【微分方程与动力系统研究】

一类具多比例时滞脉冲 BAM 神经网络的稳定性

赵莉莉

（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘　要：通过构造合适的 Lyapunov 函数，讨论了一类具多比例时滞的脉冲 BAM 神经网络的稳定性，得到了神经网络全局渐近稳定和全局多项式稳定的充分条件。最后，通过数值模拟实例验证了所得结论的有效性和正确性。

关键词：BAM 神经网络；比例时滞；脉冲；多项式稳定性；Lyapunov 函数

中图分类号：O 175.13　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.006

1　模型描述

自 Kosko 首次提出 BAM 神经网络[1]并给出它的推广模型[2-4]之后，BAM 神经网络被广泛应用于多个领域，如模式识别、联想记忆、复杂优化问题等，而在大部分应用中都会涉及多比例时滞。目前，对具比例时滞神经网络的动力学行为的研究，已取得丰富的研究成果[5-10]。文献[5-6]主要研究神经网络的同步问题，文献[7-10]主要研究稳定性问题。然而，很少有文献探讨具多比例时滞的 BAM 神经网络稳定性。文献[11]研究了一类具多比例时滞 BAM 神经网络的全局指数稳定性，但是该文献并没有考虑脉冲对 BAM 神经网络的稳定性所产生的影响，而且其模型中的多比例时滞是所有神经元共用的，多比例时滞对神经网络的动力学行为所产生的影响并不明显。在人工神经网络领域，脉冲现象也是会造成神经网络的动力学行为更加复杂的因素，所以，研究具时滞的脉冲神经网络的动力学行为是有意义的[12-15]。基于以上原因，本文使用 Lyapunov 函数法，探讨具多比例时滞的脉冲 BAM 神经网络

$$\begin{cases} x_i'(t)=-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}g_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^{m}c_{ji}g_j(y_j(q_j^{(1)}t))+\sum_{j=1}^{m}d_{ji}g_j(y_j(q_j^{(2)}t)),t\neq t_k,t\geqslant t_0,\\ y_j'(t)=-p_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{n}r_{ij}f_i(x_i(t))+\sum_{i=1}^{n}s_{ij}f_i(x_i(p_i^{(1)}t))+\sum_{i=1}^{n}z_{ij}f_i(x_i(p_i^{(2)}t)),t\neq t_k,t\geqslant t_0,\\ \Delta x_i(t_k)=E_{ik}(x_i(t_k^-)),\Delta y_j(t_k)=F_{jk}(y_j(t_k^-)),k\in\mathbf{Z}^+,\\ x_i(s)=\varphi_i(s),s\in[\bar{p}t_0,t_0],\\ y_j(s)=\Psi_j(s),s\in[\bar{q}t_0,t_0] \end{cases} \tag{1}$$

的全局渐近稳定性与全局多项式稳定性，并且通过构造合适的变量代换，探讨该 BAM 神经网络的全局指数稳定性，以及全局指数稳定性与全局多项式稳定性之间的关系，详细阐述多比例时滞与脉冲对 BAM 神经网络的稳定性所产生的影响。其中：$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$；$x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别表示第 I 层第 i 个

收稿日期：2023-01-13

基金项目：国家自然科学基金地区科学基金项目(11861072)；云南省教育厅自然科学基金项目(2020J0020)

作者简介：赵莉莉(1979—)，女，白族，云南大理人，讲师，博士，主要从事非线性微分方程与动力系统研究。
E-mail：llzhao@ynu.edu.cn

和第 J 层第 j 个神经元在 t 时刻的状态；$b_{ji}, c_{ji}, d_{ji}, r_{ij}, s_{ij}, z_{ij}$ 表示系统的连接权重；$f_i(\cdot), g_j(\cdot)$ 为激活函数；比例时滞因子 $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, q_j^{(1)}, q_j^{(2)}$ 满足

$$0 < p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, q_j^{(1)} q_j^{(2)} \leqslant 1, p_i^{(1)} t = t - (1 - p_i^{(1)}) t,$$

$$p_i^{(2)} t = t - (1 - p_i^{(2)}) t, q_j^{(1)} t = t - (1 - q_j^{(1)}) t, q_j^{(2)} t = t - (1 - q_j^{(2)}) t,$$

这里 $(1 - p_i^{(1)}) t, (1 - p_i^{(2)}) t, (1 - q_j^{(1)}) t, (1 - q_j^{(2)}) t$ 为时滞函数，且当 $t \to +\infty$ 时，有

$$(1 - p_i^{(1)}) t, (1 - p_i^{(2)}) t, (1 - q_j^{(1)}) t, (1 - q_j^{(2)}) t \to +\infty (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, q_j^{(1)}, q_j^{(2)} \neq 1),$$

即时滞函数均为无界函数；初值函数

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \in C([\bar{p} t_0, t_0], \mathbf{R}), y_j(s) = \Psi_j(s) \in C([\bar{q} t_0, t_0], \mathbf{R}),$$

$$\bar{p} = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{p_i^{(1)}, p_i^{(2)}\}, \bar{q} = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\};$$

$\{t_k\}$ 满足 $1 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$，且 $\lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty$；$E_{ik}(\cdot), F_{jk}(\cdot)$ 表示在脉冲点的状态变量的递增量。

本文对等式(1) 中的激活函数做如下假设。

假设 1　激活函数 $f_i(\cdot), g_j(\cdot)$ 满足

$$| f_i(s) - f_i(t) | \leqslant N_i | s - t |, f_i(0) = 0; | g_j(s) - g_j(t) | \leqslant M_j | s - t |, | g_j(0) | = 0。$$

