【微分方程与动力系统研究】

一类具年龄结构的周期种群系统的最优收获

贺亚权

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：考虑一类具年龄结构的周期种群系统的最优收获问题。利用压缩映射原理研究了系统解的存在唯一性；构造了极值化序列，运用解的比较结论和 Mazur 定理证得了最优收获控制问题最优解的存在性；构建了适当的共轭方程，利用法锥概念的刻画，得出了最优收获控制问题最优解的一阶必要条件。

关键词：周期；最优收获；年龄结构；法锥

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.010

自 20 世纪以来，生物种群的最优收获控制有关问题一直被广泛研究[1-12]。1985 年文献[1]对具有年龄结构的种群模型的最优控制问题做了相应研究，之后，也有大量学者致力于这方面的研究工作。文献[2]研究了一类具有年龄结构的线性周期种群线性动力系统的最优控制问题，利用 Mazur 定理证明了最优控制问题最优解的存在性，并由法锥概念的特征刻画得到了最优控制问题最优解存在的必要条件。但该研究未考虑外界输入所带来的影响。本文在文献[2]基础上进行研究，对已有结果进行补充和推广。

在周期环境下，考虑最优控制问题

$$\mathrm{Max}\int_0^T\int_0^{a_+} u(a)p^u(a,t)\,\mathrm{d}a\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中，

$Q=[0,a_+)\times R(T,a_+\in(0,+\infty)),u\in U=\{v\in L^\infty(0,a_+),0\leqslant v(a)\leqslant L,\forall a\in(0,a_+)\}$，

并且 p^u 为

$$\begin{cases} Dp(a,t)+\mu(a,t)p(a,t)=f(a,t)-u(a)p(a,t),(a,t)\in Q,\\ p(0,t)=\int_0^{a_+}\beta(a,t)p(a,t)\mathrm{d}a,t\in\mathbf{R},\\ p(a,t)=p(a,a+T),(a,t)\in Q \end{cases} \tag{2}$$

的解。在系统(2)中，$Dp(a,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{p(a+\varepsilon,t+\varepsilon)-p(a,t)}{\varepsilon}$ 且 $\int_0^T\int_0^{a_+}u(a)p^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$ 表示在一个周期内的总收获。

1　解的适定性

(A1) $\beta\in L_T^\infty(Q),\beta(a,t)\geqslant 0$ 在 Q 中几乎处处成立。

收稿日期：2022-09-24

基金项目：国家自然科学基金项目(11561041)

作者简介：贺亚权(1998—)，男，山西朔州人，硕士研究生，主要从事生物数学研究。

E-mail：3189967995@qq.com

(A2) $\mu(a,t)=\mu_0(a)+\bar{\mu}(a,t)$ 在 Q 中几乎处处成立。

其中：$\mu_0\in L^1_{loc}([0,a_+))$，$\mu_0(a)\geqslant 0$ 在$[0,a_+)$中几乎处处成立；$\int_0^{a_+}\mu_0(a)\mathrm{d}a=+\infty$；$\bar{\mu}\in L^\infty_T(Q)$，$\bar{\mu}(a,t)\geqslant 0$ 在 Q 中几乎处处成立。此处 $L^\infty_T(Q)=\{y\in L^\infty(Q);y(t)=y(t+T),\text{a.e. } t\in Q\}$。

(A3) $f(a,t)$ 表示输入率并且 $f(a,t)>0$ 在 Q 中几乎处处成立。

(A4) $r(A^{\mu+0})<1$，其中 $r(A^{\mu+0})$ 是有界线性算子 $A^{\mu+0}:L^\infty_T(\mathbf{R})\to L^\infty_T(\mathbf{R})$ 的谱半径。$A^{\mu+0}$ 定义为

$$(A^\mu h)(t)=\int_0^{a_+}K(t,s;\mu)h(t-s)\mathrm{d}s,\ \forall h\in L^\infty_T(\mathbf{R})=\{\theta\in L^\infty(\mathbf{R});\theta(t)=(t+T)\quad \text{a.e. } t\in\mathbf{R}\},$$

