【微分方程与动力系统研究】

具有对流项的单种群时滞反应扩散模型的稳定性

潘英翠，张存华

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：采用 Lyapunov-Schmidt 约化方法建立单种群模型正稳态的存在性和多重性，通过无穷小生成元 $A_{\tau,\lambda}$ 的特征值分布，获得了关于空间非齐次稳态解的稳定性。

关键词：Lyapunov-Schmidt 约化方法；反应扩散模型；稳定性

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.009

0　引言

近年来，越来越多的研究人员关注了对流环境中的种群动力学，这极大地促进了传统反应扩散方程的进一步发展。在对流环境中，不能忽略某些外部环境力（如河流、重力、风等）对物种生存的影响，这意味着必须在模拟系统中添加对流项。在文献[1]的基础上进行推广，得到具有对流项的单种群模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=du_{xx}(x,t)-\alpha u_x(x,t)-\varepsilon u(x,t)+g(u(x,t-r)),u(x,t-r)),t>0,x\in(0,L),\\ u(0,t)=u(L,t)=0,t>0。\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\alpha>0$ 是对流率，表示由外部环境引起物种的定向运动；$d>0$，$\varepsilon>0$，$r\geqslant 0$，$u(x,t)\in L^2([0,L],\mathbf{R})$，$g\in C^m(\mathbf{R},\mathbf{R})(m\geqslant 3)$满足 $g(0)=0$。本文通过 Lyapunov-Schmidt 约化方法研究了反应扩散模型(1)的空间非齐次稳态解的稳定性。令

$$\tilde{u}=\exp(-\alpha x/d)u,\tilde{t}=dt,\tilde{\varepsilon}=\varepsilon/d,\tau=dr,\gamma=\alpha/d,f(u,u)=g(u,u)/d,$$

依旧用 u，t 和 ε 表示 $\tilde{u}$，$\tilde{t}$ 和 $\tilde{\varepsilon}$，则模型(1)变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\mathrm{e}^{-\gamma x}(\mathrm{e}^{\gamma x}u_x(x,t))_x-\varepsilon u(x,t)+\mathrm{e}^{-\gamma x}f(\mathrm{e}^{\gamma x}u(x,t-\tau_1),\mathrm{e}^{\gamma x}u(x,t-\tau_2)),t>0,x\in(0,L),\\ u(0,t)=u(L,t)=0,t>0。\end{cases}\tag{2}$$

其中，$u(x,t)$是在位置 x 和时刻 t 处物种的种群密度，ε 是成年种群的死亡率，时滞 τ 是生成时间，非线性函数 f 是种群的增长率。通常，种群的增长率有逻辑增长（f 递减）和弱 Allee 效应增长（f 最初从正值增加，然后递减）两种类型。此外，这项调查是在 Dirichlet 边界条件下进行的，这表明外部环境是恶劣的，物种不能跨越环境边界移动。当 $\gamma=0$ 时，系统(2)简化为具有延迟的经典招募模型，这在生物应用中经常使用。

文献[2]研究了在河流生态学中出现的 $g(u)=ru-u^2$ 的单物种模型，并提出了一些丰富的生物学解释。文献[3]通过研究对流项和竞争引起的种间相互作用，证明在某些条件下的共存稳态。文献[4-5]研

收稿日期：2022-09-29

基金项目：国家自然科学基金项目(61763024)

第一作者简介：潘英翠(1998—)，女，山东临沂人，硕士研究生，主要从事反应扩散方程研究。

E-mail：panyc321@163.com

究了空间非齐次稳态解的存在性、唯一性和局部稳定性，并未研究空间非齐次稳态解的多重性。Tang 等一直专注于反应扩散对流模型，并从不同的数学和生物学角度获得了许多有趣的结果[6-7]。但目前很少有人尝试了解模型(2)的种群动力学。

为了更好地推导定理证明的结果，参考文献[8]中引理 2.1 研究线性特征值问题

$$\begin{cases} -\mathrm{e}^{-\gamma x}(\mathrm{e}^{\gamma x}\varphi_x)_x+q(x)\varphi=\lambda\varphi, x\in(0,L), \\ \varphi(0)=\varphi(L)=0, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $q(x)\in C([0,L])$。