其中：$s, t \in \mathbf{R}; i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m$。

为了将等式(1) 中的多比例时滞化为离散时滞，做 $X_i(t) = x_i(\mathrm{e}^t), Y_j(t) = y_j(\mathrm{e}^t)$ 变量替换，则等式(1) 等价变换为模型

$$\begin{cases} X_i'(t) = \mathrm{e}^t [- a_i X_i(t) + \sum_{j=1}^{m} b_{ji} g_j(Y_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} c_{ji} g_j(Y_j(t - \tau_j)) + \\ \quad \sum_{j=1}^{m} d_{ji} g_j(Y_j(t - \xi_j))], t \neq t_k, t \geqslant \ln t_0, \\ Y_j'(t) = \mathrm{e}^t [- p_j Y_j(t) + \sum_{i=1}^{n} r_{ij} f_i(X_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} s_{ij} f_i(X_i(t - \gamma_i)) + \\ \quad \sum_{i=1}^{n} z_{ij} f_i(X_i(t - \zeta_i))], t \neq t_k, t \geqslant \ln t_0, \\ \Delta X_i(t_k) = E_{ik}(X_i(t_k^-)), \Delta Y_j(t_k) = F_{jk}(Y_j(t_k^-)), k \in \mathbf{Z}^+, \\ X_i(s) = \Phi_i(s), s \in [- \omega + \ln t_0, \ln t_0], \\ Y_j(s) = \Psi_j(s), s \in [- \upsilon + \ln t_0, \ln t_0]。 \end{cases} \tag{2}$$

其中：

$$\Phi_i(s) = \varphi_i(\mathrm{e}^s) \in C([- \omega + \ln t_0, \ln t_0], \mathbf{R}), \Psi_j(s) = \psi_j(\mathrm{e}^s) \in C([- \upsilon + \ln t_0, \ln t_0], \mathbf{R}),$$

$$\tau_j = - \ln q_j^{(1)} \geqslant 0, \xi_j = - \ln q_j^{(2)} \geqslant 0, \gamma_i = - \ln p_i^{(1)} \geqslant 0, \zeta_i = - \ln p_i^{(2)} \geqslant 0, \tau = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \{\tau_j\},$$

$$\xi = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \{\xi_j\}, \gamma = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\gamma_j\}, \zeta = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\zeta_i\}, \omega = \max\{\gamma, \zeta\}, \upsilon = \max\{\tau, \xi\},$$

$$E_{ik}(X_i(t_k^-)) = E_{ik}(x_i(\mathrm{e}^{t_k^-})), F_{jk}(Y_j(t_k^-)) = F_{jk}(y_j(\mathrm{e}^{t_k^-}))。$$

因为，等式(1) 和(2) 的平衡点 $\boldsymbol{z}^*$ 与 $\boldsymbol{Z}^*$ 均存在，且 $\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{Z}^* = 0$，所以，研究等式(1) 的平凡解 $\boldsymbol{z}^* = 0$ 的稳定性等价于研究等式(2) 的平凡解 $\boldsymbol{Z}^* = 0$ 的稳定性。

设 $\boldsymbol{z} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}$ 的范数定义为 $\| \boldsymbol{z} \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i | + \sum_{j=1}^{n} | y_j |$。

为了方便讨论等式(1) 与(2) 的平凡解的稳定性，给出各类稳定性的定义。

定义 1　称等式(1) 的平凡解 $\boldsymbol{z}^* = 0$ 是全局渐近稳定的，是指等式(1) 的任意解

$$\boldsymbol{z}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t))^{\mathrm{T}},$$

满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{z}(t)\|=0$。

定义 2 称等式(1)的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局多项式稳定的，是指存在常数 $\alpha>0$ 和 $\beta\geqslant 1$ 使得等式(1)的任意解 $\boldsymbol{z}(t)$ 满足 $\|\boldsymbol{z}(t)\|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\bar{p}}+\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\bar{q}})(\frac{t}{t_0})^{-\alpha},t\geqslant t_0$ 其中

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\bar{p}}=\sup_{\bar{p}t_0\leqslant u\leqslant t_0}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(u)|,\|\boldsymbol{\psi}\|_{\bar{q}}=\sup_{\bar{q}t_0\leqslant u\leqslant t_0}\sum_{j=1}^{m}|\psi_j(u)|。$$

定义 3 称等式(2)的平凡解 $\boldsymbol{Z}^*=0$ 是全局指数稳定的，是指存在常数 $\alpha>0$ 和 $\beta\geqslant 1$ 使得等式(2)的任意解 $\boldsymbol{Z}(t)$ 满足 $\|\boldsymbol{Z}(t)\|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\omega}+\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\nu})\mathrm{e}^{-\alpha(t-\ln t_0)},t\geqslant\ln t_0$，其中

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\omega}=\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant\nu\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^{n}|\Phi_i(\nu)|,\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\nu}=\sup_{-\nu+\ln t_0\leqslant\nu\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^{m}|\Psi_j(\nu)|。$$

定义 4[16] 设 $f(x)$ 为连续函数，$f(x)$ 的右上 Dini 导数为 $D^+f(x)\overline{\lim\limits_{h\to0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