这里

$$K(t,s;\mu)=\begin{cases}\beta(s,t)\exp\{-\int_0^s\mu(a-\sigma,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\},0\leqslant s\leqslant\min(t,a_+),\\ 0,\text{其他}。\end{cases}$$

定义1 系统(2)的解是指函数 $p\in L^\infty_T(Q)$，该函数在几乎每一条特征线 $a-t=k$(常数)上绝对连续，且满足条件

$$\begin{cases}Dp(a,t)+\mu(a,t)p(a,t)=f(a,t)-u(a)p(a,t),(a,t)\in Q,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}p(\varepsilon,t+\varepsilon)=\int_0^{a_+}\beta(a,t)p(a,t)\mathrm{d}a,t\in\mathbf{R},\\ p(a,t)=p(a,t+T),(a,t)\in Q。\end{cases}$$

由标准证明[4]，易得下列结论：

结论1 若条件(A1)～(A4)成立，系统(2)有唯一的非负解 $p^u\in L^\infty_T(Q)$，而且在 $L^\infty_T(Q)$ 中，若 $u_n\to u$，则在 $L^\infty_T(Q)$ 中有 $p^{u_n}\to p^u$，其中 p^{u_n}，p^u，分别表示系统(2)对应于 $u:=u_n$，$u:=u$ 的解。

结论2 系统(2)的解 $p\in L^\infty(Q)$ 也是

$$\int_0^T\int_0^{a_+}\{-D\varphi(a,t)+\mu(a,t)\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)\}p(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^T\int_0^{a_+}[f(a,t)-u(a)p(a,t)]\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t$$

意义的弱解，其中 φ 在几乎每一条特征线 $a-t=k$ 绝对连续，且满足条件

$$\begin{cases}\varphi\in L^\infty_T(Q),\\ D\varphi\in L^1((0,a_+)\times(0,T)),\\ \mu\varphi\in L^1((0,a_+)\times(0,T))。\end{cases}\tag{3}$$

为了方便，用 Φ 表示满足条件(3)所有 φ 构成的集合。

结论3 在条件(A1)～(A4)下，对于任何 $u\in U$，系统(2)都存在唯一的弱解。

2 最优解的存在性

定理1 问题(1)至少有一个最优控制。

证明 定义

$$\Psi(u)=\int_0^T\int_0^{a_+}u(a)p^u(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,$$

再令 $d=\sup\limits_{u\in U}\Psi(u)$。由系统(2)的解的一些比较结论[4]可得

$$0\leqslant\Psi(u)\leqslant L\int_0^T\int_0^{a_+}p^0(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t<+\infty,$$

其中，p^0 是系统(2)对应于 u 取0时的特殊解。

根据上确界定义，可以找到一组序列$\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ 使得

$$d-\frac{1}{n}<\Psi(u_n)\leqslant d \tag{4}$$

成立。再利用相同的比较结果，可得 $0\leqslant p^{u_n}(a,t)\leqslant p^0(a,t)$，该式在 Q 上几乎处处成立。

仍用 p^{u_n} 表示 p^{u_n} 的子序列，可有 $p^{u_n}\xrightarrow{w}p^*$ 在 $L^2(Q)$ 上成立。

使用 Mazur 定理得到一个序列 $\{\widetilde{p_n}\}$ 能满足等式

$$\widetilde{p_n}=\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i},\lambda_i^n\geqslant 0,\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n=1,k_n\geqslant n+1,$$

并且

$$\widetilde{p_n}\to p^* \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 上成立。} \tag{5}$$

控制 $\widetilde{u_n}$ 的定义为

$$\widetilde{u_n}(a)=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)u_i(a)}{\sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)}, & \sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)\neq 0,\\ 0, & \sum\limits_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n p^{u_i}(a,t)=0。\end{cases}$$

上述的这些 $\widetilde{u_n}$ 不仅满足 $\widetilde{u_n}\in U$，而且有 $\widetilde{p_n}(a,t)=p^{\widetilde{u_n}}(a,t)$ 在 Q 上几乎处处成立。

可以采用一个子序列（也用 $\{u_n\}$ 表示），使得

$$\widetilde{u_n}\xrightarrow{w}u^* \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 成立，} \Psi(\widetilde{u_n})=\sum_{i=n+1}^{k_n}\lambda_i^n\Psi(u_i)\to d,n\to\infty, \tag{6}$$

