【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

捕食-食饵系统在气候变化下强迫波的存在性

朱巧玲，史振霞

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：研究了在气候变化环境下的一类三物种捕食-食饵系统，通过构造合适的上下解并结合 Schauder 不动点定理，得到了强迫波的存在性。

关键词：捕食-食饵系统；强迫波；存在性；Schauder 不动点定理；上下解方法

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.01.018

0　引言

近年来，工业化、能源过度开发导致的气候变化和全球变暖造成了种群栖息地的转移，严重破坏了生态环境，被认为是对生物多样性的最大威胁，因此许多学者研究了气候变化对种群生存的影响[1-4]。数学生物学家建立并研究了气候变化对物种生态学影响的各种数学模型[5-7]。对于单物种模型，反应扩散方程

$$u_t(x,t)=du_{xx}(x,t)+u(x,t)f(x-st,u(x,t))$$

可以描述物种的持续发展与气候变化之间的关系。其中：t 是时间变量，x 是空间变量，s 是气候变化速度，f 是依赖于气候变化的种群增长模型，d 是物种 u 的扩散系数。Wang 和 Wu[8] 通过迭代技术研究了具有非局部扩散和栖息地变化的竞争模型强迫波的存在性。由于缺乏比较原理，对具有气候变化效应的三种群以及三种群以上的捕食模型研究较难，Choi 和 Guo[9] 利用 Schauder 不动点定理并结合上下解方法研究了在移动环境下捕食-食饵系统强迫波的存在性。

自然界中，种群入侵、疾病传播、图像处理、晶体生长等众多不同领域的数学模型均可归结为格动力系[10-12]。Cheng[13] 利用 Fredholm 迭代理论研究了在二维格上具有年龄结构的时滞人口模型双稳行波解。

受文献[9,13]的启发，本文研究在气候变化条件下具有一个捕食者和两个食饵的捕食-食饵系统

$$\begin{cases}u_t(x,t)=D_1[U](x,t)+r_1u(x,t)[\alpha(x-ct)-(u+hv+aw)(x,t)],x\in\mathbf{R},t>0,\\ v_t(x,t)=D_2[V](x,t)+r_2v(x,t)[\alpha(x-ct)-(ku+v+aw)(x,t)],x\in\mathbf{R},t>0,\\ w_t(x,t)=D_3[W](x,t)+r_3w(x,t)(-1+bu+bv-w)(x,t),x\in\mathbf{R},t>0\end{cases}\tag{1}$$

强迫波的存在性。其中：

$$D_1[U](x,t)=d_1[u(x+\cos\theta,t)+u(x-\cos\theta,t)+u(x+\sin\theta,t)+u(x-\sin\theta,t)-4u(x,t)],$$
$$D_2[V](x,t)=d_2[v(x+\cos\theta,t)+v(x-\cos\theta,t)+v(x+\sin\theta,t)+v(x-\sin\theta,t)-4v(x,t)],$$
$$D_3[W](x,t)=d_3[w(x+\cos\theta,t)+w(x-\cos\theta,t)+w(x+\sin\theta,t)+w(x-\sin\theta,t)-4w(x,t)],$$

收稿日期：2024-01-07

基金项目：国家自然科学基金项目（11904275）

第一作者简介：朱巧玲（1998—　），女，甘肃张掖人，硕士研究生，主要从事微分方程与动力系统研究。

E-mail：1363031305@qq.com

通信作者简介：史振霞（1982—　），女，甘肃武威人，副教授，博士，主要从事微分方程与动力学研究。

E-mail：shizhx08@mail.lzjtu.cn

$$x=i\cos\theta+j\sin\theta, i,j\in\mathbf{Z},\theta\in[0,\pi/2]。$$

未知函数 u,v,w 分别表示在位置 x 和时刻 t 食饵和捕食者的种群密度；参数 $d_1,d_2,d_3,r_1,r_2,r_3,h,k,a,b$ 为正数；d_1、d_2、d_3 代表种群扩散系数；r_1,r_2,r_3 代表种群内在增长率；h,k 代表种群竞争率；a 代表种群捕食率，b 代表种群转化率，给定的正常数 c 为气候变化速度。假设函数 $\alpha(\cdot)$ 在本文中满足以下性质：(J_1) $\alpha(\cdot)$ 是连续函数且关于 ξ 是非减的；(J_2) $-\infty<\alpha(-\infty)<0<\alpha(\infty)<\infty$；($J_3$) 对足够大的 ξ，存在 $C>0$ 和 $\rho>0$ 使得 $\alpha(\infty)-\alpha(\xi)\leqslant Ce^{-\rho\xi}$。同时考虑在气候变化之前，环境对食饵是有利的，然后逐渐恶化，直到对物种不利。假设 $\alpha(\infty)=1$。