2 全局渐近稳定性

定理 1 设 $x_i(t_k)=\lambda_{ik}x_i(t_k^-),y_j(t_k)=\eta_{jk}y_j(t_k^-),|\lambda_{ik}|\leqslant 1,|\eta_{jk}|\leqslant 1$。若假设 1 成立，且

$$\Gamma=\max\{-a^m+N^M(r^M+\frac{s^M+z^M}{\bar{p}}),-p^m+M^M(b^M+\frac{c^M+d^M}{\bar{q}})\}<0,\tag{3}$$

其中，

$$a^m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},p^m=\min\{p_1,p_2,\cdots,p_m\},N^M=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\},$$

$$M^M=\max(M_1,M_2,\cdots,M_m),r^M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}|\},s^M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sum_{j=1}^{m}|s_{ij}|\},z^M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\sum_{j=1}^{m}|z_{ij}|\},$$

$$b^M=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\sum_{i=1}^{n}|b_{ji}|\},c^M=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\sum_{i=1}^{n}|c_{ji}|\},d^M=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{\sum_{i=1}^{n}|d_{ji}|\},$$

则等式(1)的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局渐近稳定的。

证明 考虑 Lyapunov 函数

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}\int_{q_j^{(1)}t}^{t}|y_j(s)|\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}\int_{q_j^{(2)}t}^{t}|y_j(s)|\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}\int_{p_i^{(1)}t}^{t}|x_i(s)|\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}\int_{p_i^{(2)}t}^{t}|x_i(s)|\mathrm{d}s。\tag{4}$$

当 $t\neq t_k$ 时，对函数 $V(t)$ 沿方程(4)求导，得

$$V'(t)|=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_i(t))x_i'(t)+\sum_{j=1}^{m}\mathrm{sgn}(y_j(t))y_j'(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}(|y_j(t)|-q_j^{(1)}|y_j(q_j^{(1)}t)|)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}(|y_j(t)|-q_j^{(2)}|y_j(q_j^{(2)}t)|)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}(|x_i(t)|-p_i^{(1)}|x_i(p_i^{(1)}t)|)+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}(|x_i(t)|-p_i^{(2)}|x_i(p_i^{(2)}t)|)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}[-a_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}g_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^{m}c_{ji}g_j(y_j(q_j^{(1)}t))+\sum_{j=1}^{m}d_{ji}g_j(y_j(q_j^{(2)}t))]\mathrm{sgn}(x_i(t))+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-p_jy_j(t)+\sum_{i=1}^{n}r_{ij}f_i(x_i(t))+\sum_{i=1}^{n}s_{ij}f_i(x_i(p_i^{(1)}t))+\sum_{i=1}^{n}z_{ij}f_i(x_i(p_i^{(2)}t))]\mathrm{sgn}(y_j(t))+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}(|y_j(t)|-q_j^{(1)}|y_j(q_j^{(1)}t)|)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}(|y_j(t)|-q_j^{(2)}|y_j(q_j^{(2)}t)|)+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}(|x_i(t)|-p_i^{(1)}|x_i(p_i^{(1)}t)|)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}(|x_i(t)|-p_i^{(2)}|x_i(p_i^{(2)}t)|)\leqslant$$

$$-\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i(t)|-\sum_{j=1}^{m}p_j|y_j(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|b_{ji}|M_j|y_j(t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|r_{ij}|N_i|x_i(t)|+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_j|y_j(q_j^{(1)}t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|s_{ij}|N_i|(p_i^{(1)}t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|d_{ji}|M_j|y_j(q_j^{(2)}t)|+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|z_{ij}|N_i|x_i(p_i^{(2)}t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}|y_j(t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}|x_i(t)|+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}|y_j(t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}|x_i(t)|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\|c_{ji}\|y_j(q_j^{(1)}t)|-$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|s_{ij}\|x_i(p_i^{(1)}t)|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\|d_{ji}\|y_j(q_j^{(2)}t)|-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|z_{ij}\|x_i(p_i^{(2)}t)|=$$
$$-\sum_{i=1}^{n}a_i|x_i(t)|-\sum_{j=1}^{m}p_j|y_j(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|b_{ji}|M_j|y_j(t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|r_{ij}|N_i|x_i(t)|+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}|y_j(t)|+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}|x_i(t)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}|y_j(t)|+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}|x_i(t)|=$$
$$\sum_{i=1}^{n}[-a_i+\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}|N_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}N_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}N_i]|x_i(t)|+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-p_j+\sum_{i=1}^{n}|b_{ji}|M_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}M_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}M_j]|y_j(t)|=$$
$$[-a^m+N^M(r^M+\frac{s^M+z^M}{\bar{p}})]\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+[-p^m+M^M(b^M+\frac{c^M+d^M}{\bar{q}})]\sum_{j=1}^{m}|y_j(t)|\leqslant$$
$$\Gamma(\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t)|)。\tag{5}$$

当 $\boldsymbol{z}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),\cdots,y_m(t))^{\mathrm{T}}\neq 0$ 时，至少存在某个 $x_i(t)\neq 0$ 或某 $y_j(t)\neq 0$，由式(3) 与式(5) 可得 $V'(t)<0$。

当 $\boldsymbol{z}(t)=0,\boldsymbol{z}^{(1)}(t)=(x_1(p_1^{(1)}t),\cdots,x_n(p_n^{(1)}t),y_1(q_1^{(1)}t),\cdots,y_m(q_m^{(1)}t))^{\mathrm{T}}\neq 0$ 且

$$\boldsymbol{z}^{(2)}(t)=(x_1(p_1^{(2)}t),\cdots,x_n(p_n^{(2)}t),y_1(q_1^{(2)}t),\cdots,y_m(q_m^{(2)}t))^{\mathrm{T}}\neq 0$$