引理 1 方程(3)的所有特征值都是实的，最小特征值 $\lambda_1(q)$可以表示为

$$\lambda_1(q)=\inf_{\varphi\neq 0,\varphi\in H^1(0,L)}\frac{\int_0^L \mathrm{e}^{\gamma x}(\varphi_x^2+q(x)\varphi^2)\mathrm{d}x}{\int_0^L \mathrm{e}^{\gamma x}\varphi^2\mathrm{d}x},$$

它对应于一个正特征函数 φ_1。$\lambda_1(q)$ 是主特征值，其对应的特征函数不改变符号。此外，$q_1(x)\geqslant q_2(x)$ 意味着 $\lambda_1(q_1(x))\geqslant\lambda_1(q_2(x))$，并且只有当 $q_1(x)\equiv q_2(x)$ 时，等式才成立；在 $C([0,L])$ 中，$q_n(x)\to q(x)$ 意味着 $\lambda_1(q_n(x))\to\lambda_1(q(x))$。

注 对于每个 $\alpha\in\mathbf{R}^+$，$L>0$，定义 $\lambda_1=\lambda_1(0)>0$ 及其相应的主特征函数，用 φ_1 表示，满足 $\|\varphi_1\|_{L^2[0,L]}=1$。

符号说明：$C^k(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 是从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathscr{Y}$ 的 k 次连续可微映射的 Banach 空间，其中 $\mathscr{X}=H^2([0,L])\cap H_0^1([0,L])$，$\mathscr{Y}=L^2([0,L])$，且

$$H_0^1([0,L])=\{u\in H^1(\Omega,\mathbf{R})\mid u(x)=0,x\in\partial\Omega\}。$$

此外，$H^k(\Omega)(k\geqslant 1)$ 是定义在 Ω 上的 L^2 函数构成的 Sobolev 空间。标准内积为 $\langle u,v\rangle=\int_\Omega\overline{u}(x)v(x)\mathrm{d}x$。

1 Lyapunov-Schmidt 约化

这一节中，将应用 Lyapunov-Schmidt 约化方法，得到一个合适的分岔方程，并使用它来解决模型(2)正稳态解的存在性和多重性。首先，给出模型(2)的稳态方程

$$\begin{cases} (\mathrm{e}^{\gamma x}u_x)_x-\varepsilon\mathrm{e}^{\gamma x}u+f(\mathrm{e}^{\gamma x}u,\mathrm{e}^{\gamma x}u)=0, x\in(0,L), \\ u(0)=u(L)=0。 \end{cases} \tag{4}$$

定义 $G:\mathscr{X}\times\mathbf{R}\to\mathscr{Y}$，由

$$G(u,\lambda)=(\mathrm{e}^{\gamma x}u_x)_x-(f_1'(0,0)+f_2'(0,0)-\lambda)\mathrm{e}^{\gamma x}u+f(\mathrm{e}^{\gamma x}u,\mathrm{e}^{\gamma x}u),$$

令 $\lambda=f_1'(0,0)+f_2'(0,0)-\varepsilon$，$u\in\mathscr{X}$。显然，$G(u,\lambda)=0$ 对于每个固定参数值 $\lambda\in\mathbf{R}$，总是有一个平凡解 $u=0$。接下来讨论 $G(u,\lambda)=0$ 在 $u=0$ 附近的解集。首先计算 G 在$(0,\lambda)$处关于 u 的 Frechet 导数，

$$\mathscr{L}_\lambda u=(\mathrm{e}^{\gamma x}u_x)_x+\lambda\mathrm{e}^{\gamma x}u, u\in\mathscr{X},$$

显然，$\mathscr{L}_\lambda$ 是有界且可逆的，根据闭图像定理得 $\mathscr{L}_\lambda^{-1}$ 是有界的。因此，利用隐函数定理，证明非平凡解在点 $u=0$ 的邻域中的唯一性。此外，可知 $\mathscr{L}_\lambda$ 是自伴算子，即$\langle u,\mathscr{L}_\lambda v\rangle=\langle\mathscr{L}_\lambda u,v\rangle$。因此，将空间 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 分解为

$$\mathscr{X}=\mathscr{K}\oplus\mathscr{X}_1,\mathscr{Y}=\mathscr{K}\oplus\mathscr{Y}_1,$$

