【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

中立型 Caputo 分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性

王　奇[1]，邓茜茜[1]，解晨曦[1]，胡玉婷[2]

（1.安徽大学 数学科学学院；2.安徽大学 大数据与统计学院，安徽 合肥 230601）

摘　要：考虑具有无穷时滞和多个 Caputo 分数阶导数的中立型分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性。利用压缩映射原理及无穷时滞的相空间理论得到方程解的存在性，并利用分数阶微积分的广义 Gronwal 型不等式及分数阶积分算子的单调性得到解的 Hyers-Ulam 稳定性。

关键词：Caputo 分数阶泛函微分方程；压缩映射原理；Gronwall 不等式；Hyers-Ulam 稳定性

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.019

分数阶微积分和分数阶微分方程在数学、物理、工程等领域有着广泛的应用。许多学者对分数阶泛函微分方程解的存在性、稳定性、吸引性问题进行了广泛的研究[1-6]。广义 Gronwall 型不等式是研究分数阶泛函微分方程的存在性、稳定性问题的重要工具[3-4]。文献[5]利用广义 Gronwall 型不等式、分数阶积分算子关于变量的单调性，研究了具有 Lipschitz 条件的中立型 Caputo 分数阶泛函微分系统的有限时间稳定性。类似的结果见文献[6]。更多分数阶泛函微分方程解的存在性、稳定性等结果见文献[7-8]。

具有多个 Caputo 分数阶导数的分数阶泛函微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性的结果很少。受上述文献的启发，本文利用广义 Gronwall 型不等式和分数阶积分算子关于变量的单调性及不动点方法，研究具有多个 Caputo 分数阶导数的分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t) = \sum_{i=1}^{m} {}^cD^{\beta_i} g_i(t, x_t) + f(t, x_t), t \in [0, T] = J, \\ x(t) = \varphi(t), t \in (-\infty, 0] = I, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$0 < \beta_i < \alpha \leqslant 1$，${}^cD^{\alpha}$ 和 ${}^cD^{\beta_i}(i = 1, \cdots, m)$ 分别表示函数 $x(t)$ 的 α - 阶和 β_i- 阶 Caputo 分数阶导数，$g_i \in C(J \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$，$f \in C(J \times \Omega, \mathbf{R})$，$\varphi \in C(I, \mathbf{R}) = B$，$x_t \in B$ 表示 $x_t(s) = x(t+s)$，$s \in I$，$t \in J$。

1　预备知识

定义 1[1-2]　对函数 $h \in L^1([a, b], \mathbf{R}^+)$，定义其 α - 分数阶积分为

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) \mathrm{d}s, \alpha > 0。$$

定义 2[1-2]　在区间 $[a, b]$ 有意义的函数 $h(t)$ 的 Caputo 分数阶导数定义为

收稿日期：2023-08-02

基金项目：安徽省教育厅自然科学基金重点项目(KJ2018A0027)；安徽大学大学生创新训练项目(X202310357005)

第一作者简介：王　奇(1974—　)，男，安徽灵璧人，副教授，博士，主要从事泛函微分方程及生物数学研究。
E-mail：wq200219971974@163.com

$$ {}^{c}D_{a^+}^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)\mathrm{d}s, $$

其中，$n=[\alpha]+1$，$[\alpha]$ 为取整函数。当 $a=0$ 时，记 ${}^{c}D^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)\mathrm{d}s$。

定义 3[1-2] 若 $\alpha>0$，记 $m=[\alpha]+1$。则方程 ${}^{c}D^{\alpha}x(t)=0$ 的通解为

$$ x(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1},c_i\in\mathbf{R},i=0,\cdots,m-1。 $$

此外，当 $x\in C^m([0,T],\mathbf{R})$ 时，有

$$ I^{\alpha}{}^{c}D^{\alpha}x(t)=x(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{m-1}t^{m-1},c_i\in\mathbf{R},i=0,\cdots,m-1。 $$

引理 1[4] 设 u 是定义在区间 $I=[a,b]$ 上的非负连续函数，$p(t):I\to(0,\infty)$ 是一个非递减的连续函数。设 $q(t):I\to[0,\infty)$ 为非递减连续函数。如果函数 u 满足不等式

$$ u(t)\leqslant p(t)+q(t)\sum_{i=1}^{n}(I_{a^+}^{\alpha_i}u)(t),\alpha_i>0,t\in I, \tag{2} $$