时，可得

$$V'(t)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j|c_{ji}\|y_j(q_j^{(1)}t)|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j|d_{ji}\|y_j(q_j^{(2)}t)|-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|s_{ij}\|x_i(p_i^{(1)}t)|-$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|z_{ij}\|x_i(p_i^{(2)}t)|<0。$$

当 $\boldsymbol{z}(t)=0,\boldsymbol{z}^{(1)}(t)\neq 0$ 且 $\boldsymbol{z}^{(2)}(t)=0$，或 $\boldsymbol{z}(t)=0,\boldsymbol{z}^{(2)}(t)\neq 0$，且 $\boldsymbol{z}^{(1)}(t)=0$ 时，

$$V'(t)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j|c_{ji}\|y_j(q_j^{(1)}t)|-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|s_{ij}\|x_i(p_i^{(1)}t)|<0,$$

或者

$$V'(t)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j|d_{ji}\|y_j(q_j^{(2)}t)|-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i|z_{ij}\|x_i(p_i^{(2)}t)|<0。$$

当 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{z}^{(1)}(t)=\boldsymbol{z}^{(2)}(t)=0$ 时，由式(3) 可得，$V'(t)=0$。

因此，当 $t\neq t_k$ 时，当且仅当 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{z}^{(1)}(t)=\boldsymbol{z}^{(2)}(t)=0$ 时，有 $V'(t)=0$ 其他情况下 $V'(t)<0$。

当 $t=t_k$ 时，由 $|\lambda_{ik}|\leqslant 1$，$|\eta_{jk}|\leqslant 1$ 以及式(5) 可得

$$V(t_k)=\sum_{i=1}^{n}|x_i(t_k)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t_k)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}\int_{q_j^{(1)}t_k}^{t_k}|y_j(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}\int_{q_j^{(2)}t_k}^{t_k}|y_j(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}\int_{p_i^{(1)}t_k}^{t_k}|x_i(s)|\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}\int_{p_i^{(2)}t_k}^{t_k}|x_i(s)|\mathrm{d}s=$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_{ik}x_i(t_k^-)|+\sum_{j=1}^{m}|\eta_{jk}y_j(t_k^-)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}\int_{q_j^{(1)}t_k^-}^{t_k^-}|y_j(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}\int_{q_j^{(2)}t_k}^{t_k^-}|y_j(s)|\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}\int_{p_i^{(1)}t_k^-}^{t_k^-}|x_i(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}\int_{p_i^{(2)}t_k^-}^{t_k^-}|x_i(s)|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t_k^-)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t_k^-)|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}\int_{q_j^{(1)}t_k^-}^{t_k^-}|y_j(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_j\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}\int_{q_j^{(2)}t_k^-}^{t_k^-}|y_j(s)|\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}\int_{p_i^{(1)}t_k^-}^{t_k^-}|x_i(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}N_i\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}\int_{p_i^{(2)}t_k^-}^{t_k^-}|x_i(s)|\mathrm{d}s=V(t_k^-)。$$

综上所述，当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时有 $V'(t)\leqslant 0$，所以等式(1) 的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局渐近稳定的，证毕。

从定理 1 的证明过程中，还可以得到如下推论。

推论 1 设 $x_i(t_k)=\lambda_{ik}x_i(t_k^-)$，$y_j(t_k)=\eta_{jk}y_j(t_k^-)$，$|\lambda_{ik}|\leqslant 1$，$|\eta_{jk}|\leqslant 1$。若假设 1 成立，且

$$-a_i+\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}|N_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{|s_{ij}|}{p_i^{(1)}}N_i+\sum_{j=1}^{m}\frac{|z_{ij}|}{p_i^{(2)}}N_i<0,i=1,2,\cdots,n,$$

$$-p_j+\sum_{i=1}^{n}|b_{ji}|M_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{|c_{ji}|}{q_j^{(1)}}M_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{|d_{ji}|}{q_j^{(2)}}M_j<0,j=1,2,\cdots,m,$$

则等式(1) 的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局渐近稳定的。

3 全局多项式稳定性

定理 2 设 $x_i(t_k)=\lambda_{ik}x_i(t_k^-)$，$y_j(t_k)=\eta_{jk}y_j(t_k^-)$，$|\lambda_{ik}|\leqslant 1$，$|\eta_{jk}|\leqslant 1$，若假设 1 成立，且存在常数 $\mu>1$，使得

$$\max\{\mu-1-a^m+N^M(r^M+s^M+z^M),\mu-1-p^m+M^M(b^M+c^M+d^M)\}<0,\qquad(6)$$

则等式(1) 的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局多项式稳定的。

证明 令 $W_i(t)=\mathrm{e}^{\mu t}|X_i(t)|$，$V_j(t)=\mathrm{e}^{\mu t}|Y_j(t)|$，其中 $\mu>1$，于是

$$W_i(t-\gamma_i)=\mathrm{e}^{\mu(t-\gamma_i)}|X_i(t-\gamma_i)|,W_i(t-\zeta_i)=\mathrm{e}^{\mu(t-\zeta_i)}|X_i(t-\zeta_i)|,$$

$$V_j(t-\tau_j)=\mathrm{e}^{\mu(t-\tau_j)}|Y_j(t-\tau_j)|,V_j(t-\xi_j)=\mathrm{e}^{\mu(t-\xi_j)}|Y_j(t-\xi_j)|。$$