其中

$$\mathscr{K}=\mathrm{span}\{\varphi_1\},\mathscr{X}_1=\{y\in\mathscr{X}|\langle v,y\rangle=0,v\in\mathscr{K}\},\mathscr{Y}_1=\{y\in\mathscr{Y}|\langle v,y\rangle=0,v\in\mathscr{K}\}。$$

定理 1 假设 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq 0$，则存在常数 λ_*，λ^*，满足 $\lambda_*<\lambda_1<\lambda^*$ 和 $0<|\lambda^*-\lambda_*|\ll 1$，以及一个从$(\lambda_*,\lambda^*)$到 $\mathbf{R}$ 的连续可微映射 $\lambda\to\overline{w}_\lambda$，使模型(4)具有非平凡解

$$u_\lambda=\overline{w}_\lambda\varphi_1(x)+h(\overline{w}_\lambda\varphi_1(x),\lambda),$$

其中，$h(\overline{w}_\lambda\varphi_1(x),\lambda)\in\mathscr{X}_1$，且存在 $\lambda\in(\lambda_*,\lambda_1)\cup(\lambda_1,\lambda^*)$，并满足

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{u_\lambda}{\lambda-\lambda_1}=-\frac{2\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x}{[f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)]\int_0^L e^{2\gamma x}\varphi_1^3(x)\mathrm{d}x}\varphi_1。$$

该定理描述了正稳态解的存在性、唯一性和渐近框架。

证明　首先，将 P 和 $I-P$ 表示为投影算子 $P:\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}_1$，$I-P:\mathscr{Y}\to\mathscr{K}$。那么，$G(u,\lambda)=0$ 等于系统

$$PG(u_1+u_2,\lambda)=0,(I-P)G(u_1+u_2,\lambda)=0,\tag{5}$$

其中，$u_1+u_2=u\in\mathscr{X}$ 满足 $u_1\in\mathscr{K}$ 和 $u_2\in\mathscr{X}_1$。显然，$G(0,\lambda_1)=0$，$PG_{u_2}(0,\lambda_1)=\mathscr{L}_{\lambda_1}$。根据隐函数定理，存在一个连续可微映射 $h:\Xi\to\mathscr{X}_1$，使得

$$h(0,\lambda)=0,PG(u_1+h(u_1,\lambda),\lambda)=0,\tag{6}$$

其中，Ξ 是 $\mathscr{K}\times\mathbf{R}$ 中 $(0,\lambda_1)$ 的一个开邻域。将 $u_2=h(u_1,\lambda)$ 代入式(5)的第 2 个方程，得到

$$m(u_1,\lambda)\equiv(I-P)G(u_1+h(u_1,\lambda),\lambda)=0,\tag{7}$$

将其称为方程(4)的分岔方程。所以，每个解都属于 $m(u_1,\lambda)=0$，且在 Ξ 中都一一对应于 $G(u,\lambda)$ 的某个解。

由于 $u_1\in\mathscr{K}=\mathrm{span}\{\varphi_1\}$，存在常数 $\overline{w}\in\mathbf{R}$，使得 $u_1=\overline{w}\varphi_1$。然后，将 $u_1=\overline{w}\varphi_1$ 代入式(7)，并计算 φ_1 在 $[0,L]$ 上的内积，得到

$$g(\overline{w},\lambda)=\int_0^L\varphi_1(x)G(\overline{w}\varphi_1(x)+h(\overline{w}\varphi_1(x),\lambda),\lambda)\mathrm{d}x=0。$$

容易看出 $g(0,\lambda)=0$，由此得出 $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 的形式为

$$g(\overline{w},\lambda)=\overline{w}[(\lambda-\lambda_1)+B(\lambda)\overline{w}+C(\lambda)\overline{w}^2+o(\overline{w}^2)],$$

整理得

$$B(\lambda)=\frac{[f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)]\int_0^L e^{2\gamma x}\varphi_1^3(x)\mathrm{d}x}{2\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x}\triangleq B,$$

$$C(\lambda)=\frac{1}{\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x}\Big[\frac{f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)}{2}\int_0^L e^{2\gamma x}h_{u_1u_1}(\varphi_1(x),\lambda)\varphi_1^4(x)\mathrm{d}x+$$
$$\frac{f_{111}(0,0)+3f_{112}(0,0)+3f_{122}(0,0)+f_{222}(0,0)}{6}\int_0^L e^{3\gamma x}\varphi_1^4(x)\mathrm{d}x\Big]\triangleq C。$$