假设两个食饵竞争较弱，即 $h,k<1$。对给定的 (h,k)，参数 a 和 b 满足条件

$$0<a<\min\{\frac{1-h}{2b},\frac{1-k}{2b}\}。\tag{2}$$

此外，令 $b>1$，这意味着当至少有一个食饵存在时，捕食者可以生存。

本文考虑系统(1)形如 $(u,v,w)(x,t)=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(\xi)$ 强迫波的存在性，其中

$$\xi:=ct-x, x=i\cos\theta+j\sin\theta, i,j\in\mathbf{Z},\theta\in[0,\pi/2]。$$

对 $i=1,2,3$，记 $D_i[\phi_i](\xi)=d_i[\phi_i(\xi+\cos\theta)+\phi_i(\xi-\cos\theta)+\phi_i(\xi+\sin\theta)+\phi_i(\xi-\sin\theta)-4\phi_i(\xi)]$，那么 (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3) 满足

$$\begin{cases}c\phi_1'(\xi)=D_1[\Phi_1](\xi)+r_1\phi_1(\xi)[\alpha(-\xi)-\phi_1(\xi)-h\phi_2(\xi)-a\phi_3(\xi)],\xi\in\mathbf{R},\\ c\phi_2'(\xi)=D_2[\Phi_2](\xi)+r_2\phi_2(\xi)[\alpha(-\xi)-k\phi_1(\xi)-\phi_2(\xi)-a\phi_3(\xi)],\xi\in\mathbf{R},\\ c\phi_3'(\xi)=D_3[\Phi_3](\xi)+r_3\phi_3(\xi)(-1+b\phi_1(\xi)+b\phi_2(\xi)-\phi_3(\xi)),\xi\in\mathbf{R}。\end{cases}\tag{3}$$

通过对函数 $\alpha(\cdot)$ 的假设，可以预测所有物种在恶劣环境下最终都会灭绝，故系统(3)满足边界条件 $(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(+\infty)=(0,0,0)$。当 $\xi\to-\infty$ 时，系统(3)有如下平衡点：

$$E_1=(1,0,0),\hat{E}_1=(0,1,0),E_2=(\frac{1-h}{1-hk},\frac{1-k}{1-hk},0),E_3=(\frac{1+a}{1+ab},0,\frac{b-1}{1+ab}),\hat{E}_3=(0,\frac{1+a}{1+ab},\frac{b-1}{1+ab}),$$

$$E_4=(\frac{(1+a)(1-h)}{1-hk+ab(2-h-k)},\frac{(1+a)(1-k)}{1-hk+ab(2-h-k)},\frac{b(2-h-k)-1+hk}{1-hk+ab(2-h-k)})。$$

本文研究系统(3)满足边界条件 $(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(+\infty)=(0,0,0)$ 和 $(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(-\infty)=E_1$ 的强迫波。令

$$c_2^*=[d_2(e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{-\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\cos\theta}-4)+r_2(1-k)]/\lambda_i, i=1,2,$$

$$c_3^*=[d_3(e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{-\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\cos\theta}-4)+r_3(b-1)]/\lambda_i, i=3,4,$$

此外，不失一般性，假设 $c_3^*\geqslant c_2^*$，并定义 $c_0^*:=\begin{cases}d_3\rho+r_3(b-1)/\rho,\rho<\rho_{**},\\ c_3^*,\rho\geqslant\rho_{**},\end{cases}$ 其中常数 ρ 满足性质(J_3)，且 $\rho_{**}:=\sqrt{\frac{r_3(b-1)}{d_3}}$。

1　预备知识

首先，给出系统(3)上下解的定义。

定义 1　如果 $\overline{\phi}_i\geqslant\underline{\phi}_i$，$i=1,2,3$，且对所有的 $\xi\in\mathbf{R}\backslash E$，其中 E 是 $\mathbf{R}$ 中的某个有限集，满足下列不等式

$$c\overline{\phi}_1'(\xi)\geqslant D_1[\overline{\Phi}_1](\xi)+r_1\overline{\phi}_1(\xi)[\alpha(-\xi)-\overline{\phi}_1(\xi)-h\underline{\phi}_2(\xi)-a\underline{\phi}_3(\xi)],\tag{4}$$

$$c\overline{\phi}_2'(\xi)\geqslant D_2[\overline{\Phi}_2](\xi)+r_2\overline{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi)-k\underline{\phi}_1(\xi)-\overline{\phi}_2(\xi)-a\underline{\phi}_3(\xi)],\tag{5}$$

$$c\overline{\phi}_3'(\xi)\geqslant D_3[\overline{\Phi}_3](\xi)+r_3\overline{\phi}_3(\xi)(-1+b\overline{\phi}_1(\xi)+b\overline{\phi}_2(\xi)-\overline{\phi}_3(\xi)),\tag{6}$$

$$c\underline{\phi}_1'(\xi)\leqslant D_1[\underline{\Phi}_1]+r_1\underline{\phi}_1(\xi)[\alpha(-\xi)-\underline{\phi}_1(\xi)-h\overline{\phi}_2(\xi)-a\overline{\phi}_3(\xi)],\tag{7}$$

$$c\underline{\phi}_2'(\xi)\leqslant D_2[\underline{\Phi}_2](\xi)+r_2\underline{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi)-k\underline{\phi}_1(\xi)-\overline{\phi}_2(\xi)-a\overline{\phi}_3(\xi)],\tag{8}$$

$$c\underline{\phi}_3'(\xi)\leqslant D_3[\underline{\Phi}_3]+r_3\underline{\phi}_3(\xi)[-1+b\underline{\phi}_1(\xi)+b\underline{\phi}_2(\xi)-\underline{\phi}_3(\xi)],\tag{9}$$

