【微分方程与动力系统研究】

具有预定夹角边值问题的平均曲率方程的边界梯度估计

司雨欣，韩 菲，孙生晖

（新疆师范大学 数学科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017）

摘 要：运用极大值原理和活动标架法研究了具有预定夹角边值问题的平均曲率方程，根据点所在位置分为三种情况进行讨论，得到了平均曲率方程预定夹角问题的边界梯度估计。

关键词：活动标架；极大值原理；梯度估计；预定夹角边值；平均曲率方程

中图分类号：O 175 **文献标识码**：A DOI:10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.008

平均曲率方程是偏微分微分方程的一种，而预定夹角问题是一类重要的边界条件，因此研究具有预定夹角边值问题的平均曲率方程具有重要意义[1-3]。方程最重要的问题便是其解的存在性，而解的梯度估计就是为了解决方程解的存在性问题而引出的估计。极小曲面方程是平均曲率方程的特殊形式，文献[4]利用索伯列夫不等式和试验函数的技巧得出此类方程的内部梯度估计。研究解的梯度估计时，如何运用极大值原理是关键的一步。因此通过不同的方法（如图的法向扰动[5]、伯恩斯坦技巧[6]）得到极大值原理，并在证明中运用其新方法，对于梯度估计至关重要。通常研究人员在笛卡尔坐标系下建立标架帮助运算，但不是所有的方程都适合笛卡尔坐标系，选取合适的标架会使计算更加简洁方便。文献[7]对高阶曲率方程运用曲面上的活动标架法得出梯度内估计，文献[8]对给定 Neumann 边值或预定夹角边值的平均曲率方程，运用此方法得出边界梯度估计。笔者拟将文献[8]中的平均曲率方程预定夹角边值问题进一步推广到更一般的方程中。

1 预备知识

本节主要给出有关定理证明的活动标架的基本公式，该部分属于黎曼几何基础知识，因此直接运用相关的结论和公式，详细的推导可以参考文献[7,9]等。

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界 C^3 区域，$u:\Omega\to\mathbf{R}$ 是定义在 Ω 的光滑函数，则 u 的图 M^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的一个超曲面。记 g 为 M^n 上从 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中诱导的度量，D 和 ∇ 分别为 $\mathbf{R}^n$ 和 M^n 上的联络。

记 $\gamma=\dfrac{(Du,-1)}{\nu}$ 为 M^n 的向下方向的单位法向量场，这里 $\nu=\sqrt{1+|Du|^2}$。M^n 关于 γ 的第二基本形式和平均曲率分别记为 h 和 H，即 $H=\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)$。

收稿日期：2023-03-23

基金项目：国家自然科学基金项目（12061078）

第一作者简介：司雨欣（1998—），女，河北邯郸人，硕士研究生，主要从事几何分析研究。E-mail:1213679335@qq.com

通信作者简介：韩 菲（1973—），女，江西永新人，教授，硕士生导师，博士，主要从事几何分析研究。E-mail:137823121@qq.com

记 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 为 Ω 上的 Descartes 坐标系，则 $e_i=\dfrac{1}{\sqrt{1+u_i^2}}(0,\cdots,1,0,\cdots,0,u_i)$（其中 $i=1,2,\cdots,n$）形成了一个沿 M^n 的自然的单位切标架场。

在上述记号下，有计算公式 $\Delta u=\dfrac{H}{\nu}$，$\nabla_i\gamma=\sum\limits_{k=1}^n h_i^k e_k$，这里 Δ 是 M^n 上的 Laplace 算子，则 (h_i^k) 是 Weingarten 矩阵。