则对于每一个自然数 k 使得 $(k+1)\min\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}>1$，有 $u(t)\leqslant P_k(t)\exp(\int_a^t H_{k+1}(t,s)\mathrm{d}s)$，$t\in I$，其中

$$ P_k(t):=p(t)(1+\sum_{j=1}^{k}(q(t))^j\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=j,\\0\leqslant i_1,\cdots,i_n\leqslant j}}\begin{pmatrix}j\\i_1,\cdots,i_n\end{pmatrix}\frac{(t-a)^{i_1\alpha_1+\cdots+i_n\alpha_n}}{\Gamma(1+i_1\alpha_1+\cdots+i_n\alpha_n)}), $$

$$ H_{k+1}(t,s):=(q(t))^{k+1}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=k+1,\\0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant k+1}}\begin{pmatrix}k+1\\j_1,\cdots,j_n\end{pmatrix}\frac{(t-s)^{j_1\alpha_1+\cdots+j_n\alpha_n}}{\Gamma(1+j_1\alpha_1+\cdots+j_n\alpha_n)}, $$

$\begin{pmatrix}k+1\\j_1,\cdots,j_n\end{pmatrix}$ 表示组合数公式。

引理 2[5] 任意函数 $x\in C^1([a,b],\mathbf{R})$，$x(t)\geqslant0$，$x'(t)\geqslant0$，$\alpha>0$，则 $\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s$ 关于 t 单调递增。

引理 3[6] 对任意函数 $x\in C([a,b],[0,\infty))$，$\alpha>0$，则

$$ \sup_{\tau\in[0,t]}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\in[0,s]}x(\sigma)\mathrm{d}s。 $$

定义 4 如果存在一个正实数 c，使得对任意的 $\varepsilon>0$ 和满足不等式的函数 x，

$$ \begin{cases}\|{}^{c}D^{\alpha}x(t)-\sum_{i=1}^{m}{}^{c}D^{\beta_i}g_i(t,x_t)-f(t,x_t)\|\leqslant\varepsilon,t\in J,\\x(t)=\varphi(t),t\in I\end{cases} \tag{3} $$

存在不等式(3)的解 $y(t)$，使得不等式 $\|x(t)-y(t)\|\leqslant c\varepsilon$，$t\in J$ 成立，则称方程(1)是 Hyers-Ulam 稳定的。下面给出文献[9]中关于无穷时滞的相空间 $(B,\|\cdot\|_B)$ 的定义。

设 B 是一个从 $(-\infty,0]$ 到 X 的函数构成的线性拓扑空间，具有半范数 $\|\cdot\|_B$，如果以下条件成立，则称之为可容许相空间 B。

(A1) 如果 $x:(-\infty,T]\to X$，$x_0\in B$，那么对于任意 $t\in[0,T]$，以下条件成立：(a) $x_t\in B$；(b) 对于某个正常数 H，$\|x(t)\|\leqslant H\|x_t\|_B$；(c) 存在函数 $K(t)$，$M(t):[0,\infty)\to[1,\infty)$ 使得

$$ \|x_t\|_B\leqslant K(t)\sup\{\|x(s)\|:s\in[0,t]\}+M(t)\|x_0\|_B, \tag{4} $$

其中，$K(t)$ 是连续的，$M(t)$ 是局部有界的，$K(t)$，$M(t)$ 与 x 无关，

$$ K_T=\sup\{\|K(s)\|:s\in[0,T]\},M_T=\sup\{M(s):s\in[0,T]\}。 $$

(A2) 对于(A1)中的函数 $x(t)$，函数 $x_t\in B$ 和在区间 $[0,T]$ 上连续。

(A3) 空间 B 是巴拿赫空间。

2　主要结果

(H_1) 若函数 $f, g_i \in C(J\times B, \mathbf{R}^n)$，则存在函数

$$c_{i1}(t)\in L^{\frac{1}{q_{i1}}}(J,\mathbf{R}^+), q_{i1}\in[0,\alpha-\beta_i], i=1,2, q_3, q_4\in[0,\alpha)$$