当 $t\neq t_k$ 时，对 $W_i(t)$ 求导，得

$$W_i'(t)=\mu\mathrm{e}^{\mu t}|X_i(t)|+\mathrm{e}^{\mu t}D^+X_i(t)\mathrm{sgn}(X_i(t))=$$

$$\mu W_i(t)+\mathrm{e}^{(\mu+1)t}\{-a_iX_i(t)+\sum_{j=1}^{m}b_{ji}g_j(Y_j(t))+\sum_{j=1}^{m}c_{ji}g_j(Y_j(t-\tau_j))+$$

$$\sum_{j=1}^{m}d_{ji}g_j(Y_j(t-\xi_j))\}\mathrm{sgn}(X_i(t))\leqslant\mu W_i(t)+\mathrm{e}^{(\mu+1)t}\{-a_iX_i(t)+\sum_{j=1}^{m}|b_{ji}|M_j|Y_j(t)|+$$

$$\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_j|Y_j(t-\tau_j)|+\sum_{j=1}^{m}|d_{ji}|M_j|Y_j(t-\xi_j)|\}=$$

$$\mu W_i(t)+\mathrm{e}^t\{-a_iW_i(t)+\sum_{j=1}^{m}|b_{ji}|M_jV_j(t)+\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_jV_j(t-\tau_j)\mathrm{e}^{\mu\tau_j}+\sum_{j=1}^{m}|d_{ji}|M_jV_j(t-\xi_j)\mathrm{e}^{\mu\xi_j}\}。$$

当 $t \neq t_k$ 时，对 $V_j(t)$ 求导，有

$$V_j'(t) = \mu e^{\mu t} \mid Y_j(t) \mid + e^{\mu t} D^+ Y_j(t)\operatorname{sgn}(Y_j(t)) =$$

$$\mu V_j(t) + e^{(\mu+1)t}\{-p_j Y_j(t) + \sum_{i=1}^{n} r_{ij} f_i(X_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} s_{ij} f_i(X_i(t-\gamma_i)) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} f_i(X_i(t-\zeta_i))\}\operatorname{sgn}(Y_j(t)) \leqslant \mu V_j(t) + e^{(\mu+1)t}\{-p_j Y_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \mid r_{ij} \mid N_i \mid X_i(t) \mid +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mid s_{ij} \mid N_i \mid X_i(t-\gamma_i) \mid + \sum_{i=1}^{n} \mid z_{ij} \mid N_i \mid X_i(t-\zeta_i) \mid\} =$$

$$\mu V_j(t) + e^t\{-p_j V_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \mid r_{ij} \mid N_i W_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \mid s_{ij} \mid N_i W_i(t-\gamma_i) e^{\mu\gamma_i} + \sum_{i=1}^{n} \mid z_{ij} \mid N_i W_i(t-\zeta_i) e^{\mu\xi_i}\}。$$

定义 Lyapunov 函数

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{-t} W_i(t) + \sum_{j=1}^{m} e^{-t} V_j(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\tau_i} \mid c_{ji} \mid M_j \int_{t-\tau_j}^{t} V_j(s)ds +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\xi_j} \mid d_{ji} \mid M_j \int_{t-\xi_j}^{t} V_j(s)ds + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\gamma_i} \mid s_{ij} \mid N_i \int_{t-\gamma_i}^{t} W_i(s)ds +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\zeta_i} \mid z_{ij} \mid N_i \int_{t-\zeta_i}^{t} W_i(s)ds。\tag{7}$$

当 $t \neq t_k$ 时，对式(7)求导得

$$L'(t) = -e^{-t}\sum_{i=1}^{n} W_i(t) + e^{-t}\sum_{i=1}^{n} W_i'(t) - e^{-t}\sum_{j=1}^{m} V_j(t) + e^{-t}\sum_{j=1}^{m} V_j'(t) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\tau_j} \mid c_{ji} \mid M_j(V_j(t) - V_j(t-\tau_j)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\xi_j} \mid d_{ji} \mid M_j(V_j(t) - V_j(t-\xi_j)) +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\gamma_i} \mid s_{ij} \mid N_i(W_i(t) - W_i(t-\gamma_i)) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\zeta_i} \mid z_{ji} \mid N_i(W_i(t) - W_i(t-\zeta_i)) \leqslant$$

$$-e^{-t}\sum_{i=1}^{n} W_i(t) - e^{-t}\sum_{j=1}^{m} V_j(t) + \sum_{i=1}^{n} e^{-t}\{\mu W_i(t) + e^t[-a_i W_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \mid b_{ji} \mid M_j V_j(t) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mid c_{ji} \mid M_j V_j(t-\tau_j) e^{\mu\tau_j} + \sum_{j=1}^{m} \mid d_{ji} \mid M_j V_j(t-\xi_j) e^{\mu\xi_j}]\} + \sum_{j=1}^{m} e^{-t}\{\mu V_j(t) +$$

$$e^t[-p_j V_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \mid r_{ij} \mid N_i W_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \mid s_{ij} \mid N_i W_i(t-\gamma_i) e^{\mu\gamma_i} + \sum_{i=1}^{n} \mid z_{ij} \mid N_i W_i(t-\zeta_i) e^{\mu\zeta_i}]\} +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\tau_j} \mid c_{ji} \mid M_j(V_j(t) - V_j(t-\tau_j)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} e^{\mu\xi_j} \mid d_{ji} \mid M_j(V_j(t) - V_j(t-\xi_j)) +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\gamma_i} \mid s_{ji} \mid N_i(W_i(t) - W_i(t-\gamma_i)) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} e^{\mu\zeta_i} \mid z_{ij} \mid N_i(W_i(t) - W_i(t-\zeta_i)) =$$