分别记 $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha=1}^{n+1}$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的标准标架和内积，则 $\gamma^l=\langle\gamma,\varepsilon_l\rangle$ 为 γ 的第 l 个分量，$l=1,2,\cdots,n$，$\nu=-\langle\gamma,\varepsilon_{n+1}\rangle^{-1}$。从而有

$$\nabla_i\gamma^l=\sum_{k=1}^n h_i^k e_k^l,\ \nabla_i\nu=\nu^2\sum_{k=1}^n h_i^k\langle e_k,\varepsilon_{n+1}\rangle,\Delta\gamma^l=\sum_{k=1}^n\ \nabla_k He_k^l-|A|^2\gamma^l,$$

$$\nabla_i\nu=2\nu^3\Big[\sum_{k=1}^n h_i^k\langle e_k,\varepsilon_{n+1}\rangle\Big]^2+\nu^2\langle(\nabla H-|A|^2\gamma),\varepsilon_{n+1}\rangle。\tag{1}$$

这里，$e_k^l=\langle e_k,\varepsilon_l\rangle$ 是 e_k 作为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中向量的第 l 个坐标分量，$|A|^2$ 则是 M^n 的第二基本形式模长的平方。

与文献[7]一样，为了减少计算量，选取某一点的标架使得 $|Du|=u_1$，$u_\alpha=0(\alpha=2,3,\cdots,n)$，在此标架之下，有

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}}(1,0,\cdots,0,u_1),e_\alpha=\varepsilon_\alpha(2\leqslant\alpha\leqslant n),\gamma=\frac{(u_1,0,\cdots,0,-1)}{\sqrt{1+u_1^2}},$$

这形成了一个单位正交标架场。进一步可要求对于 $2\leqslant\alpha,\beta\leqslant n,\alpha\neq\beta$ 时，有 $h_{\alpha\beta}=0$。

令 $d(x)$ 为点 x 到 $\partial\Omega$ 的距离，ν 是 $\partial\Omega$ 单位内法向，记 $\Omega_\mu=\{x\in\Omega\mid d(x)<\mu\}$。

根据文献[1]或[10]中的结果可知，存在常数 $\mu_1>0$ 使得 $d(x)\in C^3(\Omega_{\mu_1})$。在闭环区域 Ω_{μ_1} 上，可以把 ν 自然延拓成 Dd，仍记为 ν。于是，在 Ω_{μ_1} 上，有 $|D\nu|+|D^2\nu|\leqslant C(n,\Omega)$，$|\nu|=1$，$D\nu\perp\nu$，$D_\nu\nu=0$。

文献[6,10]得到了平均曲率型方程的内估计，本文的定理证明基于此内估计给出。

引理 1　Ω 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的区域，假设 f 在 Ω 上有定义并且存在正常数 L_1 使得 $|f(x)|_{C^1(\bar\Omega)}\leqslant L_1$，假设 u 是平均曲率型方程 $\operatorname{div}\Big(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\Big)=f(x)$（在 Ω 内）的解，记 $\operatorname{osc}(u)$ 为 u 的振幅，对任意的 $\Omega'\subset\subset\Omega$，存在常数 $C=c(n,\operatorname{dist}(\Omega',\Omega),L_1,\operatorname{osc}(u))$ 使得 $\sup\limits_{\Omega'}|Du|\leqslant C$。

为了简化证明，在主要定理的证明过程中，采用记号 $O(z)$ 表示存在常数 $C>0$ 使得当 z 充分大时，有 $|O(z)|\leqslant Cz$ 成立。这里的常数 C 仅与定理中描述的量有关。

2　预定夹角边值问题

文献[11]利用活动标架法给出了具有预定夹角边值问题的平均曲率方程梯度估计的新证明，笔者利用其方法对平均曲率方程进一步推广。

定理 1　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的有界区域，且满足 $\partial\Omega\in C^3$，ν 为内法向。假设 f 和 θ 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的光滑函数，$0<\theta(x)<\pi$，并且存在常数 b_0，L_1 和 L_2 使得

$$|f(x)|_{C^1(\bar\Omega)}\leqslant L_1,\ |\theta|_{C^2(\bar\Omega)}\leqslant L_2,\ |\cos\theta|\leqslant b_0<1,$$

若 u 是预定夹角边值的平均曲率方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}\Big(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\Big)=f(x,u),在\ \Omega\ 内,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=-\cos\theta(x)\ \sqrt{1+|Du|^2},在\ \partial\Omega\ 内\end{cases}$$