那么称连续函数$(\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2,\bar{\phi}_3)$和$(\underline{\phi}_1,\underline{\phi}_2,\underline{\phi}_3)$为系统(3)一对上下解。

引理1 令$c>0$,设$(\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2,\bar{\phi}_3)$和$(\underline{\phi}_1,\underline{\phi}_2,\underline{\phi}_3)$是系统(3)的一对上下解,对$i=1,2,3$,满足

$$\bar{\phi}_i'(\xi-)\geqslant\bar{\phi}'_i(\xi+),\underline{\phi}'_i(\xi-)\leqslant\underline{\phi}'_i(\xi+),\xi\in E,\tag{10}$$

那么系统(3)存在一个解(ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3),使得$\underline{\phi}_i(\xi)\leqslant\phi_i(\xi)\leqslant\bar{\phi}_i(\xi),\xi\in\mathbf{R},i=1,2,3$。

证明过程与文献[14]中的定理2.1类似,故此处省略。

2 捕食-食饵系统在气候变化下强迫波的存在性

首先,通过假设(J_3),存在一个正常数K,使得对所有$\xi\geqslant K$,有$1-\alpha(\xi)\leqslant Ce^{-\rho\xi}$。选择足够大的常数$C$,对所有$\xi\in\mathbf{R}$,有$1-\alpha(\xi)\leqslant Ce^{-\rho\xi}$,那么对任意的常数$M$,有$\alpha(-\xi+M)\geqslant 1-Ce^{-\rho M}e^{\rho\xi}$,$\forall\xi\in\mathbf{R}$,因此,对给定足够小的$\varepsilon>0$,取足够大的$M=M(\varepsilon)$,有

$$\alpha(-\xi+M)\geqslant 1-\varepsilon e^{\rho\xi},\forall\xi\in\mathbf{R},\tag{11}$$

故考虑系统

$$\begin{cases}c\phi_1'(\xi)=D_1[\Phi_1](\xi)+r_1\phi_1(\xi)[\alpha(-\xi+M)-\phi_1(\xi)-h\phi_2(\xi)-a\phi_3(\xi)],\xi\in\mathbf{R},\\ c\phi_2'(\xi)=D_2[\Phi_2](\xi)+r_2\phi_2(\xi)[\alpha(-\xi+M)-k\phi_1(\xi)-\phi_2(\xi)-a\phi_3(\xi)],\xi\in\mathbf{R},\\ c\phi_3'(\xi)=D_3[\Phi_3](\xi)+r_3\phi_3(\xi)(-1+b\phi_1(\xi)+b\phi_2(\xi)-\phi_3(\xi)),\xi\in\mathbf{R}。\end{cases}\tag{12}$$

为了研究强迫波的存在性,证明用$\alpha(-\xi+M)$取代$\alpha(-\xi)$时,对足够小的$\varepsilon>0$及相应的M,式(4)~(9)成立。

定理1 对(J_3)中给定的$\rho>0$,假设$b>1$,条件(2)以及

$$d_2=d_3\geqslant d_1,r_2(1-k)=r_3(b-1)\tag{13}$$

成立,则系统(3)存在满足

$$(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(-\infty)=E_1,(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(+\infty)=(0,0,0)\tag{14}$$

的正解(ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3),使得$c>c_0^*$且$c>c_3^*=c_2^*$。

此外,在条件(13)中进一步假设$d_1=d_2=d_3$,当$c=c_0^*(\rho)=c_3^*=c_2^*$时,则系统(3)满足条件(14)的正解存在。

对$\forall\rho'\leqslant\rho$,$(J_3)$成立。因此,当$\rho\geqslant\rho_{**}$时,用$\forall\rho\leqslant\rho_{**}$取代$\rho$,$(J_3)$也成立。根据波速的选取,定理1的证明分为以下两种情形。

情形Ⅰ $c\geqslant c_0^*(\rho)$且$c>c_3^*$。在这种情况下,存在$\lambda_i(i=1,2,3,4)$使得$0<\lambda_1<\lambda_2$且$0<\lambda_3<\lambda_4$,其中

$$\begin{cases}A_1(\lambda_i):=d_2(e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{-\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\sin\theta}+e^{-\lambda_i\sin\theta}-4)-c\lambda_i+r_2(1-k)=0,i=1,2,\\ A_2(\lambda_i):=d_3(e^{\lambda_i\cos\theta}+e^{-\lambda_i\cos\theta}+e^{\lambda_i\sin\theta}+e^{-\lambda_i\sin\theta}-4)-c\lambda_i+r_3(-1+b)=0,i=3,4。\end{cases}$$