$$-e^{-t}\sum_{i=1}^{n} W_i(t) + \mu e^{-t}\sum_{i=1}^{n} W_i(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i W_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mid b_{ji} \mid M_j V_j(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mid c_{ji} \mid M_j V_j(t) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mid d_{ji} \mid M_j V_j(t) - e^{-t}\sum_{j=1}^{m} V_j(t) + \mu e^{-t}\sum_{j=1}^{m} V_j(t) - \sum_{j=1}^{m} p_j V_j(t) +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mid r_{ji} \mid N_i W_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mid s_{ij} \mid N_i W_i(t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mid z_{ij} \mid N_i W_i(t) \leqslant$$

$$[(\mu-1) - a^m + N^M(r^M + s^M + z^M)]\sum_{i=1}^{n} W_i(t) + [(\mu-1) - p^m + M^M(b^M + c^M + d^M)]\sum_{j=1}^{m} V_j(t)。\tag{8}$$

当 $t \neq t_k$ 时，由式(6)和(8)可知，当且仅当 $\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{Z}^1(t) = \boldsymbol{Z}^2(t) = 0$ 时，有 $L'(t) = 0$。其他情况下，$L'(t) < 0$，其中

$$\boldsymbol{Z}(t) = (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t), Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_m(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Z}^1(t)=(X_1(t-\gamma_1),X_2(t-\gamma_2),\cdots,X_n(t-\gamma_n),Y_1(t-\tau_1),Y_2(t-\tau_2),\cdots,Y_m(t-\tau_m))^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{Z}^2(t)=(X_1(t-\zeta_1),X_2(t-\zeta_2),\cdots,X_n(t-\zeta_n),Y_1(t-\xi_1),Y_2(t-\xi_2),\cdots,Y_m(t-\xi_m))^{\mathrm{T}}。$$

当 $t=t_k$ 时，有 $|\lambda_{ik}|\leqslant 1$，$|\eta_{jk}|\leqslant 1$，有

$$W_i(t_k)=\mathrm{e}^{\mu t_k}|X_i(t_k)|=\mathrm{e}^{\mu t_k^-}|\lambda_{ik}X_i(t_k^-)|\leqslant \mathrm{e}^{\mu t_k^-}|X_i(t_k^-)|=W_i(t_k^-),$$
$$V_j(t_k)=\mathrm{e}^{\mu t_k}|Y_j(t_k)|=\mathrm{e}^{\mu t_k^-}|\eta_{jk}Y_j(t_k^-)|\leqslant \mathrm{e}^{\mu t_k^-}|Y_j(t_k^-)|=V_j(t_k^-)。$$

于是，由式(7)可得 $L(t_k)\leqslant L(t_k^-)$。综上所述，当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时，有 $L'(t)\leqslant 0$，故 $L(t)\leqslant L(\ln t_0)$。由式(7)可得

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{-t}W_i(t)+\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{-t}V_j(t)=\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{(\mu-1)t}|X_i(t)|+\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{(\mu-1)t}|Y_j(t)|\leqslant L(t)\leqslant L(\ln t_0)。\tag{9}$$

当 $t=\ln t_0$ 时，由式(7)可得

$$\begin{aligned}
L(\ln t_0)=&\mathrm{e}^{-\ln t_0}\sum_{i=1}^n W_i(\ln t_0)+\mathrm{e}^{-\ln t_0}\sum_{j=1}^m V_j(\ln t_0)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{\mu\tau_j}|c_{ji}|M_j\int_{\ln t_0-\tau_j}^{\ln t_0}V_j(s)\mathrm{d}s+\\
&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{\mu\xi_j}|d_{ji}|M_j\int_{\ln t_0-\xi_j}^{\ln t_0}V_j(s)\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mu\gamma_i}|s_{ij}|N_i\int_{\ln t_0-\gamma_i}^{\ln t_0}W_i(s)\mathrm{d}s+\\
&\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mu\zeta_i}|z_{ij}|N_i\int_{\ln t_0-\zeta_i}^{\ln t_0}W_i(s)\mathrm{d}s\leqslant\\
&\mathrm{e}^{-\ln t_0}\sum_{i=1}^n W_i(\ln t_0)+\mathrm{e}^{-\ln t_0}\sum_{j=1}^m V_j(\ln t_0)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{\mu\tau_j}|c_{ji}|M_j\tau_j\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}V_j(s)+\\
&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{\mu\xi_j}|d_{ji}|M_j\xi_j\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}V_j(s)+\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mu\gamma_i}|s_{ij}|N_i\gamma_i\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}W_i(s)+\\
&\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mu\zeta_i}|z_{ij}|N_i\zeta_i\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}W_i(s)\leqslant\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+s^MN^M\gamma\mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^MN^M\zeta\mathrm{e}^{\mu\zeta}\}\times(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n W_i(s))+\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+c^MM^M\tau\mathrm{e}^{\mu\tau}+d^MM^M\xi\mathrm{e}^{\mu\xi}\}\times(\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m V_j(s))=\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+s^MN^M\gamma\mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^MN^M\zeta\mathrm{e}^{\mu\zeta}\}\times(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mu s}|X_i(s)|)+\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+c^MM^M\tau\mathrm{e}^{\mu\tau}+d^MM^M\xi\mathrm{e}^{\mu\xi}\}\times(\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{\mu s}|Y_j(s)|)\leqslant\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+s^MN^M\gamma\mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^MN^M\zeta\mathrm{e}^{\mu\zeta}\}\times(\mathrm{e}^{\mu\ln t_0}\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n|X_i(s)|)+\\
&\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+c^MM^M\tau\mathrm{e}^{\mu\tau}+d^MM^M\xi\mathrm{e}^{\mu\xi}\}\times(\mathrm{e}^{\mu\ln t_0}\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m|Y_j(s)|)=\\
&\mathrm{e}^{\ln t_0}\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+s^MN^M\gamma\mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^MN^M\zeta\mathrm{e}^{\mu\zeta}\}\times(\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n|X_i(s)|)+\\
&\mathrm{e}^{\ln t_0}\{\mathrm{e}^{-\ln t_0}+c^MM^M\tau\mathrm{e}^{\mu\tau}+d^MM^M\xi\mathrm{e}^{\mu\xi}\}\times(\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m|Y_j(s)|)=\\
&\{1+\mathrm{e}^{\ln t_0}(s^MN^M\gamma\mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^MN^M\zeta\mathrm{e}^{\mu\zeta})\}\times(\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n|X_i(s)|)+\\
&\{1+\mathrm{e}^{\ln t_0}(c^MM^M\tau\mathrm{e}^{\mu\tau}+d^MM^M\xi\mathrm{e}^{\mu\xi})\}\times(\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m|Y_j(s)|)=\\
&\beta\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{i=1}^n|X_i(s)|+\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant\ln t_0}\sum_{j=1}^m|Y_j(s)|),
\end{aligned}\tag{10}$$

