation rate and media effect[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2024, 41(1): 121-126.