由于$d_2=d_3\geqslant d_1,r_2(1-k)=r_3(b-1)$,得$A_1=A_2$,则$\lambda_1=\lambda_3$且$\lambda_2=\lambda_4$。令

$$\varepsilon\in(0,[r_3(b-1)]/r_1),\tilde{\mu}\in(\lambda_3,\min\{2\lambda_3,\lambda_4\}),\mu'\in(\lambda_3,\min\{2\lambda_3,\lambda_4\})。$$

因为$\tilde{\mu}\in(\lambda_3,\lambda_4)$和$\mu'\in(\lambda_3,\lambda_4)$,所以$A_2(\tilde{\mu})<0$和$A_2(\mu')<0$。

引理2 假设$c\geqslant c_0^*(\rho)$,$c>c_3^*$以及式(13)成立,则在$\mathbf{R}$上系统(3)存在解(ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3),满足$\underline{\phi}_1\leqslant\phi_1\leqslant\bar{\phi}_1$,$\underline{\phi}_2\leqslant\phi_2\leqslant\bar{\phi}_2$和$\underline{\phi}_3\leqslant\phi_3\leqslant\bar{\phi}_3$,其中

$$\begin{cases}\bar{\phi}_1(\xi)=1,\underline{\phi}_1(\xi)=\max\{1-e^{\lambda_3\xi},0\},\\ \bar{\phi}_2(\xi)=\min\{e^{\lambda_3\xi},1\},\underline{\phi}_2(\xi)=\max\{e^{\lambda_3\xi}-q_1e^{\tilde{\mu}\xi},0\},\\ \bar{\phi}_3(\xi)=\min\{(2b-1)e^{\lambda_3\xi},2b-1\},\\ \underline{\phi}_3(\xi)=\max\{(2b-1)e^{\lambda_3\xi}-q_2e^{\mu'\xi},0\},\end{cases}$$

令

$$q_1>\max\{1,\frac{r_2[\varepsilon+1+a(2b-1)]}{-A_2(\tilde{\mu})}\},q_2>\max\{2b-1,\frac{r_3(2b-1)(3b-1)}{-A_2(\mu')}\}。\tag{15}$$

证明　考虑系统(12)并证明用 $\alpha(-\xi+M)$ 代替 $\alpha(-\xi)$ 时，式(4)～(9)成立。由于 $c\geqslant c_0^*(\rho)$，有 $\rho\geqslant\lambda_3$。故可选取 $\rho=\lambda_3$。

因为当 $\xi\in\mathbf{R}$ 时，$\bar{\phi}=1$，当 $\xi>0$ 时，$\bar{\phi}_2=1$ 和 $\bar{\phi}_3=2b-1$，所以对 $\xi\in\mathbf{R}$，式(4)成立且对 $\xi>0$，式(5)(6)成立。对 $\xi<0$，由于 $d_2=d_3$，$r_2(1-k)=r_3(b-1)$ 和 $k<1$，则

$$D_2[\bar{\Phi}_2](\xi)-c\bar{\phi}_2'(\xi)+r_2\bar{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi+M)-k\underline{\phi}_1(\xi)-\bar{\phi}_2(\xi)-a\underline{\phi}_3(\xi)]\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}\{d_2(\mathrm{e}^{\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_3\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\sin\theta}-4)-c\lambda_3+r_2[1-k+k\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-a\underline{\phi}_3(\xi)]\}\leqslant0,$$

故对 $\xi\neq0$，式(5)成立。对 $\xi<0$，也有

$$D_3[\bar{\Phi}_3](\xi)-c\bar{\phi}_3'(\xi)+r_3\bar{\phi}_3(\xi)\{-1+b(\bar{\phi}_1(\xi)+\bar{\phi}_2(\xi))-\bar{\phi}_3(\xi)\}=$$
$$(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}\{d_3(\mathrm{e}^{\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_3\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\sin\theta}-4)-c\lambda_3+r_3[-1+b+b\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}]\}=$$
$$r_3\bar{\phi}_3(\xi)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}(1-b)\leqslant0,$$

故对 $\xi\neq0$，式(6)成立。

当 $\xi\in\mathbf{R}$ 时，式(7)成立。对 $\xi<0$，由条件(2)得 $a(2b-1)<2ab<1-h$，$d_1\leqslant d_3$，$\rho=\lambda_3$ 以及 ε 的取值，得

$$D_1[\underline{\Phi}_1](\xi)-c\underline{\phi}_1'(\xi)+r_1\underline{\phi}_1(\xi)[\alpha(-\xi+M)-\underline{\phi}_1(\xi)-h\bar{\phi}_2(\xi)-a\bar{\phi}_3(\xi)]\geqslant$$
$$-[d_1(\mathrm{e}^{\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_3\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\sin\theta}-4)-c\lambda_3]\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-r_1\varepsilon\mathrm{e}^{\rho\xi}=\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}[r_3(b-1)-r_1\varepsilon]\geqslant0,$$