的解，则存在常数 $C=C(n,\Omega,b_0,L_1,L_2,\operatorname{osc}(u))$ 使得 $\sup\limits_{\Omega}|Du|\leqslant C$。

证明　根据引理 1，只需考虑解的近边 Ω_{μ_1} 上的估计。不妨设 u 的振幅为 $M_0>0$，并且 $|u|\leqslant M_0$。令

$$\omega = \nu + u_\nu \cos\theta, h(u) = \frac{2}{1-b_0}(1 + M_0 + u), g(d) = d,$$

取函数

$$G(x) = \log\log\omega + h(u) + g(d), x \in \overline{\Omega}_{\mu_1}。$$

为了方便，记 $a = \omega\log\omega$，设 $G(x)$ 在 $x_0 \in \overline{\Omega}_{\mu_1}$ 取得最大值。分三种情况证明定理1，以下所有的计算都集中于 x_0 点。

情况1　$x_0 \in \partial\Omega_{\mu_1} \cap \Omega$。根据该点所在位置，利用引理1给出梯度估计。

情况2　$x_0 \in \partial\Omega$。取 x_0 点的坐标系，使得 $\frac{\partial}{\partial x_n}$ 为边界 $\partial\Omega$ 的单位内法向 ν，且 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ 构成在 $\partial\Omega$ 内的以 x_0 为坐标原点的测地坐标系。沿测地线 $x_n = t(0 \leqslant t \leqslant \mu_1)$ 对切向量 $\frac{\partial}{\partial x_i}(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 进行平行移动，这样就建立了 x_0 在 $\overline{\Omega}$ 中某领域上的测地坐标系。

记 D' 为 D 在边界 $\partial\Omega$ 上诱导的联络，b_{ij} 是 $\partial\Omega$ 关于内法向 ν 的第二基本形式。

由于 x_0 是 G 的最大值点，于是

$$G_n = \frac{\omega_n}{a} + h'u_n + g' \leqslant 0, \tag{2}$$

$$G_j = \frac{\omega_j}{a} + h'u_j = 0, j = 1,2,\cdots,n-1, \tag{3}$$

注意到

$$\omega_l = \nu_l + u_{nl}\cos\theta + u_n(\cos\theta)_l, l = 1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

得

$$\nu_n = (\sqrt{1+|Du|^2})_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{in}}{\nu} + \frac{u_n u_{nn}}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{in}}{\nu} - u_{nn}\cos\theta。$$

从而，

$$\omega_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{in}}{\nu} - \nu\cos\theta(\cos\theta)_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{in}}{\nu} - \frac{\sum_{i,j=1}^{n-1} u_i b_{ij} u_j}{\nu} - \nu\cos\theta(\cos\theta)_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{in}}{\nu} + O(\nu), \tag{5}$$

根据边界条件及式(3)(4)，对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$，有

$$u_{in} = -\nu_i\cos\theta - \nu(\cos\theta)_i = (ah'u_i + u_{in}\cos\theta + u_n(\cos\theta)_i)\cos\theta - \nu(\cos\theta)_i,$$

因此，

$$u_{in} = \frac{(ah'u_i + u_{in}\cos\theta + u_n(\cos\theta)_i)\cos\theta - \nu(\cos\theta)_i}{\sin^2\theta} = \frac{ah'u_i\cos\theta}{\sin^2\theta} + O(\nu)。 \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)，有 $\omega_n = \frac{ah'|D'u|^2\cos\theta}{\nu\sin^2\theta} + O(\nu)$，结合式(2)，可以得到

$$0 \geqslant 1 + h'\frac{|D'u|^2 - \nu^2\sin^2\theta}{\nu\sin^2\theta}\cos\theta + O(\frac{1}{\log\omega}) = 1 - \frac{h'\cos\theta}{\nu\sin^2\theta} + O(\frac{1}{\log\omega}),$$