根据等式(6)，$\mathscr{L}_{\lambda_1}h_{u_1u_1}(\varphi_1,\lambda_1)+PG_{uu}(\varphi_1,\lambda_1)=0$，则

$$h_{u_1u_1}(\varphi_1,\lambda_1)=-[f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)]\mathscr{L}_{\lambda_1}^{-1}\varphi_1^2e^{2\gamma x}。$$

根据假设 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0$ 和隐函数定理，存在常数 λ_* 和 λ^* 满足 $\lambda_*<\lambda_1<\lambda^*$，$0<|\lambda^*-\lambda_*|\ll1$ 和连续可微映射 $\overline{w}_\lambda:(\lambda_*,\lambda^*)\to\mathbf{R}$，使得对于 $\lambda\in(\lambda_*,\lambda^*)$，$g(\overline{w}_\lambda,\lambda)\equiv0$，得到

$$\overline{w}_\lambda=\frac{\lambda_1-\lambda}{B}+o(|\lambda-\lambda_1|)。$$

综上，定理 1 证明完毕。

由定理 1 建立的空间非齐次稳态解 u_λ 的表达式可以得出，如果

$(\lambda_1-\lambda)[f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)]>0$，$((\lambda_1-\lambda)[f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0),f_{22}(0,0)]<0)$，

则 u_λ 为正(为负)。在生物学中，研究人员只对正稳态解感兴趣。

如果 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)=0$ 且 $C\neq0$，当 λ 接近 λ_1 时 $g(\cdot,\lambda)$ 的零点可能发生鞍结分岔。更准确地说，如果 $C<0(C>0)$，在原点附近，当 $\lambda>\lambda_1(\lambda<\lambda_1)$ 时 $g(\cdot,\lambda)$ 正好存在两个零点 $\overline{w}=\overline{w}_\lambda^\pm$，当 $\lambda=\lambda_1$ 时 $g(\cdot,\lambda)$ 只存在一个零点 $\overline{w}=0$，当 $\lambda<\lambda_1(\lambda>\lambda_1)$ 时 $g(\cdot,\lambda)$ 不存在任何零点。

定理 2　假设 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)=0$ 且

$$f_{111}(0,0)+3f_{112}(0,0)+3f_{122}(0,0)+f_{222}(0,0)<0$$
$$(f_{111}(0,0)+3f_{112}(0,0)+3f_{122}(0,0)+f_{222}(0,0)>0),$$

则存在一个常数 $\lambda^*>\lambda_1(\lambda^*<\lambda_1)$ 和两个从 (λ_1,λ^*) 到 $\mathbf{R}$(从 (λ_*,λ_1) 到 $\mathbf{R}$)的连续可微映射 $\lambda\to\overline{w}_\lambda^\pm$,使得模型(4)有两个非平凡解

$$u_\lambda^\pm(x)=\overline{w}_\lambda^\pm\varphi_1(x)+h(\overline{w}_\lambda^\pm\varphi_1(x),\lambda),$$

其中 $h(\overline{w}_\lambda^\pm\varphi_1(x),\lambda)\in\mathscr{X}_1$,对于 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)(\lambda\in(\lambda_*,\lambda_1))$ 存在,并满足

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{u_\lambda^\pm}{\sqrt{\dfrac{\lambda_1-\lambda}{f_{111}(0,0)+3f_{112}(0,0)+3f_{122}(0,0)+f_{222}(0,0)}}}=\pm\sqrt{\frac{6\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^L e^{3\gamma x}\varphi_1^4(x)\mathrm{d}x}}\varphi_1。$$

注　由定理 2 建立的两个空间非齐次稳态解 $u_\lambda^\pm$ 知,其中一个为正,另一个为负。

2　稳定性

在本节,讨论 $\tau_1=0,\tau_2\neq0$ 的情况,并始终假设

$$f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0,\lambda\in\Lambda\triangleq(\lambda_*,\lambda_1)\cup(\lambda_1,\lambda^*),$$

