

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

具有饱和和发生率的 SIS 传染病模型稳定性

努尔别克·艾孜玛洪, 瓦提·对山汗, 哈依沙尔·海拉提, 张世超, 向 华

(新疆农业大学 数理学院, 新疆 乌鲁木齐 830052)

摘要: 考虑了一类具有易感人群饱和和发生率的 SIS 传染病数学模型, 定义了基本再生数, 证明了地方病平衡点的存在唯一性、局部和全局渐近稳定性, 分析了饱和和发生率参数对模型动力学行为的影响, 并通过数值模拟验证了所得结论的准确性。

关键词: 传染病模型; SIS 模型; 饱和和发生率; 基本再生数; 稳定性

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.017

0 引言

传染病对人类的生活有着巨大的影响, 传染病一旦失控, 将给人类带来巨大的恐慌和灾难。因此, 如何有效地进行传染病的防治工作, 已成为众多学者研究的重点。利用数学建模的方法, 对传染病的传播规律进行研究, 实现人类干预疾病传播, 从而达到控制疾病传播的目的, 是一个重要的研究方向。

有些传染病(比如流感), 感染者康复后会重新成为易感者的, 刻画这种传染病的数学模型称为经典 SIS(Susceptible-Infected-Susceptible) 模型^[1-2]

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta IS + \alpha I - \mu S, \\ I'(t) = \beta IS - \alpha I - \mu I. \end{cases} \quad (1)$$

其中, S 是易感人群, I 是感染者, Λ 是出生率, β 是感染率, α 是恢复率, μ 是自然死亡率。模型(1)的动力学行为比较简单, 当基本再生数 $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\alpha+\mu)} < 1$ 时, 存在唯一的无病平衡点并且全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$

时, 存在唯一地方病平衡点并且全局渐近稳定。模型(1)中, βIS 称为双线性发生率(疾病的传播率与人口的总数量成正比例关系), 在传染病模型中被广泛使用, 但有些传播等疾病不适合采用双线性发生率, 因此研究人员考虑了具有饱和效应的非线性发生率, 如 $\frac{\beta IS}{S+I}$ ^[3], $\frac{\beta IS}{1+\sigma I}$ ^[4-6], $\frac{\beta IS}{1+\sigma N}$ ^[7], $\frac{\beta IS}{\sigma+I}$ ^[8]。

本文在一种新的易感人群饱和和发生率 $\frac{\beta IS}{1+\sigma S}$ 下, 研究 SIS 模型

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \frac{\beta IS}{1+\sigma S} + \alpha I - \mu S, \\ I'(t) = \frac{\beta IS}{1+\sigma S} - (\alpha + \mu) I \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2024-02-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071382); 新疆维吾尔自治区自然基金项目(2022D01A198, 2022D03027)

第一作者简介: 努尔别克·艾孜玛洪(1979—), 男, 哈萨克族, 新疆昭苏人, 讲师, 博士, 硕士生导师, 主要从事动力系统及其应用研究。E-mail: Nurbek80@qq.com

的动力学行为,比较其与模型(1)的动力学行为上的区别。饱和发生率 $\frac{\beta IS}{1+\sigma S}$ 具有重要的生物意义,有些情况下易感人群数量越多,传染病不一定快速蔓延。特别是针对儿童传染病,教师及家长常教育幼儿要注意个人卫生,尽量不要到人多的地区。所以,把接触率看作易感人群的函数符合实际的假设^[9]。参数 $\sigma \in [0, 1]$ 起到一定的抑制效应, σ 越小抑制作用越小,当 $\sigma = 0$ 时,模型回到正常的双线性发生率。本文主要研究参数 σ 对模型的基本再生数、平衡点以及稳定性的影响。

基于模型的生物意义,除了 σ 是非负外,假设模型所有参数是正的,即 $\Lambda, \mu, \alpha, \beta > 0$, 并且满足初值条件 $S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 > 0$ 。容易验证模型(2)的解存在且是唯一的、正的、有界的。容易验证,模型(2)解的存在区域为 $D = \{(S, I) | S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}$ 。

1 平衡点的存在性

定义基本再生数 $R_0 = \frac{\beta \Lambda}{(\mu + \sigma \Lambda)(\alpha + \mu)}$ 。当饱和参数 $\sigma = 0$ 时,与模型(1)的基本再生数一致。