这蕴含着 ν 一定有界。

情况3　$x_0 \in \Omega_{\mu_1}$。用活动标架来给出这种情况的证明，此类方法可参考文献[8]。因为

$$\nabla_i G = \frac{\nabla_i\omega}{a} + h'\nabla_i u + \nabla_i d = 0,$$

故

$$\nabla_i\omega = -a(h'\nabla_i u + \nabla_i d)。 \tag{7}$$

根据式(1) 和 $u_\nu = \sum_{l=1}^{n} u_l d_l = \nu \sum_{l=1}^{n} \gamma^l d_l$，有

$$\nabla_i \omega = (1 + \sum_{l=1}^{n} \gamma^l d^l \cos\theta)\ \nabla_i \nu + \nu \cos\theta \sum_{k,l=1}^{n} h_{ik} e_k^l d^l + u_1\ \nabla_i (d_1 \cos\theta) =$$

$$(\nu u_1 + \nu u_1 \sum_{l=1}^{n} \gamma^l d^l \cos\theta) h_{1i} + \nu\cos\theta \sum_{k,l=1}^{n} h_{ik} e_k^l d^l + u_1\ \nabla_i (d_1 \cos\theta) =$$

$$(\nu u_1 + \nu^2 d_1 \cos\theta) h_{1i} + \nu\cos\theta \sum_{k=2}^{n} h_{ik} d_k + u_1\ \nabla_i (d_1\cos\theta), \tag{8}$$

联合式(7)(8)，对 $2 \leqslant i \leqslant n$，可以得到

$$h_{1i} = -\frac{a}{T} d_i - \frac{u_1 (d_1 \cos\theta)_i}{T} - \frac{\nu\cos\theta}{T} h_{ii} d_i, \tag{9}$$

方便起见，记 $T = \nu u_1 + \nu^2 d_1 \cos\theta$，易见 $T = O(\nu^2)$。对 h_{11}，根据式(7) ~ (9)，有

$$h_{11} = -\frac{a}{\nu T}(h' u_1 + d_1) - \frac{\nu\cos\theta}{T} \sum_{k=2}^{n} h_{1k} d_k - \frac{u_1 (d_1\cos\theta)_1}{\nu T} =$$

$$-\frac{a}{\nu T}(h' u_1 + d_1) - \frac{u_1 (d_1 \cos\theta)_1}{\nu T} + \frac{\nu\cos\theta}{T} \sum_{k=2}^{n} d_k [\frac{a}{T} d_k + \frac{u_1 (d_1\cos\theta)_k}{T} + \frac{\nu\cos\theta}{T} h_{kk} d_k] =$$

$$-\frac{a}{\nu T}(h' u_1 + d_1) + \frac{(\nu\cos\theta)^2}{T^2} \sum_{k=2}^{n} d_k^2 h_{kk} + O(\frac{\log\nu}{\nu^2})。 \tag{10}$$

下面计算 $\Delta G(x_0)$。直接计算可得

$$\Delta G = \frac{\Delta\omega}{a} - \frac{1+\log\omega}{a^2} \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i \omega)^2 + (h' \Delta u + \Delta d) \triangleq \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}。 \tag{11}$$

对于 Ⅱ 结合 $\nabla_i \omega = -a(h'\ \nabla_i u + \nabla_i d)$，可得到

$$\mathrm{II} = -\frac{1+\log\omega}{a^2} \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i\omega)^2 = -(1+\log\omega) \sum_{i=1}^{n} (\frac{\nabla_i \omega}{a})^2 = -(1+\log\omega) \sum_{i=1}^{n} (h'\ \nabla_i u + \nabla_i d)^2 =$$

$$-(1+\log\omega)[(h'\ \nabla_1 u + \nabla_1 d)^2 + \sum_{i=2}^{n} (h'\ \nabla_i u + \nabla_i d)^2] = -(1+\log\omega)[(\frac{h' u_1 + d_1}{\nu})^2 + \sum_{i=2}^{n} d_i^2],$$

对于 Ⅲ 则由 $\Delta u = \frac{H}{\nu}$ 以及 $\Delta d = \sum_{\alpha,\beta,i} d_{\alpha,\beta} e_i^\alpha e_i^\beta - \frac{H u_1 d_1}{\nu}$ 可知一定有 $\mathrm{III} \geqslant -C_0$，