并将 $u_\lambda=\overline{w}_\lambda\varphi_1(x)+h(\overline{w}_\lambda\varphi_1(x),\lambda)$ 作为由定理 1 确定的空间非齐次稳态解。将模型(2)在 u_λ 处线性化,可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}=e^{-\gamma x}[(e^{\gamma x}v_x)_x(x,t)]-\varepsilon v(x,t)+f_1'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)v(x,t)+f_2'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)v(x,t-\tau),\\ v(0,t)=v(L,t)=0,\end{cases}\tag{8}$$

其中,$t>0,x\in(0,L)$。根据文献[9-10],由式(8)的解所诱导的半群有一个无穷小生成元 $A_{\tau,\lambda}$,$A_{\tau,\lambda}\Psi=\dot{\Psi}$,对于所有 $\Psi\in\mathrm{Dom}(A_{\tau,\lambda})$,其中

$$\mathrm{Dom}(A_{\tau,\lambda})=\{\Psi\in C_{\mathscr{C}}\cap C_{\mathscr{C}}^1\,|\,\Psi(0)\in\mathscr{X}_{\mathscr{C}},\dot{\Psi}(0)=I\},$$
$$I=e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}(\Psi(0))_x)_x-\varepsilon\Psi(0)+f_1'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)\Psi(0)+f_2'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)\Psi(-\tau),$$
$$C_{\mathscr{C}}=C([-\tau,0],\mathscr{Y}_{\mathscr{C}}),C_{\mathscr{C}}^1=C^1([-\tau,0],\mathscr{Y}_{\mathscr{C}})。$$

$A_{\tau,\lambda}$ 的谱集是

$$\sigma(A_{\tau,\lambda})=\{\mu\in\mathscr{C}\,|\,m(\lambda,\mu,\tau)\Psi=0\text{ 对于某些 }\Psi\in\mathscr{X}_{\mathscr{C}}\setminus\{0\}\},$$
$$m(\lambda,\mu,\tau)\Psi\triangleq e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}\Psi_x)_x-\varepsilon\Psi+[f_1'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)+f_2'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)e^{-\mu\tau}]\Psi-\mu\Psi。\tag{9}$$

将 τ 作为分岔参数,重点研究了 $A_{\tau,\lambda}$ 的谱来描述系统(2)正稳态解 μ_λ 的稳定性。

定理 3　假设 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0$,那么:(1)当 $\tau=0$ 时,(ⅰ)若 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0$,则存在 $\lambda^*>\lambda_1$ 使得 $A_{0,\lambda}$ 的所有特征值在 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$ 时只有负实部,即当 $\tau=0$ 时正稳态解 μ_λ 是局部渐近稳定的;(ⅱ)若 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)>0$,则存在 $\lambda_*<\lambda_1$ 使得 $A_{0,\lambda}$ 至少有一个具有正实部的特征值,即对于 $\lambda\in(\lambda_*,\lambda_1)$ 正稳态解 μ_λ 是不稳定的。(2)对于所有 $\tau>0$ 和 $\lambda\in\Lambda$,$0\notin\sigma(A_{\tau,\lambda})$。

证明　首先给出(1)(ⅰ)的证明,(1)(ⅱ)的证明与(1)(ⅰ)类似。根据式(9),当 $\tau=0$ 时,可得

$$e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}\Psi_x)_x-\varepsilon\Psi+[f_1'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)+f_2'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)]\Psi=\mu\Psi。\tag{10}$$

对于每个 $\Psi\in\mathscr{X}_{\mathscr{C}}\setminus\{0\}$,根据第 1 节中提到的空间分解,可以采取变换

$$\Psi=\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda,\tag{11}$$

满足 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1}\beta_\lambda=1$ 和 $\langle\phi_\lambda,\varphi_1\rangle=0$。借助泰勒公式,得到

$$f'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)=f_1'(0,0)+f_2'(0,0)+(f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0))e^{\gamma x}u_\lambda+o(|\lambda-\lambda_1|)。$$