故对 $\xi\neq0$，式(8)成立。

当 $\xi>\xi_1$ 时，式(8)也成立。因此，只需考虑 $\xi<\xi_1$。对 $\xi<\xi_1$，由 $\rho=\lambda_3$，$d_1=d_3$，$r_2(1-k)=r_3(b-1)$，$\tilde{\mu}$ 的取值，并由式(15)可知，存在 $\xi_1<0$ 和 $\xi_2<0$，使得 $\mathrm{e}^{\lambda_3\xi_1}-q_1\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\xi_1}=(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi_2}-q_2\mathrm{e}^{\mu'\xi_2}=0$，则

$$D_2[\underline{\Phi}_2](\xi)-c\underline{\phi}_2'(\xi)+r_2\underline{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi+M)-k\bar{\phi}_1(\xi)-\underline{\phi}_2(\xi)-a\bar{\phi}_3(\xi)]\geqslant$$
$$\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}[d_2(\mathrm{e}^{\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_3\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\sin\theta}-4)-c\lambda_3+r_2(1-k)]-q_1\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\xi}[d_2(\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\tilde{\mu}\cos\theta}+$$
$$\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\tilde{\mu}\sin\theta}-4)-c\tilde{\mu}+r_2(1-k)]+r_2\underline{\phi}_2(\xi)[-\varepsilon\mathrm{e}^{\rho\xi}-(\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-q_1\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\xi})-a(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}]=$$
$$-q_1\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\xi}A_2(\tilde{\mu})+r_2\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}[-\varepsilon\mathrm{e}^{\rho\xi}-\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-a(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}]=\mathrm{e}^{\tilde{\mu}\xi}\{-q_1A_2(\tilde{\mu})-r_2\mathrm{e}^{(2\lambda_3-\tilde{\mu})\xi}[\varepsilon+1+a(2b-1)]\}\geqslant0,$$

因此，对 $\xi\neq\xi_1$，式(8)成立。同理，对 $\xi<\xi_2$，由 μ' 的取值以及式(15)，得

$$D_3[\underline{\Phi}_3](\xi)-c\underline{\phi}_3'(\xi)+r_3\underline{\phi}_3(\xi)[-1+b\underline{\phi}_1(\xi)+b\underline{\phi}_2(\xi)-\underline{\phi}_3(\xi)]=$$
$$(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}[d_3(\mathrm{e}^{\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_3\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_3\sin\theta}-4)-c\lambda_3+r_3(-1+b)]-q_2\mathrm{e}^{\mu'\xi}[d_3(\mathrm{e}^{\mu'\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\mu'\cos\theta}+$$
$$\mathrm{e}^{\mu'\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\mu'\sin\theta}-4)-c\mu'+r_3(-1+b)]+r_3\underline{\phi}_3(\xi)[-b\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}+b\underline{\phi}_2(\xi)-(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}+q_2\mathrm{e}^{\mu'\xi}]\geqslant$$
$$-q_2\mathrm{e}^{\mu'\xi}A_2(\mu')+r_3(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}[-b\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}-(2b-1)\mathrm{e}^{\lambda_3\xi}]=$$
$$-q_2\mathrm{e}^{\mu'\xi}A_2(\mu')+r_3(2b-1)\mathrm{e}^{2\lambda_3\xi}[-b-(2b-1)]\geqslant$$
$$\mathrm{e}^{\mu'\xi}[-q_2A_2(\mu')-r_3(2b-1)(3b-1)\mathrm{e}^{(2\lambda_3-\mu')\xi}]\geqslant0,$$

故对 $\xi\neq\xi_1$，式(9)成立。证毕。

情形Ⅱ　$c=c_0^*(\rho)=c_3^*$ 且 $c_3^*=c_2^*$。对 $c=c_3^*$，方程 $A_2(\lambda)=0$ 有二重根 $\lambda_0=\rho_{**}$。假设 $d_1=d_2=d_3$，对 $i=1,2,3$ 时，λ_0 满足

$$d_i(\mathrm{e}^{\lambda_0\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_0\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_0\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_0\sin\theta}-4)-c\lambda_0+r_2(1-k)=$$
$$d_i(\mathrm{e}^{\lambda_0\cos\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_0\cos\theta}+\mathrm{e}^{\lambda_0\sin\theta}+\mathrm{e}^{-\lambda_0\sin\theta}-4)-c\lambda_0+r_3(-1+b)=0,$$
$$d_i(\cos\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0\cos\theta}-\cos\theta\mathrm{e}^{\lambda_0\cos\theta}+\sin\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0\sin\theta}-\sin\theta\mathrm{e}^{\lambda_0\sin\theta})=c。$$

设 $L_0=\lambda_0\mathrm{e}$。选取 $\varepsilon\in(0,\mathrm{e}[1-h-a(2b-1)])$，以及

$$\zeta_1 > \max\{e(\lambda_0)^{1/2}, 4r_2 L_0[\varepsilon(\frac{5}{2L_0})^{5/2} + (1 + a(2b-1))L_0(\frac{7}{2L_0})^{7/2}]/d_2\}, \tag{16}$$

$$\zeta_2 > \max\{(2b-1)e(\lambda_0)^{1/2}, 4r_3(2b-1)(3b-1)L_0^2(\frac{7}{2L_0})^{7/2}/d_3\}, \tag{17}$$