因此，可以得到

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} \geqslant -(1+\log\omega)[(\frac{h' u_1 + d_1}{\nu})^2 + \sum_{i=2}^{n} d_i^2] - C_0。 \tag{12}$$

下面重点计算 Ⅰ。

$$\Delta\omega = \Delta\nu + \sum_{l=1}^{n} d_l \Delta u_l \cos\theta + 2\sum_{i,l=1}^{n} \nabla_i u_l\ \nabla_i (d_l \cos\theta) + \sum_{l=1}^{n} u_l \Delta (d_l \cos\theta) =$$

$$\Delta\nu + \sum_{l=1}^{n} d_l (\gamma^l \Delta\nu + \nu\Delta\gamma^l + 2\sum_{i=1}^{n} \nabla_i\nu\ \nabla_i \gamma^l)\cos\theta + 2\sum_{i,l=1}^{n} (\gamma^l\ \nabla_i \nu + \nu\ \nabla_i \gamma^l)\ \nabla_i (d_l \cos\theta) + u_l \Delta (d_l \cos\theta) =$$

$$(1 + \sum_{l=1}^{n} \gamma^l d_l \cos\theta)\Delta\nu + \nu\cos\theta \sum_{l=1}^{n} d_l \Delta\gamma^l + 2\cos\theta \sum_{i,l=1}^{n} d_l\ \nabla_i \nu\ \nabla_i \gamma^l + 2\sum_{i,l=1}^{n} (\gamma^l\ \nabla_i\nu + \nu\ \nabla_i \gamma^l)\ \nabla_i (d_l\cos\theta) +$$

$$u_1 \Delta (d_1 \cos\theta) =: \mathrm{i} + \mathrm{ii} + \mathrm{iii} + \mathrm{iv} + \mathrm{v},$$

根据式(1)，有

$$\mathrm{i} = (1 + \sum_{l=1}^{n} \gamma^l d_l \cos\theta)\Delta\nu = (1 + \frac{u_1 d_1 \cos\theta}{\nu})[2\nu^3 (\sum_{i,k=1}^{n} h_i^k \langle e_k, \varepsilon_{n+1}\rangle)^2 + \nu^2 \langle (\nabla H - |A|^2 \gamma), \varepsilon_{n+1}\rangle] =$$

$$(1 + \frac{u_1 d_1 \cos\theta}{\nu})[2\nu^3 \sum_{i=1}^{n} h_{1i}^2\ \frac{u_1^2}{1+u_1^2} + \nu^2 \langle \nabla f_1, \varepsilon_{n+1}\rangle - \nu^2 \langle |A|^2 \gamma, \varepsilon_{n+1}\rangle] =$$

$$(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})[2\nu u_1^2\sum_{i=1}^{n}h_{1i}^2+\nu^2\langle\nabla f_1,\varepsilon_{n+1}\rangle-|A|^2\nu\langle\gamma,\varepsilon_{n+1}\rangle]=$$

$$(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})[2\nu u_1^2\sum_{i=1}^{n}h_{1i}^2+\nu^2\frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}}(\nabla_1 f+f_u\nabla_1 u)+|A|^2\nu]=$$

$$(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})[2\nu u_1^2\sum_{i=1}^{n}h_{1i}^2+\nu u_1(\nabla_1 f+f_u\nabla_1 u)+|A|^2\nu],$$

$$\text{ii}=\nu\cos\theta\sum_{l=1}^{n}d_l\Delta\gamma^l=\nu\cos\theta\sum_{l=1}^{n}d_l(\sum_{k=1}^{n}\nabla_k He_k^l-|A|^2\gamma^l)=\nu\cos\theta\sum_{l=1}^{n}d_l(\sum_{k=1}^{n}\nabla_k fe_k^l-|A|^2\gamma^l),$$