使得

$$\|g_i(t,u)-g(t,v)\|\leqslant c_{i1}(t)\|u-v\|, \|f(t,u)-f(t,v)\|\leqslant c_3(t)\|u-v\|_B, g_i(0,0)=f(0,0)=0;$$
$$\|g_i(t,u)\|\leqslant c_{i1}(t)\|u\|+c_{i2}, \|f(t,u)\|\leqslant c_3(t)\|u\|_B+c_4(t)。$$

(H_1') 若函数 $g_i\in C(J\times B,\mathbf{R}^n)$，$f\in C(J\times B,\mathbf{R}^n)$，则存在 $C_{i1}(t)$，$i=1,3$，使得

$$\|g_i(t,u)-g_i(t,v)\|\leqslant c_{i1}(t)\|u-v\|, \|f(t,u)-f(t,v)\|\leqslant c_3(t)\|u-v\|_B,$$
$$g_i(0,0)=f(0,0)=0, \|g_i(t,u)\|\leqslant c_{i1}(t)\|u\|+c_{i2}, \|f(t,u)\|\leqslant c_3(t)\|u\|_B+c_4,$$

其中

$$c_{i2}=\sup\{\|g_i(t,0),t\in J\|\}, c_4=\sup\{\|f(t,0)\|, t\in J\}, \hat{c}_{i1}=\sup\{c_{i1}(t),t\in J\},$$
$$\hat{c}_3=\sup\{c_3(t),t\in J\}。$$

(H_2) $\displaystyle\sum_i^m \frac{A'T^{\alpha-\beta_i-q_{i1}}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}\left(\frac{1-q_{il}}{\alpha-\beta_i-q_{i1}}\right)^{1-q_{i1}}\|c_{i1}\|_{L^{\frac{1}{q_{i1}}}(J)}+\frac{A'T^{\alpha-q_3}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-q_3}{\alpha-q_3}\right)^{1-q_3}\|c_3\|_{L^{\frac{1}{q_3}}(J)}<1, t\in J$。

(H_2') $\displaystyle\sum_i^m \frac{\hat{c}_{i1}T^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}+\frac{\hat{c}_3K_TT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<1$。

定理 1　若条件(H_1)(H_2)成立，则方程(1)的解在区间 J 上存在且唯一。

证明　方程(1)等价于

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(0)+\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{g_i(0,\varphi(0))t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}+\sum_{i=1}^m\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta_i-1}g_i(s,x(s))\mathrm{d}s+\\ \quad\displaystyle\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_s)\mathrm{d}s, t\in J,\\ \varphi(t), t\in I。\end{cases}$$

定义函数 $\tilde{\varphi}$ 为 $\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\varphi(0),t\in J,\\ \varphi(t),t\in I。\end{cases}$ 令 $x(t)-\tilde{\varphi}(t)=z(t)$，$t\in J$，则 $z(t)=\begin{cases}x(t)-\varphi(0),t\in J,\\ 0,t\in I。\end{cases}$ 由此得

$$z(t)=\sum_{i=1}^m\frac{g_i(0,\varphi(0))t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}+\sum_{i=1}^m\frac{\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta_i-1}g_i(s,z_s+\tilde{\varphi}_s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}+\frac{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,z_s+\tilde{\varphi}_s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}, t\in J。$$

则方程(1)解的存在性等价于上述方程解的存在性。定义集合 $\Upsilon=\{z\in C(J,\mathbf{R}^n):z_0=0\}$。则 Υ 是闭集并且完备。对任意的 $z\in\Upsilon$，有 $\|z\|_\beta=\|z\|$。考虑 $\Omega=\{x\in\Upsilon\|x\|_\beta\leqslant r\}$。定义算子 $N:\Omega\to\Omega$ 为

$$Nx(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^m\frac{g_i(0,\varphi(0))t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}+\sum_{i=1}^m\frac{\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta_i-1}g_i(s,x_s+\tilde{\varphi}_s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}+\frac{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_s+\tilde{\varphi}_s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}, t\in J,\\ 0, t\in I;\end{cases}$$