令 $\xi_3 := -(\zeta_1/L_0)^2$ 和 $\xi_4 := -\{\zeta_2/[(2b-1)L_0]\}^2$。由式(16)和式(17)得 $\xi_4 < -\frac{1}{\lambda_0}$ 和 $\xi_3 < -\frac{1}{\lambda_0}$。

引理 3 除条件(2)外，设 $c = c_0^*(\rho) = c_3^*$ 且 $d_1 = d_2 = d_3$。则在 $\mathbf{R}$ 上系统(3)存在的解(ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3)，满足 $\underline{\phi}_1 \leqslant \phi_1 \leqslant \overline{\phi}_1$，$\underline{\phi}_2 \leqslant \phi_2 \leqslant \overline{\phi}_2$ 和 $\underline{\phi}_3 \leqslant \phi_3 \leqslant \overline{\phi}_3$，其中

$$\overline{\phi}_1(\xi) = 1, \underline{\phi}_1(\xi) = \begin{cases} 1 - L_0(-\xi)e^{\lambda_0 \xi}, \xi < -\frac{1}{\lambda_0}, \\ 0, \xi \geqslant -\frac{1}{\lambda_0}, \end{cases}$$

$$\overline{\phi}_2(\xi) = \begin{cases} L_0(-\xi)e^{\lambda_0 \xi}, \xi < -\frac{1}{\lambda_0}, \\ 1, \xi \geqslant -\frac{1}{\lambda_0}, \end{cases} \quad \underline{\phi}_2(\xi) = \begin{cases} L_0(-\xi)e^{\lambda_0 \xi} - \zeta_1(-\xi)^{1/2}e^{\lambda_0 \xi}, \xi < \xi_3, \\ 0, \xi \geqslant \xi_3, \end{cases}$$

$$\overline{\phi}_3(\xi) = \begin{cases} (2b-1)L_0(-\xi)e^{\lambda_0 \xi}, \xi < -\frac{1}{\lambda_0}, \\ 2b-1, \xi \geqslant -\frac{1}{\lambda_0}, \end{cases} \quad \underline{\phi}_3(\xi) = \begin{cases} (2b-1)L_0(-\xi)e^{\lambda_0 \xi} - \zeta_2(-\xi)^{1/2}e^{\lambda_0 \xi}, \xi < \xi_4, \\ 0, \xi \geqslant \xi_4。 \end{cases}$$

证明 考虑系统(12)并证明用 $\alpha(-\xi+M)$ 代替 $\alpha(-\xi)$ 时，式(4)～(9)成立。

首先，式(4)平凡并且对 $\xi > -\frac{1}{\lambda_0}$，式(5)(6)显然成立。对 $\xi < -\frac{1}{\lambda_0}$，由

$$\underline{\phi}_3 \geqslant 0, \alpha \leqslant 1, d_2 = d_3, d_3(\cos\theta e^{-\lambda_0 \cos\theta} - \cos\theta e^{\lambda_0 \cos\theta} + \sin\theta e^{-\lambda_0 \sin\theta} - \sin\theta e^{\lambda_0 \sin\theta}) = c, k < 1$$

以及 $A_2(\lambda_0) = 0$ 得

$$\begin{aligned} & D_2[\overline{\Phi}_2](\xi) - c\overline{\phi}_2'(\xi) + r_2\overline{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi+M) - k\underline{\phi}_1(\xi) - \overline{\phi}_2(\xi) - a\underline{\phi}_3(\xi)] \leqslant \\ & \overline{\phi}_2(\xi)[d_2(e^{\lambda_0\cos\theta} + e^{-\lambda_0\cos\theta} + e^{\lambda_0\sin\theta} + e^{-\lambda_0\sin\theta} - 4) - c\lambda_0] + L_0 e^{\lambda_0\xi}[c - d_2(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta} - \cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta} + \\ & \sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta} - \sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta})] + r_2\overline{\phi}_2(\xi)[1 - k(k-1)L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}] \leqslant 0, \end{aligned}$$

因此，对 $\xi \neq -\frac{1}{\lambda_0}$，式(5)成立。对 $\xi < -\frac{1}{\lambda_0}$，由 $A_2(\lambda_0) = 0, b > 1$ 以及

$$d_3(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta} - \cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta} + \sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta} - \sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta}) = c,$$

得

$$\begin{aligned} & D_3[\overline{\Phi}_3](\xi) - c\overline{\phi}_3'(\xi) + r_3\overline{\phi}_3(\xi)[-1 + b\overline{\phi}_1(\xi) + b\overline{\phi}_2(\xi) - \overline{\phi}_3(\xi)] = \\ & (2b-1)L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}[d_3(e^{\lambda_0\cos\theta} + e^{-\lambda_0\cos\theta} + e^{\lambda_0\sin\theta} + e^{-\lambda_0\sin\theta} - 4) - c\lambda_0 + r_3(-1+b)] + \\ & (2b-1)L_0 e^{\lambda_0\xi}[c - d_2(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta} - \cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta} + \sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta} - \sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta})] + \\ & r_3\overline{\phi}_3(\xi)(1-b)L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi} \leqslant 0。 \end{aligned}$$