其中，

$$\beta=\max\{1+\mathrm{e}^{\ln t_0}(c^M M^M \tau \mathrm{e}^{\mu\tau}+d^M M^M \xi \mathrm{e}^{\mu\xi}),1+\mathrm{e}^{\ln t_0}(s^M N^M \gamma \mathrm{e}^{\mu\gamma}+z^M N^M \zeta \mathrm{e}^{\mu\zeta})\}\geqslant 1。$$

由(9)式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{(\mu-1)t}|X_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{(\mu-1)t}|Y_j(t)|\leqslant$$

$$\beta\mathrm{e}^{(\mu-1)\ln t_0}(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{i=1}^{n}|X_i(s)|+\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{j=1}^{n}|Y_j(s)|),$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}|X_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|Y_j(t)|\leqslant \beta\mathrm{e}^{-\alpha(t-\ln t_0)}(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{i=1}^{n}|X_i(s)|+\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{j=1}^{n}|Y_j(s)|),\tag{11}$$

其中 $\alpha=\mu-1>0$。在式(11)中，令 $X_i(t)=x_i(\mathrm{e}^t)$，$Y_j(t)=y_j(\mathrm{e}^t)$，得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(\mathrm{e}^t)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(\mathrm{e}^t)|\leqslant$$

$$\beta\mathrm{e}^{-\alpha(t-\ln t_0)}(\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i(\mathrm{e}^s)|+\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{j=1}^{n}|y_j(\mathrm{e}^s)|)。\tag{12}$$

令 $\theta=\mathrm{e}^t$，$t\geqslant \ln t_0$，则 $\theta\geqslant t_0$。令 $\mathrm{e}^s=\kappa$，当 $s\in[-\omega+\ln t_0,\ln t_0]$ 时 $\kappa\in[\bar{p}t_0,t_0]$；当 $s\in[-\upsilon+\ln t_0,\ln t_0]$ 时 $\kappa\in[\bar{q}t_0,t_0]$。由(12)式可得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(\theta)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(\theta)|\leqslant \beta(\frac{\theta}{t_0})^{-\alpha}(\sup_{\bar{p}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i(\kappa)|+\sup_{\bar{q}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{j=1}^{m}|y_j(\kappa)|)。\tag{13}$$

在(13)式中取 $\theta=t$，得

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|y_j(t)|\leqslant \beta(\frac{t}{t_0})^{-\alpha}(\sup_{\bar{p}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i(\kappa)|+\sup_{\bar{q}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{j=1}^{m}|y_j(\kappa)|)。\tag{14}$$

从而 $\|z(t)\|\leqslant\beta(\|\varphi\|_{\bar{p}}+\|\psi\|_{\bar{q}})(\frac{t}{t_0})^{-\alpha}$，其中，

$$\|\varphi\|_{\bar{p}}=\sup_{\bar{p}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{i=1}^{n}|x_i(\kappa)|,\|\psi\|_{\bar{q}}=\sup_{\bar{q}t_0\leqslant\kappa\leqslant t_0}\sum_{j=1}^{m}|y_j(\kappa)|。$$

因此，等式(1)的平凡解 $\boldsymbol{z}^*=0$ 是全局多项式稳定的。

定理 3　设 $x_i(t_k)=\lambda_{ik}x_i(t_k^-)$，$y_j(t_k)=\eta_{jk}y_j(t_k^-)$，$|\lambda_{ik}|\leqslant 1$，$|\eta_{jk}|\leqslant 1$，若假设 1 成立，且存在常数 $\mu>1$，使得

$$\max\{\mu-1-a^m+N^M(r^M+s^M+z^M),\mu-1-p^m+M^M(b^M+c^M+d^M)\}<0,$$

则等式(2)的平凡解 $\boldsymbol{Z}^*=0$ 是全局指数稳定的。

证明　由式(9)可得

$$\|\boldsymbol{Z}(t)\|=\sum_{i=1}^{n}|X_i(t)|+\sum_{j=1}^{m}|Y_j(t)|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\omega}+\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\upsilon})\mathrm{e}^{-\alpha(t-\ln t_0)},$$