定理 1 当 $R_0 \leq 1$ 时,模型(2)仅存在无病平衡点 $E_0(\frac{\Lambda}{\mu}, 0)$; 当 $R_0 > 1$ 时,模型(2)存在唯一的地方病平衡点 $E_1(S^*, I^*)$, 其中

$$S^* = \frac{\alpha + \mu}{\beta - (\alpha + \mu)\sigma}, I^* = \frac{(\alpha + \mu)(\mu + \Lambda\sigma)}{\mu[\beta - (\alpha + \mu)\sigma]}(R_0 - 1)。$$

证明 显然存在无病平衡点 E_0 。对于地方病平衡点,满足

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\beta IS}{1 + \sigma S} + \alpha I - \mu S = 0, \\ \frac{\beta IS}{1 + \sigma S} - (\alpha + \mu)I = 0. \end{cases} \tag{3}$$

由式(3)的第 2 个方程可得 $S^* = \frac{\alpha + \mu}{\beta - (\alpha + \mu)\sigma}$ 。当 $R_0 > 1$ 时,由基本再生数定义可得 $\beta > \sigma(\alpha + \mu) + \frac{\mu}{\Lambda}(\alpha + \mu)$, 即不等式 $\beta - \sigma(\alpha + \mu) > 0$ 成立,因此 $S^* > 0$ 。再将 S^* 代入式(3)的第 1 个方程得到

$$I^* = \frac{\Lambda\beta - (\alpha + \mu)(\mu + \Lambda\sigma)}{\mu[\beta - (\alpha + \mu)\sigma]} = \frac{(\alpha + \mu)(\mu + \Lambda\sigma)}{\mu[\beta - (\alpha + \mu)\sigma]}(R_0 - 1) > 0。$$

所以,当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点存在且唯一。

2 平衡点的局部渐近稳定性

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时,模型(2)的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时,模型(2)的无病平衡点 E_0 不稳定。

证明 模型(2)在点 E_0 处的雅可比矩阵为

$$J_1(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & \alpha - \frac{\beta \Lambda}{\mu + \sigma \Lambda} \\ 0 & \frac{\beta \Lambda}{\mu + \sigma \Lambda} - \alpha - \mu \end{pmatrix}。$$

特征方程为

$$|\lambda E - J_1(E_0)| = (\lambda + \mu) \left[\lambda - \frac{\beta \Lambda}{\mu + \sigma \Lambda} + \alpha + \mu \right] = 0,$$

故特征根为

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = \frac{\beta \Lambda}{\mu + \sigma \Lambda} - \alpha - \mu = (\alpha + \mu)(R_0 - 1)。$$

当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 即无病平衡点 E_0 局部渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, 即无病平衡点 E_0 不稳定。

定理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 地方平衡点 E_1 局部渐近稳定。

证明 模型(2)在 $E_1(S^*, I^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J_2(E_1) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^*}{(1+\sigma S^*)^2} - \mu & -\mu \\ \frac{\beta I^*}{(1+\sigma S^*)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

对应的特征方程为

$$|\lambda E - J_2(E_1)| = \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (4)$$

其中

$$p = \frac{\beta I^*}{(1+\sigma S^*)^2} + \mu, q = \mu \frac{\beta I^*}{(1+\sigma S^*)^2}.$$

当 $R_0 > 1$ 且 $\beta > \sigma(\alpha + \mu)$ 时, $S^* > 0, I^* > 0$, 即 $p > 0, q > 0$ 。因此特征方程(4)有的两个负特征值, 故地方病平衡点 $E_1(S^*, I^*)$ 是局部渐近稳定的。

3 平衡点的全局渐近稳定性

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(2)的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

证明 模型(2)解的存在区域为

$$D = \{(S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{\mu}\}.$$

适当放大模型(2)的第二个方程, 得

$$\frac{dI}{dt} \leq \left(\frac{\beta \Lambda}{\mu + \sigma \Lambda} - (\alpha + \mu) \right) I = (\alpha + \mu)(R_0 - 1)I.$$

当 $R_0 < 1$ 时, 有 $\frac{dI}{dt} < 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。易知 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$, 所以 E_0 在解的存在区域 D 内是全局吸引的。

结合 E_0 在 D 内的局部渐近稳定可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的。

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)的地方病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的。