因此，对 $\xi \neq -\frac{1}{\lambda_0}$，式(6)成立。

对式(7)，只需考虑 $\xi < -\frac{1}{\lambda_0}$ 的情况。由于当且仅当 $\rho \geqslant \rho_{**}$ 时，$c = c_{**}$ 成立，那么在(J_3)中，取 $\rho = \rho_{**} = \lambda_0$。故对所有的 $\xi < 0$，$\alpha(-\xi+M) \geqslant 1 - \varepsilon e^{\lambda_0\xi}$。对 $\xi < -\frac{1}{\lambda_0}$，由 $d_1 = d_3$，$A_2(\lambda_0) = 0$，ε 的选取以及

$$d_3(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta} - \cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta} + \sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta} - \sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta}) = c,$$

得

$$D_1[\underline{\Phi}_1](\xi)-c\,\underline{\phi}_1'(\xi)+r_1\,\underline{\phi}_1(\xi)[\alpha(-\xi+M)-\underline{\phi}_1(\xi)-h\,\overline{\phi}_2(\xi)-a\,\overline{\phi}_3(\xi)]\geqslant$$
$$-L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}[d_1(e^{\lambda_0\cos\theta}+e^{-\lambda_0\cos\theta}+e^{\lambda_0\sin\theta}+e^{-\lambda_0\sin\theta}-4)-c\lambda_0]+L_0e^{\lambda_0\xi}[c-d_1(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta}-\cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta}+$$
$$\sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta}-\sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta})]+r_1\,\underline{\phi}_1(\xi)e^{\lambda_0\xi}\{-\varepsilon+L_0(-\xi)[1-h-a(2b-1)]\}\geqslant$$
$$r_3L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}(b-1)+r_1\,\underline{\phi}_1(\xi)e^{\lambda_0\xi}\{-\varepsilon+e[1-h-a(2b-1)]\}>0。$$

因此，对 $\xi\neq-\dfrac{1}{\lambda_0}$，式(7)成立。

接下来，证明当 $\xi>\xi_3$ 和 $\xi>\xi_4$ 时，式(8)和式(9)分别成立。注意，由于 $c=c_0^*(\rho)=c_3^*$，有
$$\alpha(-\xi+M)\geqslant1-\varepsilon e^{\lambda_0\xi},\xi<0。$$

对任意的正常数 ν 和 γ，令
$$\sup\{(-\xi)^{\nu}e^{\gamma\xi}\}=\left(\frac{\nu}{\gamma e}\right)^{\nu}。\tag{18}$$

对 $\xi<\xi_3$，由式(16)和式(18)得
$$D_2[\overline{\Phi}_2](\xi)-c\,\underline{\phi}_2'(\xi)+r_2\,\underline{\phi}_2(\xi)[\alpha(-\xi+M)-k\,\overline{\phi}_1(\xi)-\underline{\phi}_2(\xi)-a\,\overline{\phi}_3(\xi)]\geqslant$$
$$\frac{1}{4}d_2\zeta_1(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}+\underline{\phi}_2(\xi)[d_2(e^{\lambda_0\cos\theta}+e^{-\lambda_0\cos\theta}+e^{\lambda_0\sin\theta}+e^{-\lambda_0\sin\theta}-4)-c\lambda_0+r_2(1-k)]+$$
$$e^{\lambda_0\xi}[-L_0+\frac{1}{2}(-\xi)^{-1/2}\zeta_1][c-d_1(\cos\theta e^{-\lambda_0\cos\theta}-\cos\theta e^{\lambda_0\cos\theta}+\sin\theta e^{-\lambda_0\sin\theta}-\sin\theta e^{\lambda_0\sin\theta})]+$$
$$r_2\,\underline{\phi}_2(\xi)[-\varepsilon e^{\lambda_0\xi}-L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}+\xi_1(-\xi)^{1/2}e^{\lambda_0\xi}-a(2b-1)L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}]\geqslant$$
$$\frac{1}{4}d_2\zeta_1(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}-r_2L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}\{\varepsilon e^{\lambda_0\xi}+[1+a(2b-1)]L_0(-\xi)e^{\lambda_0\xi}\}\geqslant$$
$$\frac{1}{4}(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}\{d_2\zeta_1-4r_2L_0[\varepsilon(-\xi)^{5/2}e^{\lambda_0\xi}+(1+a(2b-1))L_0(-\xi)^{7/2}e^{\lambda_0\xi}]\}\geqslant$$
$$\frac{1}{4}(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}\{d_2\zeta_1-4r_2L_0[\varepsilon\left(\frac{5}{2L_0}\right)^{5/2}+(1+a(2b-1))L_0\left(\frac{5}{2L_0}\right)^{7/2}]\}\geqslant0。$$