这里已经用了式(4)。因此由式(5)(6)可得

$$d=\lim_{n\to+\infty}\Psi(\widetilde{u_n})=\int_0^T\int_0^{a_+}u^*(a)p^*(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t。 \tag{7}$$

接下来就只需要证明等式

$$p^*(a,t)=p^{u^*}(a,t) \tag{8}$$

在 Q 上几乎处处成立。

由结论 2 可知，$p^{\widetilde{u_n}}$ 是系统(2)对应于 $u=\widetilde{u_n}$ 的弱解，即有

$$\int_0^T\int_0^{a_+}[-D\varphi(a,t)+(\mu(a,t)+\widetilde{u_n}(a))\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)]p^{\widetilde{u_n}}\mathrm{d}a\mathrm{d}t。=\int_0^T\int_0^{a_+}f(a,t)\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t, \tag{9}$$

其中 φ 满足弱解的条件。对式(9)两边同时取极限，得到

$$\int_0^T\int_0^{a_+}[-D\varphi(a,t)+(\mu(a,t)+u^*(a))\varphi(a,t)-\beta(a,t)\varphi(0,t)]p^*(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^{a_+}f(a,t)\varphi(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

由结论 3 和式(8)可知，定理 1 的结论成立。

3　极大值原理

定理 2　如果 (u^*,p^*) 是问题(1)的最优对，则有

$$u^*=\begin{cases}0,1+q<0,\\ L,1+q>0,\end{cases} \tag{10}$$

其中 q 为

$$\begin{cases}Dq(a,t)-\mu(a,t)q(a,t)=u^*(1+q)-\beta(a,t)q(0,t),(a,t)\in Q,\\ q(a_+,t)=0,t\in\mathbf{R},\\ q(a,t)=q(a,t+T),(a,t)\in Q\end{cases} \tag{11}$$

的解。

证明 系统(11)解的存在性和唯一性由文献[4]定理2.4.6可得。并且用 $N_u(u^*)$ 表示 $L^\infty(0,a_+)$ 中 U 在 u^* 处的法锥。

对于任何 $\nu\in L^\infty(0,a_+)$,都有任意足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $u^*+\varepsilon\nu\in U$,故

$$\int_0^T\int_0^{a_+}u^*p^{u^*}\mathrm{d}a\mathrm{d}t\geqslant\int_0^T\int_0^{a_+}(u^*+\varepsilon\nu)p^{u^*+\varepsilon\nu}\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

因为 u^* 是问题(1)的最优控制,并且有

$$\int_0^T\int_0^{a_+}u^*\frac{p^{u^*+\varepsilon\nu}-p^{u^*}}{\varepsilon}\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^{a_+}\nu p^{u^*+\varepsilon\nu}\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0。\tag{12}$$

故当 $\varepsilon\to0^+$ 时 $p^{u^*+\varepsilon\nu}\to p^{u^*}$ 在 $L_T^\infty(Q)$ 中成立,并且有 $\varepsilon\to0^+$ 时 $\dfrac{p^{u^*+\varepsilon\nu}-p^{u^*}}{\varepsilon}\to z$ 在 $L_T^\infty(Q)$ 成立,其中 z 为系统

$$\begin{cases}Dz(a,t)+\mu(a,t)z(a,t)=-\nu p^{u^*}-u^*z,(a,t)\in Q,\\ z(0,t)=\displaystyle\int_0^{a_+}\beta(a,t)z(a,t)\mathrm{d}a,t\in\mathbf{R},\\ z(a,t)=z(a,t+T),(a,t)\in Q\end{cases}\tag{13}$$

的解。

通过对式(12)两边取极限,得

$$\int_0^T\int_0^{a_+}(\nu p^{u^*}+u^*z)\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0。\tag{14}$$

在式(11)第1式两边同乘以 z 并在 $[0,T]\times[0,a_+]$ 上进行积分,得到

$$\int_0^T\int_0^{a_+}(Dq-\mu(a,t)q)z\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^{a_+}[u^*(1+q)z-\beta(a,t)q(0,t)z(a,t)]\mathrm{d}a\mathrm{d}t,$$