$$\text{iii}=2\cos\theta\sum_{i,l=1}^{n}d_l\nabla_i\nu\nabla_i\gamma^l=2\cos\theta\sum_{i,l=1}^{n}d_l(\nu^2\sum_{k=1}^{n}h_i^k\langle e_k,\varepsilon_{n+1}\rangle)(\sum_{k=1}^{n}h_i^k e_k^l)=$$

$$2\cos\theta\sum_{i,l,k=1}^{n}d_l\nu^2 h_{1i}\frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}}\sum_{k=1}^{n}h_i^k e_k^l=2u_1\nu\cos\theta\sum_{i,l,k=1}^{n}d_l h_{1i}h_i^k e_k^l,$$

$$\text{iv}=2\sum_{i,l=1}^{n}(\gamma^l\nabla_i\nu+\nu\nabla_i\gamma^l)\nabla_i(d_l\cos\theta)=2\sum_{i,l=1}^{n}(\gamma^l\nu^2\sum_{k=1}^{n}h_i^k\langle e_k,\varepsilon_{n+1}\rangle+\nu\sum_{k=1}^{n}h_i^k e_k^l)\nabla_i(d_l\cos\theta)=$$

$$2\sum_{i,l=1}^{n}(\gamma^l\nu^2 h_{1i}\frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}}+\nu\sum_{k=1}^{n}h_i^k e_k^l)\nabla_i(d_l\cos\theta)=2\sum_{i,l=1}^{n}(\gamma^l\nu u_1 h_{1i}+\nu\sum_{k=1}^{n}h_i^k e_k^l)\nabla_i(d_l\cos\theta),$$

综合上式得

$$\Delta\omega=2u_1^2(\nu+u_1 d_1\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}h_{1i}^2+(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})|A|^2\nu+(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})\nu u_1(\nabla_1 f+f_u\nabla_1 u)+$$

$$\nu\cos\theta\sum_{k,l=1}^{n}d_l\nabla_k fe_k^l-|A|^2\nu\cos\theta\sum_{l=1}^{n}d_l\gamma^l+2u_1\nu\cos\theta\sum_{i,l,k=1}^{n}d_l h_{1i}h_i^k e_k^l+2\nu\sum_{i,k,l=1}^{n}h_i^k e_k^l\nabla_i(d_l\cos\theta)+$$

$$2u_1^2\sum_{i,l=1}^{n}h_{1i}\nabla_i(d_l\cos\theta)+u_1\Delta(d_1\cos\theta)=L_1+L_2+L_3+O(\nu),\tag{13}$$

其中

$$L_1=2u_1^2(\nu+u_1 d_1\cos\theta)\sum_{i=1}^{n}h_{1i}^2+2u_1\nu\cos\theta\sum_{i,l,k=1}^{n}d_l h_{1i}h_i^k e_k^l+2u_1^2\sum_{i,l=1}^{n}h_{1i}\nabla_i(d_l\cos\theta),$$

$$L_2=(1+\frac{u_1 d_1\cos\theta}{\nu})|A|^2\nu-|A|^2\nu\cos\theta\sum_{l=1}^{n}d_l\gamma^l,L_3=2\nu\sum_{i,k,l=1}^{n}h_i^k e_k^l\nabla_i(d_l\cos\theta)。$$

接下来逐项计算 L_1、L_2 和 L_3。L_1 可由式(7)(8)得到

$$L_1=2u_1\sum_{i=1}^{n}h_{1i}[(\nu u_1+u_1^2 d_1\cos\theta)h_{1i}+\nu\cos\theta\sum_{k,l=1}^{n}d_l h_{ik}e_k^l+u_1\nabla_i(d_1\cos\theta)]=$$

$$-2u_1 a\sum_{i=1}^{n}h_{1i}(h'\nabla_i u+\nabla_i d),$$

L_2 直接计算即得

$$L_2=|A|^2\nu。\tag{14}$$

同样的计算可以得到

$$L_3=2\sum_{i=1}^{n}h_{1i}\nabla_i(d_1\cos\theta)+2\nu\sum_{i=2}^{n}h_{1i}\nabla_1(d_i\cos\theta)+2\nu\sum_{i=2}^{n}h_{ii}\nabla_i(d_i\cos\theta),$$