情形 1　$N\Omega\subseteq\Omega$。对任意的 $x\in\Omega$，利用假设条件(H_1')和式(4)，有

$$\|x_t+\tilde{\varphi}_t\|B\leqslant\|x_t\|_B+\|\tilde{\varphi}_t\|_B\leqslant$$
$$K(t)\sup_{t\in J}\{\|x(s)\|:s\in[0,t]\}+M(t)\|x_0\|_B+K(t)\sup_{t\in J}\{\|\tilde{\varphi}(s)\|:s\in[0,t]\}+M(t)\|\tilde{\varphi}_t\|_B\leqslant$$
$$K_T\sup_{t\in J}\{\|x(s)\|:s\in[0,t]\}+K_T\sup_{t\in J}\{\|\varphi(0)\|:s\in[0,t]\}+M_T\|\varphi\|_B\leqslant$$
$$K_Tr+K_T\|\varphi(0)\|+M_T\|\varphi\|_B\leqslant K_Tr+K_TH\|\varphi\|_B+M_T\|\varphi\|_B=:A', t\in J。$$

所以

$$\|Nx\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\|g_i(0,\varphi(0))\| t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}(c_{i1}(s))\|x_s+\tilde{\varphi}_s\|_B + c_{i2})\mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(c_3(s)\|x_s+\tilde{\varphi}_s\|_B + c_4(s))\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\|g_i(0,\varphi(0))\| T^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{A'T^{\alpha-\beta_i-q_{i1}}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}\left(\frac{1-q_{i1}}{\alpha-\beta_i-q_{i1}}\right)^{1-q_{i1}} \|c_{i1}\|_{L^{\frac{1}{q_{i1}}}(J)} +$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{c_{i2}T^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \frac{A'T^{\alpha-q_3}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-q_3}{\alpha-q_3}\right)^{1-q_3} \|c_3\|_{L^{\frac{1}{q_3}}(J)} = C, t \in J,$$

因此$\sup\limits_{t\in J}\{\|(Nx(t))\|\} \leqslant C$，$\|Nx\|_\beta \leqslant \|\varphi\|_B + C = C' \leqslant r$，也就是 $N\Omega \subseteq \Omega$。

情形 2　N 是压缩映射。选择任意 $x,y \in \Omega$ 与 $x_0 = y_0 = 0, t \in I$。然后利用条件(H_1')和式(4)得到

$$\|Nx-Ny\| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}c_{i1}(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}c_3(s)\mathrm{d}s\right]\|x-y\| \leqslant$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{A'T^{\alpha-\beta_i-q_{i1}}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)}\left(\frac{1-q_{i1}}{\alpha-\beta_i-q_{i1}}\right)^{1-q_{i1}} \|c_{i1}\|_{L^{\frac{1}{q_{i1}}}(J)} + \frac{A'T^{\alpha-q_2}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-q_2}{\alpha-q_2}\right)^{1-q_2}\|c_3\|_{L^{\frac{1}{q_2}}(J)}\right]\|x-y\|,$$

所以 $\|Nx-Ny\|_\beta < \|x-y\|_\beta$，即 N 是压缩算子有唯一的不动点，则方程(1)在区间 J 上有唯一解。

类似于定理1，可得以下定理。

定理 2　若条件(H_1')(H_2')成立，则方程(1)的解在区间 J 上存在且唯一。

定理 3　若条件(H_1)(H_2)成立，函数 $c_{i1}(t)$，$c_3(t)$ 连续非减，则方程(1)在 J 上有 Hyers-Ulam 稳定性。

证明　对任意的 $\varepsilon > 0$ 和满足不等式

$$\|{}^cD^\alpha x(t) - \sum_{i=1}^{m} {}^cD^{\beta_i} g_i(t,x) - f(t,x_t)\| < \varepsilon, t \in J$$

的函数 x，存在函数 $k(t)$ 使得${}^cD^\alpha x(t) - \sum\limits_{i=1}^{m} {}^cD^{\beta_i} g_i(t,x_t) - f(t,x_t) = k(t), t \in J$，并且有

$$x(t) = \varphi(0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{g_i(0,\varphi(0))t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}g(s,x_s)\mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s,x_s)+k(s)]\mathrm{d}s, t \in J。$$