利用式(11)第2、3式和式(13)第2、3式计算得

$$-\int_0^T\int_0^{a_+}(Dz+\mu z)q\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^{a_+}u^*(1+q)z\mathrm{d}a\mathrm{d}t。\tag{15}$$

由式(13)第1式和式(15)可得

$$\int_0^T\int_0^{a_+}p^*\nu q\mathrm{d}a\mathrm{d}t=\int_0^T\int_0^{a_+}u^*z\mathrm{d}a\mathrm{d}t。\tag{16}$$

再利用式(14)(16)又有

$$\int_0^T\int_0^{a_+}\nu(1+q)p^*\mathrm{d}a\mathrm{d}t\leqslant 0\tag{17}$$

成立。考虑到 $N_u(u^*)$ 的结构可得 $(1+q)p^*\in N_u(u^*)$,定理2得证(又因为 f 的严格正性意味着 p^* 的严格正性,故式(17)在 Q 中几乎处处成立)。

4 结论

研究一类具年龄结构的周期种群系统的最优收获问题,并且是在通常模型的基础上,建立一个新模型,即在原有的系统上添加新的控制项,因此,不仅讨论了系统解的适定性,而且还证得了最优收获问题最优解的存在性和一阶最优条件。由于生物的多样性以及其所受到的各种影响,所建立的模型自然具备复杂性,如果全部考虑的话,系统既复杂又难解,因而应优先考虑影响种群的主要因素。

参考文献:

[1] BROKATE M. Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics [J]. Journal of mathematical biology,1985,23(1):75-101.

[2] 雒志学.一类具年龄结构的线性周期种群动力系统的最优控制[J].生物数学学报,2007,22(1):53-58.

[3] 毛瑾晖.一类具有时滞和尺度结构的捕食种群系统的最优收获[J].滨州学院学报,2021,37(6):37-44.

[4] ANITA S. Analysis and control of age-dependent population dynamics[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Pulishers,2000.

[5] BARBU V,IANNELLI M,MARTCHEVA M. On the controllability of the Lotka-McKendrick model of population dynamics[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2001,253(1):142-165.

[6] 卜红彧.基于尺度结构的两种群竞争系统的最优边界控制[J].东北师大学报(自然科学版),2020,52(3):84-88.

[7] ANITA S,IANNELLI M,KIM M Y,et al. Optimal harvesting for periodic age-dependent population dynamics[J]. SIAM journal on applied mathematics,1998,58(5):1648-1666.

[8] ANITA S. Optimal harvesting for a nonlinear age-dependent population dynamics[J]. Journal of mathematical analysis and applications,1998,226(1):6-22.

[9] CRESPO L G,SUN J Q. Optimal control of populations of competing species[J]. Nonlinear dynamics,2002,27(2):197-210.

[10] IANNELLI M. Mathematical theory of age-structured population dynamics[M]. Pisa:Giardini Editori E Stampatori,1995.

[11] 冯倩,张睿,李沛娟.具有非线性收获率的捕食系统的稳定性及最优收获策略[J].滨州学院学报,2021,37(6):45-50.

[12] 胡永亮,雒志学,梁丽宇,等.一类污染环境下具有扩散和年龄结构的随机单种群系统分析[J].山东大学学报(理学版),2019,54(9):62-68.

Optimal Harvesting of a Class of Periodic Population Systems with Age Structure

HE Yaquan

(*School of Mathematics and Physics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou* 730070,*China*)

Abstract:Considering the optimal harvest problem of a class of periodic population systems with age structure,the existence uniqueness of the system solution is studied by the principle of compression mapping. And then the extremization sequence is constructed,and some comparative conclusions of the solutions and Mazur theorem are used to verify the existence of the optimal solution of the optimal harvest control problem. And finally,the appropriate conjugated equation is constructed,and the first-order necessary conditions for the optimal solution of the optimal harvest control problem is derived by using the characterization of the conic concept.

Keywords:period;optimal harvesting;age structure;the cone

(责任编辑:贾晶晶)