其中

$$\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\omega}=\sup_{-\omega+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{i=1}^{n}|X_i(s)|,\|\boldsymbol{\Psi}\|_{\upsilon}=\sup_{-\upsilon+\ln t_0\leqslant s\leqslant \ln t_0}\sum_{j=1}^{n}|Y_j(s)|。$$

故，等式(2)的平凡解 $\boldsymbol{Z}^*=0$ 全局指数稳定。

4　数值模拟

在等式(1)中，取 $i,j=1,2$，$a_1=7$，$a_2=11$，$p_1=9$，$p_2=11$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}\\r_{21}&r_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}\\d_{21}&d_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}z_{11}&z_{12}\\z_{21}&z_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}。$$

直接计算,得

$$b^M=r^M=\frac{1}{2},c^M=d^M=s^M=z^M=1,a^m=7,p^m=9。$$

取

$$p_1^{(1)}=p_1^{(2)}=p_2^{(1)}=p_2^{(2)}=0.4,q_1^{(1)}=q_1^{(2)}=q_2^{(1)}=q_2^{(2)}=0.6,x_1(t_k)=-\frac{1}{3}x_1(t_k^-),$$

$$x_2(t_k)=\frac{3}{4}x_2(t_k^-),y_1(t_k)=\frac{1}{4}y_1(t_k^-),y_2(t_k)=\frac{2}{3}y_2(t_k^-),$$

取激活函数

$$f_i(x_i)=\frac{|x_i+1|-|x_i-1|}{2},g_j(y_j)=\tanh\ y_j,i,j=1,2,\mu=1.5,$$

则

$$N^M=M^M=1,\Gamma=\max\{-a^m+N^M(r^M+\frac{s^M+z^M}{\bar{p}}),-p^m+M^M(b^M+\frac{c^M+d^M}{\bar{q}})\}=-1<0,$$

$$\max\{\mu-1-a^m+N^M(r^M+s^M+z^M),\mu-1-p^m+M^M(b^M+c^M+d^M)\}=-3.5<0,$$

故由定理 2 可知,等式(1)的平凡解全局多项式稳定。

参考文献:

[1] KOSKO B. Bidirectional associative memories[J]. IEEE transactions on systems, man and cybernetics, 1988, 18(1): 49-60.

[2] KOSKO B. Unsupervised learning in noise[J]. IEEE transactions on neural networks, 1990, 1(1): 44-57.

[3] KOSKO B. Neural networks and fuzzy systems: a dynamical system approach to machine intelligence[J]. The knowledge engineering review, 1995, 10(2): 219-220.

[4] KOSKO B. Structural stability of unsupervised learning in feedback neural networks[J]. IEEE transactions on automatic control, 1991, 36(7): 785-790.

[5] 邢秀芝. 基于多比例时滞细胞神经网络的同步准则(英文)[J]. 周口师范学院学报, 2021, 38(2): 1-5.

[6] 邢琳, 周立群. 多比例时滞细胞神经网络的同步性[J]. 电子学报, 2020, 48(10): 1961-1968.

[7] 宋协慧, 周立群. 一类具多比例时滞脉冲递归神经网络的稳定性分析[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2020, 40(5): 1-8.

[8] 吴寒, 尹为华, 陈展衡. 多比例时滞 Hopfield 神经网络的全局渐近稳定性及仿真[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2020, 14(3): 10-15.

[9] 黄星寿, 罗日才, 王五生. 基于 Gronwall 积分不等式的比例时滞神经网络稳定性分析[J]. 数学物理学报, 2020, 40(3): 824-832.

[10] 苏丽娟, 周立群. 一类具比例时滞细胞神经网络反周期解的指数稳定性[J]. 工程数学学报, 2017, 34

(2):143-154.

[11] 翁良燕,周立群.多比例时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J].天津师范大学学报(自然科学版),2012,32(3):18-23.

[12] 席福宝,徐畅.带马氏切换的时滞脉冲神经网络稳定性分析[J].北京理工大学学报,2020,40(10):1133-1137.

[13] 郑成德,肖岩,贾贺贺.中立型 Markov 脉冲神经网络的随机稳定性[J].大连交通大学学报,2019,40(4):116-120.

[14] 王蔓,陈伯山.一类带时滞的脉冲神经网络的渐近稳定性[J].湖北师范学院学报,2016,36(1):78-82.

[15] 向泽英.具有离散和分布时滞的脉冲神经网络的全局指数稳定性[J].西南科技大学学报,2014,29(1):87-90.

[16] 周立群.具比例时滞递归神经网络的稳定性及其仿真与应用[M].北京:机械工业出版社,2019:15-18.

Stability Analysis of a Class of Impulsive BAM Neural Networks with Multi-proportional Delays

ZHAO Lili

(*School of Mathematics and Statistics*, *Yunnan University*, *Kunming* 650091, *China*)

Abstract: By constructing suitable Lyapunov functions, the stability of a class of impulsive BAM neural networks with multi-proportional delays is discussed, and the sufficient conditions for global asymptotic stability and global polynomial stability of the neural network are obtained. Finally, the validity and correctness of the obtained conclusions are verified by concrete examples.

Keywords: BAM neural networks; proportional delay; impulsive; polynomial stability; Lyapunov function

(责任编辑:贾晶晶)