所以

$$L_1+L_3=2h_{11}[\frac{(d_1\cos\theta)_1}{\nu}-\frac{u_1 a}{\nu}(h'u_1+d_1)]+2\sum_{i=2}^{n}h_{1i}[(d_1\cos\theta)_1+(d_1\cos\theta)_i-u_1 ad_i]+$$

$$2\nu\sum_{i=2}^{n}h_{ii}(d_i\cos\theta)_i=:M_1+M_2+M_3。\tag{15}$$

M_1 可由式(10)得到

$$M_1 = 2[-\frac{a}{\nu T}(h'u_1 + d_1) + \frac{(\nu\cos\theta)^2}{T^2}\sum_{k=2}^{n} d_k^2 h_{kk} + O(\frac{\log\nu}{\nu^2})][\frac{(d_1\cos\theta)_1}{\nu} - \frac{u_1 a}{\nu}(h'u_1 + d_1)] =$$

$$\frac{2u_1 a^2}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + \frac{2(\nu\cos\theta)^2}{T^2}[O(\frac{1}{\nu}) - \frac{u_1 a}{\nu}(h'u_1 + d_1)]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 h_{ii} + O(\omega\log\omega), \tag{16}$$

M_2 可由式(9)得到

$$M_2 = 2\sum_{i=2}^{n}[\frac{a}{T}d_i + \frac{\nu\cos\theta}{T}h_{ii}d_i + O(\frac{1}{\nu})][u_1 a d_i + O(1)] =$$

$$\frac{2a^2 u_1}{T}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 + \frac{2\nu\cos\theta}{T}\sum_{i=2}^{n} h_{ii}d_i[u_1 a d_i + O(1)] + O(\omega\log\omega)。\tag{17}$$

把式(16)(17)代入式(15)可推得

$$L_1 + L_3 = \frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + \frac{2a^2 u_1}{T}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 +$$

$$[\frac{2\nu u_1 a\cos\theta}{T} - \frac{2\nu u_1 a\cos^2\theta}{T^2}(h'u_1 + d_1) + O(\frac{1}{\nu})]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 h_{ii} + 2\nu\sum_{i=2}^{n} h_{ii}(d_i\cos\theta)_i + O(\omega\log\omega), \tag{18}$$

再将式(14)(18)代入式(13)有

$$\Delta\omega = |A|^2\nu + \frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + \frac{2a^2 u_1}{T}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 +$$

$$[\frac{2\nu u_1 a\cos\theta}{T} + O(\frac{1}{\nu})]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 h_{ii} + 2\nu\sum_{i=2}^{n} h_{ii}(d_i\cos\theta)_i + O(\omega\log\omega) \geqslant$$

$$\nu\sum_{i=2}^{n} h_{ii}^2[\frac{2\nu u_1 a\cos\theta}{T} + O(\frac{1}{\nu})]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 h_{ii} + 2\nu\sum_{i=2}^{n} h_{ii}(d_i\cos\theta)_i +$$

$$\frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + \frac{2a^2 u_1}{T}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 + O(\omega\log\omega) \geqslant$$

$$-\frac{a^2\nu u_1^2\cos^2\theta}{T^2}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 + \frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + \frac{2a^2 u_1}{T}\sum_{i=2}^{n} d_i^2 + O(\omega\log\omega) \geqslant$$

$$\frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + [\frac{2a^2 u_1}{T} - \frac{a^2\nu u_1^2\cos^2\theta}{T^2}]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 + O(\omega\log\omega), \tag{19}$$