证明 令

$$f(S, I) = \Lambda - \frac{\beta IS}{1 + \sigma S} + \alpha I - \mu S, g(S, I) = \frac{\beta IS}{1 + \sigma S} - (\alpha + \mu)I.$$

取 Dulac 函数 $D(I) = \frac{1}{I}$, 则函数 D 在解的存在区域内连续可导, 而且有

$$\frac{\partial(fD)}{\partial S} + \frac{\partial(gD)}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\Lambda}{I} - \frac{\beta S}{1 + \sigma S} + \alpha - \frac{\mu S}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\beta S}{1 + \sigma S} - (\alpha + \mu - b) \right) = -\frac{\beta}{(1 + \sigma S)^2} - \frac{\mu}{I} < 0.$$

由 Bendixson-Dulac 判别法知, 模型不存在闭轨线。又因为, 当 $R_0 > 1$ 时, 模型存在的唯一地方病平衡点 E_1 是局部渐近稳定的, 故地方病平衡点 E_1 是全局渐近稳定的。

4 数值模拟

对模型(2)进行数值模拟。根据文献[9-10], 并适当调整基本再生数 R_0 , 对模型中的参数选定了以下近似值: $\Lambda = \mu = 0.0011, \beta = 2, \sigma = 0.1, \alpha = 1.9$ 。这时, 基本再生数 $R_0 \approx 0.956 < 1$, 无病平衡点 $E_0 = (1, 0)$, 而且 E_0 是渐近稳定的, 见图 1。这与定理 1、定理 2 及定理 4 的结论一致。当 $\beta = 2.2$ 时, 基本再生数 $R_0 \approx 1.052 > 1$, 存在地方病平衡点 $E_1 \approx (0.946, 0.054)$, 而且 E_1 是渐近稳定的, 见图 2。这与定理 1、定理 3 及

定理 5 的结论一致。

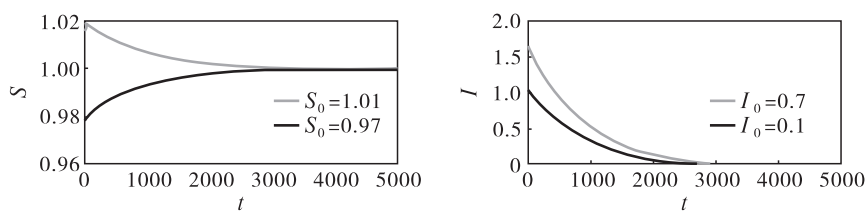


图 1 $R_0 < 1$ 时, E_0 的渐近稳定性

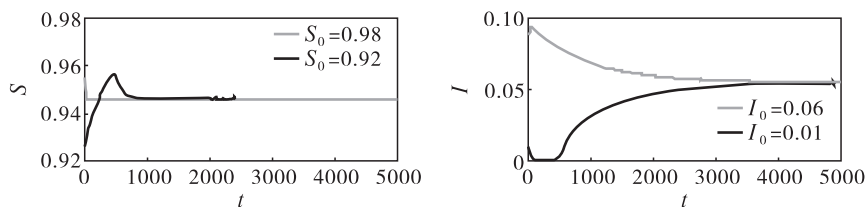


图 2 $R_0 > 1$ 时, E_1 的渐近稳定性

5 结论

模型(2)的渐近稳定性结果与模型(1)基本类似。当基本再生数 $R_0 < 1$ 时,存在唯一的无病平衡点并且全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,模型(2)存在唯一一地方病平衡点并且全局渐近稳定。

当基本再生数 R_0 和平衡点 E_1 看作参数 $\sigma \in [0, 1]$ 的函数时,随着参数 σ 的增大, $R_0(\sigma)$ 和 $I^*(\sigma)$ 单调递减, $S^*(\sigma)$ 单调递增。说明饱和参数 σ 对模型(2)的基本再生数 R_0 和地方病平衡点 E_1 的影响较大,是实际问题中不可忽略的重要因素之一。当 $\sigma = 0$ 时,基本再生数较大,即传染病快速蔓延;当 σ 较大时,基本再生数变小,传染病不一定快速蔓延,比如流行性腮腺炎等儿童传染病不会快速蔓延。

参考文献:

[1] 王焱,刘桂荣. 复杂网络上随机 SIS 模型的渐近行为[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2021,30(3):245-250.