根据定理1，方程(1)的解可表示为

$$y(t) = \varphi(0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{g_i(0,\varphi(0))t^{\alpha-\beta_i}}{\Gamma(\alpha-\beta_i+1)} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}g(s,x_s)\mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x_s)\mathrm{d}s, t \in J,$$

故由条件(H_2)、(A1)(c)及 $\varphi_x(s) = \varphi_y(s), s \in I$，得

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}\|g(s,x_s)-g(s,y_s)\|\mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\|f(s,x_s)-f(s,y_s)\| + \|k(s)\|]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}c_{i1}(s)\|x_s-y_s\|_B\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[c_3(s)\|x_s-y_s\|_B + \|k(s)\|]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}c_{i1}(s)\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\| : \theta \in [0,s]\}\mathrm{d}s +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[c_3(s)(K(s)\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\| : \theta \in [0,s]\} + M(s)\|\varphi_x(0)-\varphi_y(0)\|) + \varepsilon]\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{c_{i1}(t)}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\| : \theta \in [0,s]\}\mathrm{d}s +$$

$$\frac{c_3(t)K(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\|:\theta\in[0,s]\}\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},t\in J。$$

进而根据引理 3(分数阶积分算子的单调性)有

$$\sup_{\theta\in[0,t]}\|x(\theta)-y(\theta)\|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{c_{i1}(t)}{\Gamma(\alpha-\beta_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta_i-1}\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\|:\theta\in[0,s]\}\mathrm{d}s+$$

$$\frac{c_3(t)K(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\|:\theta\in[0,s]\}\mathrm{d}s+\frac{\varepsilon t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

根据引理 1 得到

$$\sup_{\theta\in[0,t]}\|x(\theta)-y(\theta)\|\leqslant P_k(t)\exp\left(\int_0^t H_{k+1}(t,s)\mathrm{d}s\right)\varepsilon,t\in J,$$

其中，

$$P_k(t):=\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\sum_{j=1}^{k}q^j(t)\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{m+1}=j,\\0\leqslant i_1,\cdots,i_{m+1}\leqslant j}}\binom{j}{i_1,\cdots,i_{m+1}}\frac{(t-a)^{i_1(\alpha-\beta_1)+\cdots+i_m(\alpha-\beta_m)+i_{m+1}\alpha}}{\Gamma(1+i_1(\alpha-\beta_1)+\cdots+i_m(\alpha-\beta_m)+i_{m+1}\alpha)}\right),$$

$$H_{k+1}(t,s):=q^{k+1}(t)\left(1+\sum_{j=1}^{k}q^j(t)\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_{m+1}=j,\\0\leqslant i_1,\cdots,i_{m+1}\leqslant j}}\binom{j}{i_1,\cdots,i_{m+1}}\frac{(t-a)^{i_1(\alpha-\beta_1)+\cdots+i_m(\alpha-\beta_m)+i_{m+1}\alpha}}{\Gamma(1+i_1(\alpha-\beta_1)+\cdots+i_m(\alpha-\beta_m)+i_{m+1}\alpha)}\right),$$

$$q(t)=\max\{c_{i1}(t),c_3(t)K(t)\},$$

$\binom{k+1}{j_1,\cdots,j_n}$表示组合数公式。则

$$\sup_{\theta\in[0,t]}\|x(\theta)-y(\theta)\|\leqslant P_k(t)\exp\left(\int_a^t H_{k+1}(t,s)\mathrm{d}s\right)\varepsilon\leqslant c\varepsilon,t\in J,$$

其中 $c=\sup\{P_k(t)\exp(\int_a^t H_{k+1}(t,s)\mathrm{d}s)\},t\in J$，即得方程(1) 在 J 上具有 Hyers-Ulam 稳定性。