这样，联合式(11)(12)和(19)可得

$$O \geqslant \Delta G(x_0) \geqslant$$

$$\frac{2a^2 u_1}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 + [\frac{2a^2 u_1}{T} - \frac{a^2\nu u_1^2\cos^2\theta}{T^2}]\sum_{i=2}^{n} d_i^2 - (1 + \log\omega)[\frac{(h'u_1 + d_1)^2}{\nu^2} + \sum_{i=2}^{n} d_i^2] + O(1) =$$

$$\log\omega\{[\frac{2u_1\omega}{\nu^2 T}(h'u_1 + d_1)^2 - \frac{(h'u_1 + d_1)^2}{\nu^2}] + [\frac{2u_1\omega}{T} - \frac{\nu u_1^2\omega\cos^2\theta}{T^2} - 1]\sum_{i=2}^{n} d_i^2\} + O(1)。\tag{20}$$

易见

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{u_1}{\nu} = 1,\ \lim_{\nu\to+\infty}\frac{u_1\omega}{T} = \lim_{\nu\to+\infty}(1 - \frac{d_1\cos\theta}{T}) = 1,\ \lim_{\nu\to+\infty}\sup\frac{\nu u_1^2\omega\cos^2\theta}{T^2} \leqslant \frac{1}{1-b_0}。$$

注意到 $h' = \dfrac{2}{1-b_0}$ 和 $|\nabla d|^2 = 1$，根据式(20)可知 ν 一定可以被一个通用常数所控制，这样就完成了定理 1 在此种情况下的证明。

结合这三种情形，定理 1 证毕。

3　总结

本文主要是运用活动标架法得到了具有预定夹角边值问题的平均曲率方程的边界梯度估计，证明过

程中把点所在区域分为了三种情况进行讨论。利用曲面上的活动标架法可以很大程度上简化对该方程解的梯度估计的计算量,这类平均曲率方程的边界梯度估计的研究可以进一步地推广。

参考文献:

[1] SIMON L,SPRUCK J. Existence and regularity of a capillary surface with prescribed contact angle[J]. Archive for rational mechanics and analysis,1976,61(1):19-34.

[2] GERHARDT C. Global regularity of the solutions to the capillary problem[J]. Annali della scuola normale superiore di pisa,classe di scienze,1976,3(1):151-176.

[3] SPRUCK J. On the existence of a capillary surface with prescribed contact angle[J]. Communications on pure and applied mathematics,1975,28(2):189-200.

[4] BOMBIER E,DE GIORGI E,MIRANDA M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche[J]. Archive for rational mechanics and analysis,1969,32(4):255-267.

[5] KOREVAAR J N. An easy proof of the interior gradient bound for solutions to the prescribed mean curvature equation[M]//Proc Sympos Pure Math. Providence:American Mathematical Society,1986:81-89.

[6] WANG X J. Interior gradient estimates for mean curvature equations[J]. Mathematische zeitschrift,1998,228(1):73-81.

[7] SHENG W,TRUDINGER N,WANG X J. Prescribed Weingarten curvature equations[M]//Recent development in geometry and analysis. Boston:International Press,2012.

[8] 麻希南,王培合.具有给定 Neumann 边值或预定夹角边值的平均曲率方程的边界梯度估计[J].中国科学:数学,2018,48(1):213-226.

[9] DO CARMO M P. Riemannian geometry[M]. New York:Springer,2008.

[10] LIEBERMAN G. Oblique boundary value problems for elliptic equations[M]. Singapore:World Scientific Publishing,2013.

[11] XU J. A new proof of gradient estimates for mean curvature equations with oblique boundary conditions[J]. Communications on pure and applied mathematics,2016,15(5):1719-1742.

Boundary Gradient Estimation for the Mean Curvature Equation with a Predetermined Angle Boundary Value Problem

SI Yuxin,HAN Fei,SUN Shenghui

(*College of Mathematical Sciences*,*Xinjiang Normal University*,*Urumqi* 830017,*China*)

Abstract:The maximum principle and the moving frame method are used to study the mean curvature equation of the boundary value problem with a predetermined included angle. According to the location of the point,the discussion is divided into three cases,and the boundary gradient estimation of the mean curvature equation of the predetermined included angle problem is obtained.

Keywords:movable standard frame;maximum principle;gradient estimation;predetermined angle boundary value;mean curvature equation

(责任编辑:贾晶晶)