[2] 郭金生,张生成. 一类具有垂直传染的非线性发生率的 SIS 传染病模型的稳定性分析[J]. 贵州大学学报(自然科学版),2017,34(3):6-9.

[3] 田雪宏,刘茂省. 具有饱和发生率的随机多群体 SIS 传染病动力学性态研究[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2022,39(6):631-639.

[4] 王青,路秋英. 带有饱和发生率和线性饱和治疗函数的 SIS 模型的动力学研究[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版),2018,39(5):630-636.

[5] 李芳,刘茂省. 具有媒体饱和和效应影响的时滞 SIS 模型研究[J]. 数学的实践与认识,2017(10):215-221.

[6] 谭宏武. 具有饱和发生率的离散 SIS 模型的动力学性态[J]. 山西师范大学学报(自然科学版),2013,27(4):15-18.

[7] 王来全,夏米西努尔·阿布都热合曼. 一类具有饱和发生率的 COVID-19 SEIQR 传染病模型[J]. 山东理工大学学报(自然科学版),2023,37(5):43-47.

[8] 赖祥鑫,韦煜明,彭华勤. 一类具有媒体报道影响和饱和发生率的 SIRI 传染病模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版),2020,37(3):20-31.

[9] LI Y,LIU X,WANG L,et al. Hopf bifurcation of a delay SIRS epidemic model with novel nonlinear incidence:application to scarlet fever[J]. International journal of biomathematics,2018,11:1850091.

- [10] AZIMAQIN N,PENG Z,REN X,et al. Vaccine failure, seasonality and demographic changes associate with mumps outbreaks in Jiangsu Province, China: age-structured mathematical modelling study[J]. *Journal of theoretical biology*,2022,544:111125.

Stability of a SIS Epidemic Model with Saturation Incidence

AZIMAQIN Nurbek,DUISHANHAN Wati,QALAT Qaysar,ZHANG Shichao, XIANG Hua
(*College of Mathematics and Physics, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China*)

Abstract: A class of SIS infectious disease mathematical model with susceptible population saturation incidence rate is considered, the basic reproduction number is defined, and the existence, uniqueness and stability of the equilibrium are proved. The influence of saturation incidence parameters on the dynamic behavior of the model is analyzed. Finally, the accuracy of all conclusions is verified by numerical verification.

Keywords: epidemic model; SIS model; saturation rate; basic reproduction number; stability

(责任编辑:贾晶晶)

- 引用格式 努尔别克·艾孜玛洪,瓦提·对山汗,哈依沙尔·海拉提,等. 具有饱和发生率的 SIS 传染病模型稳定性[J]. 山东航空学院学报,2024,41(1):127-131. AZIMAQIN N,DUISHANHAN W,QALAT Q,et al. Stability of a SIS epidemic model with saturation incidence[J]. *Journal of Shandong University of Aeronautics*,2024,41(1):127-131.

(上接第 85 页)

Research on Risk Prediction of Airport Control System Based on GM-BP

SI Qingmin,ZHAO Yonghang,SUI Yukun,LI Junyan
(*School of Civil Aviation, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China*)

Abstract: Airport control is a crucial part of the air transportation process, and its safety is vital to the sustainable development of air transportation. This paper mainly focuses on predicting the risks that may occur during the operation of the airport control system, and the control system risk indicator system is constructed based on the SHEL model. Three types of events, namely, runway runout, runway incursion, and off-runway grounding, are selected from the system, and on the basis of the traditional gray prediction GM(1,1) model, BP neural network is added to form a GM-BP gray neural network prediction model for risk prediction. The prediction results show that the GM-BP prediction model used in this paper has high accuracy, and thanks to its comprehensive data processing capability and effective modeling capability for complex systems, it has a wide range of applicable scenarios in the operational risk warning of airport control system, which provides a scientific reference for the subsequent implementation of risk management for possible risks.

Keywords: gray theory; neural network; risk prediction; aviation safety

(责任编辑:唐立平)

- 引用格式 侣庆民,赵永航,隋玉鲲,等. 基于 GM-BP 的机场管制系统风险预测[J]. 山东航空学院学报,2024,41(1):79-85. SI Q M,ZHAO Y H,SUI Y K,et al. Research on risk prediction of airport control system based on GM-BP[J]. *Journal of Shandong University of Aeronautics*,2024,41(1):79-85.