因此，对 $\xi\neq\xi_3$，式(8)成立。同理，由式(16)和式(18)得
$$D_3[\underline{\Phi}_3](\xi)-c\,\underline{\phi}_3'(\xi)+r_3\,\underline{\phi}_3(\xi)[-1+b\,\overline{\phi}_1(\xi)+b\,\underline{\phi}_2(\xi)-\overline{\phi}_3(\xi)]\geqslant$$
$$\frac{1}{4}d_3\zeta_2(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}+r_3(3b-1)(2b-1)L_0^2(-\xi)^2e^{\lambda_0\xi}=$$
$$\frac{1}{4}(-\xi)^{-3/2}[d_3\zeta_2-4r_3(3b-1)(2b-1)L_0^2(-\xi)^{7/2}e^{\lambda_0\xi}]\geqslant$$
$$\frac{1}{4}(-\xi)^{-3/2}e^{\lambda_0\xi}[d_3\zeta_2-4r_3(3b-1)(2b-1)L_0^2(-\xi)^{7/2}]\geqslant0,$$

因此，对 $\xi\neq\xi_4$，式(9)成立。证毕。

综上所述，由情形Ⅰ、情形Ⅱ以及引理 1、引理 2、引理 3，可得定理 1 成立。

3　结论

本文利用 Schauder 不动点定理，结合上下解方法，研究了一类满足边界条件$(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(+\infty)=(0,0,0)$和$(\phi_1,\phi_2,\phi_3)(-\infty)=E_1$ 的三物种捕食-食饵系统(3)在离散斑块环境下强迫波的存在性。结果表明当环境对食饵有利时，食饵和捕食者三物种在自然环境中呈现共存状态。

参考文献：

[1]　ALFARO M，BERESTYCKI H，RAOUL G. The effect of climate shift on a species submitted to dispersion，evolution，growth and nonlocal competition[J]. SIAM journal on mathematical analysis，2017，49(1)：562-596.

[2] BERESTYCKI H,DIEKMANN O,NAGELKERKE C J,et al. Can a species keep pace with a shifting climate? [J]. Bulletin of mathematical biology,2009,71(2):399-429.
[3] BERESTYCKI H,FANG J. Forced waves of the Fisher-KPP equation in a shifting environment [J]. Journal of differential equations,2018,264(3):2157-2183.
[4] ROSSI L,BERESTYCKI H. Reaction-diffusion equations for population dynamics with forced speed II-cylindrical-type domains[J]. Discrete & continuous dynamical systems,2009(1):19-61.
[5] FANG J,PENG R,ZHAO X Q. Propagation dynamics of a reaction-diffusion equation in a time-periodic shifting environment[J]. Journal de mathématiques pures et appliquées,2021,147(1):1-28.
[6] HU C B,LI B T. Spatial dynamics for lattice differential equations with a shifting habitat[J]. Journal of differential equations,2015,259(5):1967-1989.
[7] HU H,ZOU X. Existence of an extinction wave in the Fisher equation with a shifting habitat[J]. Proceedings of the american mathematical society,2017,145(11):4763-4771.
[8] WANG J B,WU C. Forced waves and gap formations for a Lotka-Volterra competition model with nonlocal dispersal and shifting habitats[J]. Nonlinear analysis(real world applications),2021,58. DOI:10.1016/j.nonrwa.2020.103208.
[9] CHOI W,GUO J S. Forced waves of a three species predator-prey system in a shifting environment [J]. Journal of mathematical analysis and applications,2022,514(1). DOI:10.1016/j.jmaa.126283.
[10] PANG L,WU S L. Propagation dynamics for lattice differential equations in a time-periodic shifting habitat[J]. Zeitschrift für angewandte mathematik und physik,2021,72(3). DOI:10.1007/s00033-021-01522-w.
[11] 赵海琴.二维格上时滞微分方程的行波解[J].咸阳师范学院学报,2010,25(4):10-12.
[12] SHI Z X,LI W T,CHENG C P. Stability and uniqueness of traveling wavefronts in a two-dimensional lattice differential equation with delay[J]. Applied mathematics and computation,2009,208(2):484-494.
[13] CHENG C P,LI W T,WANG Z C. Persistence of bistable waves in a delayed population model with stage structure on a two-dimensional spatial lattice[J]. Nonlinear analysis(real world applications),2012,13(4):1873-1890.
[14] MA S W. Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem [J]. Journal of differential equations,2001,171(2):294-314.

Existence of Forced Waves in a Predator-prey System under Climate Change

ZHU Qiaoling,SHI Zhenxia

(*College of Mathematical and Physical Sciences,*
Lanzhou Jiaotong University,*Lanzhou* 730070,*China*)

Abstract:This paper is concerned about a three-species predator-prey system under a discrete shifting environment,and the existence of forced waves is obtained by using constructing appropriate upper-lower solutions and Schauder's fixed point theorem.

Keywords:predator-prey system;forced wave;existence;Schauder fixed-point theorem;upper-lower solutions

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 朱巧玲,史振霞.捕食-食饵系统在气候变化下强迫波的存在性[J].山东航空学院学报,2024,41(1):132-138.
ZHU Q L,SHI Z X. Existence of forced waves in a predator-prey system under climate change[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2024,41(1):132-138.