注意，当 $\lambda>\lambda_1$ 时，$f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)<0$，$u_\lambda=\overline{w}_\lambda\varphi_1+h(\overline{w}_\lambda\varphi_1,\lambda)$。将式(10)的两侧同乘 φ_1 并在$(0,L)$上积分，计算得到

$$\beta_\lambda\mu\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2\,dx=$$

$$\int_0^L(e^{\gamma x}(\Psi_x))_x\varphi_1\,dx+\int_0^L(f'_1(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)+f'_2(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)-\varepsilon)e^{\gamma x}\Psi\varphi_1\,dx-\mu\overline{w}_\lambda\int_0^L e^{\gamma x}\phi_\lambda\varphi_1\,dx=$$

$$\int_0^L(e^{\gamma x}[\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda]_x)_x\varphi_1\,dx+\int_0^L(f'_1(0,0)+f'_2(0,0)-\varepsilon)e^{\gamma x}[\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda]\varphi_1\,dx+$$

$$(f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0))\int_0^L e^{2\gamma x}[\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda]\overline{w}_\lambda\varphi_1^2\,dx+o(|\lambda-\lambda_1|)=$$

$$(f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0))\int_0^L e^{2\gamma x}[\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda]\overline{w}_\lambda\varphi_1^2\,dx+$$

$$(\lambda-\lambda_1)\int_0^L e^{rx}[\beta_\lambda\varphi_1+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda]\varphi_1\,dx+o(|\lambda-\lambda_1|)=$$

$$(f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0))\beta_\lambda\int_0^L e^{2\gamma x}\overline{w}_\lambda\varphi_1^3\,dx+(\lambda-\lambda_1)\beta_\lambda\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2\,dx+o(|\lambda-\lambda_1|)=$$

$$-(\lambda-\lambda_1)\beta_\lambda\int_0^L e^{\gamma x}\varphi_1^2\,dx+o(|\lambda-\lambda_1|),$$

这意味着$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1}\dfrac{\mu}{\lambda-\lambda_1}=-1<0$。因此，存在 $\lambda^*>\lambda_1$，使得 $A_{0,\lambda}$的所有特征值在$\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$时只有负实部。类似地，存在 $\lambda_*<\lambda_1$，使得在$\lambda\in(\lambda_*,\lambda_1)$时 $A_{0,\lambda}$至少有一个实部为正的特征值，此时 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)>0$。定理 3(1)证明完成。

接下来，证明 $0\notin\sigma(A_{0,\lambda})$，对于所有 $\tau>0$ 和 $\lambda\in\Lambda=(\lambda_*,\lambda_1)\cup(\lambda_1,\lambda^*)$。关注 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$的情况。如果 $0\notin\sigma(A_{0,\lambda})$，对于任何 $\tau>0$，存在一个 $\Psi\in\mathscr{X}_{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$，使得

$$e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}\Psi_x)_x-\varepsilon\Psi+f'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)\Psi=0。\tag{12}$$

基于上述第(1)部分的分析，特别是式(10)，在 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)<0$ 和 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$的条件下，知算子 $e^{-\gamma x}(e^{\gamma x}(\cdot)_x)_x-\varepsilon+f'(e^{\gamma x}u_\lambda,e^{\gamma x}u_\lambda)$的所有特征值只有负实部。即没有 $\Psi\in\mathscr{X}_{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$使得等式(12)在 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$下成立。

需要注意的是，上述方法并不适用于 $\lambda\in(\lambda_*,\lambda_1)$的情况。假设相反，若 $0\in\sigma(A_{0,\lambda})$，则存在一些 $\Psi\in\mathscr{X}_{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$满足 $m(\lambda,0,\tau)\Psi=0$。与式(11)类似，同样取 $\Psi(x)=\beta_\lambda\varphi_1(x)+\overline{w}_\lambda\phi_\lambda(x)$，其中 $\beta_\lambda\in\mathbf{R}$，$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1}\beta_\lambda=1$ 和 $\phi_\lambda\in\mathscr{X}_1$，同时满足$\langle\varphi_1,\phi_\lambda\rangle=0$。由式(9)可以得出

$$\beta_\lambda e^{\gamma x}m(\lambda,0,\tau)\varphi_1+\overline{w}_\lambda e^{\gamma x}m(\lambda,0,\tau)\phi_\lambda(x)=0,\tag{13}$$

其中 $\lambda\in(\lambda_1,\lambda^*)$。通过在 $\lambda=\lambda_1$ 附近展开系数 β_λ 和 $\phi_\lambda(x)$，得到

$$\beta_\lambda=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j(\lambda-\lambda_1)^j,\ \phi_\lambda(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j(x)(\lambda-\lambda_1)^j。$$