类似于定理 3，可以得到以下结论。

定理 4　若条件(H_1)(H_2)成立，$c_{i1}(t)$，$c_3(t)$均为正常数，则方程(1)在 J 上具有 Hyers-Ulam 稳定性。

3　例题

设空间 $B=\{y\in C((-\infty,0],\mathbf{R}^n):\lim_{t\to-\infty}\exp(\lambda t)\|y(t)\|$ 存在$\}$，$\lambda>0$ 为常数，其范数为 $\|y\|_B=\sup_{t\leqslant0}[\exp(\lambda t)\|y(t)\|]$，则 B 满足文献[9]中的假设条件，其中 $K(t)=M(t)=H=1$。作为式(3)的特殊情形($n=1$)，考虑以下中立型 Caputo 分数阶泛函微分方程

$$\begin{cases}{}^cD^{0.8}x(t)=\dfrac{{}^cD^{0.6}x(t)}{100}+\dfrac{\exp(t)x_t}{100(\exp(-t)+\exp(t))(1+\|x_t\|_B)},t\in[0,1]=J,\\x(t)=\varphi(t),t\in(-\infty,0]=I,\end{cases}$$

其中

$$i=1,g_i(t,x)=0.01x,f(t,x)=\frac{\exp(t)x}{100(\exp(-t)+\exp(t))(1+\|x\|_B)},$$

易验证 $\|g_1(t,x)-g_1(t,y)\|\leqslant0.01\|x-y\|$，$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant0.01\|x-y\|_B$，则定理 1 和定理 3 中的条件($H_1$)($H_2$)均成立，方程(1)在区间 J 上有唯一解并有 Hyers-Ulam 稳定性。

4　结论

利用 Gronwall 型不等式及分数阶积分算子的单调性及压缩映射原理，得到具有多个 Caputo 分数阶导数的中立型分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性，扩展了已有的结论。研究表明，

Gronwall 型不等式及分数阶积分算子的单调性是研究相关问题的重要工具。鉴于目前分数阶微分方程解的吸引性成果较少，今后，我们将进一步利用 Gronwall 型不等式及分数阶积分算子的单调性讨论相关问题的解的存在性、吸引性等问题。

参考文献：

[1] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. New York：Elsevier，2006.

[2] PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego：Academic Press，1999.

[3] YE H P，GAO J M，DING Y S. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation[J]. Journal of mathematical analysis and applications，2007(2)：1075-1081.

[4] JALILIAN Y. Fractional integral inequalities and their applications to fractional differential equations[J]. Acta mathematica scientia，2016，36B(5)：1317-1330.

[5] DU F F，LU J G. Finite-time stability of neutral fractional order time delay systems with Lipschitz nonlinearities[J]. Applied mathematics computation，2020，375：125079.

[6] CHEN C，DONG Q X. Existence and Hyers-Ulam stability for a multi-term fractional differential equation with infinite delay[J]. Mathematics，2022，10(7)：1030.

[7] 赵环环，刘有军，康淑瑰. 带分布时滞分数阶微分方程非振动解的存在性[J]. 工程数学学报，2022，39(4)：648-656.

[8] 王雅倩，顾鹏飞，李刚，等. 分数阶时滞微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 应用数学，2023，36(1)：101-108.

[9] HINO Y，MURAKAMI S，NAITO T. Functional differential equations with infinite delay[M]. Berlin/Heidelberg：Springer，1991.

Existence and Hyers-Ulam Stability of Neutral Caputo Fractional Functional Differential Equations

WANG Qi[1]，DENG Qianqian[1]，XIE Chenxi[1]，HU Yuting[2]

(1. *School of Mathematical Sciences*，*Anhui University*；

2. *School of Big Date and Statistics*，*Anhui University*，*Hefei* 230601，*China*)

Abstract：The existence and Hyers-Ulam stability of neutral fractional functional differential equation with infinite delay and multiple Caputo fractional derivatives are studied. Firstly，the existence of solutions is obtained by using the contraction mapping principle and the phase space theory on infinite delay. Then the Hyers-Ulam stability of solution is obtained by using the generalized Gronwall inequality and the monotonicity of the fractional integral operator.

Keywords：Caputo fractional functional differential equations；contraction mapping principle；Gronwall inequality；Hyers-Ulam stability

(责任编辑：贾晶晶)

引用格式 王奇，邓茜茜，解晨曦，等. 中立型 Caputo 分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 山东航空学院学报，2024，41(1)：139-144. WANG Q，DENG Q Q，XIE C X，et al. Existence and Hyers-Ulam stability of neutral Caputo fractional functional differential equations[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2024，41(1)：139-144.