设

$$\tilde{\varphi}\triangleq\lim_{\lambda\to\lambda_1}e^{\gamma x}\frac{m(\lambda,0,\tau)\varphi_1}{\overline{w}_\lambda}=\varphi_1\lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{\lambda-\lambda_1}{\overline{w}_\lambda}e^{\gamma x}+(f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0))\varphi_1^2e^{2\gamma x}。$$

显然，如果 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0$，则$\tilde{\varphi}\neq0$，$\langle\varphi_1,\tilde{\varphi}\rangle=B$。比较等式(13)中各项的系数，得到

$$\beta_0\tilde{\varphi}+((e^{\gamma x}(\cdot)_x)_x+\lambda_1e^{\gamma x})\phi_0=0。$$

如果 $f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)\neq0$，即$\tilde{\varphi}\notin\mathscr{Y}_1$，那么 $\beta_0=0$，如果它被限制在 $\mathscr{X}_1$ 中，则 $\phi_0\in\mathscr{X}_1$ 且$(e^{\gamma x}(\cdot)_x)_x+\lambda_1e^{\gamma x}$是可逆的，它将导致 $\phi_0(x)\equiv0$。比较式(13)的高阶项的系数可得，对于所有 x 和$j\in\mathbf{N}$，

$\beta_j=\phi_j(x)\equiv 0$。这意味着 $m(\lambda,0,\tau)\Psi=0$ 只有一个解 $\Psi=0$，这与 $\Psi\in\mathscr{X}_{\mathscr{C}}\setminus\{0\}$ 相矛盾。因此，$f_{11}(0,0)+2f_{12}(0,0)+f_{22}(0,0)=0$。

综上所述，定理 3 得证。

参考文献：

[1] MA L，WEI D. Hopf bifurcation of a delayed reaction-diffusion model with advection term[J]. Nonlinear analysis，2021，212. DOI：10. 1016/j. na. 2021. 112455.

[2] XU F F，GAN W Z，TANG D. Population dynamics and evolution in river ecosystem[J]. Nonlinear analysis，2020，51. DOI：10. 1016/j. nonrwa. 2019. 102983.

[3] MA L，GAO J P，LUO Y Q，et al. Existence of the positive steady states of a reaction-diffusion-advection competition model[J]. Applied mathematics letters，2021，119(2). DOI：https://doi. org/10. 1016/j. aml. 2021. 107205.

[4] MA L，GUO S J. Bifurcation and stability of a two-species reaction-diffusion-advection competition model[J]. Nonlinear analysis：real world applications，2021，59(7). DOI：10. 1016/j. nonrwa. 2020. 103241.

[5] MA L，GUO S J. Positive solutions in the competitive Lotka-Volterra reaction-diffusion model with advection terms[J]. Proceedings of the American mathematical society，2021，149(7)：3013-3019.

[6] TANG D. Dynamical behavior for a Lotka-Volterra weak competition system in advective homogeneous environment[J]. Discrete and continuous dynamical systems，2019，24(9)：4913-4928.

[7] TANG D，ZHOU P. On a Lotka-Volterra competition-diffusion-advection system：homogeneity vs heterogeneity[J]. Differential equations，2020，268(4)：1570-1599.

[8] WEI D，GUO S J. Qualitative analysis of a Lotka-Volterra competition-diffusion-advection system [J]. Discrete and continuous dynamical systems，2021，26(5)：2599-2623.

[9] GUO S J，WU J H. Bifurcation theory of functional differential equations[M]. New York：Springer-Verlag，2013.

[10] WU J H. Theory and applications of partial functional-differential equation[M]. New York：Springer-Verlag，1996.

Stability of Single-population Time-delayed Reaction-diffusion Models with Advection Terms

PAN Yingcui，ZHANG Cunhua

(*School of Mathematics and Physics*，*Lanzhou Jiaotong University*，*Lanzhou* 730070，*China*)

Abstract：Lyapunov-Schmidt reduction method is used to establish the existence and multiplicity of the positive steady state for a single population model. By studying the eigenvalue distribution of infinitesimal generators $A_{\tau,\lambda}$，the stability of the solution with respect to spatially in homogeneous steady states is obtained.

Keywords：Lyapunov-Schmidt reduction；reaction-diffusion models；stability

（责任编辑：贾晶晶）