

【工程与技术研究】

# 纵横弯曲杆件临界荷载的一种优化算法

尤 超<sup>1,2</sup>, 沈晨姝<sup>3</sup>, 梁冠军<sup>1</sup>, 余 龙<sup>1</sup>

(1. 滁州职业技术学院 建筑工程学院, 安徽 滁州 239000; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092;  
3. 中国能源建设集团安徽省电力设计院有限公司, 安徽 合肥 230009)

**摘 要:** 基于微分方程初值问题的求解原理, 采用临界荷载优化算法, 研究了纵横弯曲杆件在静力平衡状态下的内力计算, 并计算在不同荷载作用下纵横弯曲杆件变形和转角。将计算结果与有限元程序软件计算结果进行比较, 验证了本文优化算法的正确性和有效性。

**关键词:** 微分方程; 优化算法; 平衡状态; 荷载作用

**中图分类号:** O 342      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.012

## 0 引言

在土木建筑结构中, 把既受弯矩又受轴向力作用的结构构件称为压弯杆件, 例如屋架的上弦杆、刚架桥的支柱、桩柱式的桥墩、多层和高层建筑的框架柱等<sup>[1-3]</sup>。当杆件的抗弯刚度并不很大, 而弯曲发生变形时, 轴向力在弯曲变形上产生的附加弯矩不能忽略, 这就成为杆件的纵横弯曲问题<sup>[4-6]</sup>。在解决有轴力的纵横弯曲问题时, 国内外学者曾常采用能量法、有限元法、DQ 法 (Differential Quadrature) 等方法<sup>[7-10]</sup>, 以初始位置为研究对象, 用逐步递增载荷方式进行求解。本文在上述研究的基础上, 提出将压弯杆件变形后的终态平衡作为研究对象, 对纵横弯曲杆件进行静力计算分析, 确定了压弯杆件临界荷载计算的优化算法, 并应用有限元软件求其挠曲变形和转角<sup>[11-12]</sup>, 验证所提临界荷载优化算法的有效性, 从而为工程结构计算应用提供参考依据。

## 1 纵横弯曲杆件结构模型

### 1.1 受力前后的静力计算分析

纵横弯曲杆件受力前后的静力平衡状态如图 1 所示。杆件受到横向力  $P_1$  和轴向力  $P_2$  作用, 杆长  $L = a + b$ , 杆件抗拉或抗压刚度  $EA$ , 弹性弯曲刚度  $EI$ 。变形前, 杆件的支反力为

$$F_{AX} = 0, F_{AY} = \frac{P_1 b}{L}, F_{BX} = 0, F_{BY} = \frac{P_1 a}{L}。$$

受力变形后, 端点坐标分别是:  $A'(0, 0)$ ,  $B'(X_{B'}, Y_{B'})$ ,  $C'(X_{C'}, Y_{C'})$ , 且  $Y_{B'} = 0$ ,  $a' = X_{C'}$ ,  $L' = X_{B'}$ ,  $b' = X_{B'} - X_{C'}$ 。把简支梁分为  $n$  个微段, 则每个微段的长度为  $\Delta l = L/n$ 。建立整体坐标系为  $OXY$ , 则每个微

收稿日期: 2023-03-16

基金项目: 安徽省教育厅高校自然科学重点项目 (2022AH052650); 滁州职业技术学院优秀骨干教师项目 (YG2019016); 安徽省职业与成人教育协会一般项目 (Azcyj2021177); 安徽省教育厅高校自然科学重点项目 (KJ2020A0994); 安徽省教育厅高校优秀拔尖人才培养项目 (gxgnfx2022156)

第一作者简介: 尤 超 (1978—), 男, 安徽宿州人, 副教授, 硕士, 主要从事力学、结构设计和计算机仿真研究。

E-mail: 19619176@qq.com

段的端点在整个坐标系下的坐标是  $S_k(X_k, Y_k), k=0, 1, 2, \dots, n$ , 如图 2 所示。变形后简支梁的支座反力为

$$F_{A'X} = 0, F_{A'Y} = P_1 - \frac{P_1 X_C}{X_B}, F_{B'X} = 0, F_{B'Y} = \frac{P_1 X_C}{X_B}。$$

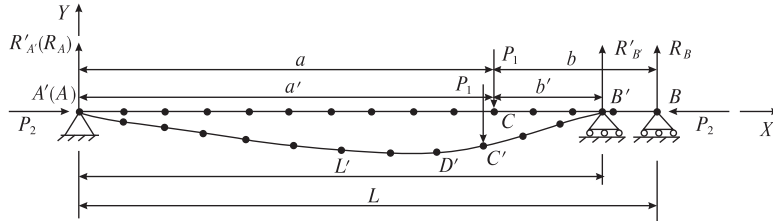


图 1 纵横弯曲结构受力变形前和变形后的平衡状态

1.2 在局部坐标系下各微段的转角和变形计算

对结构第  $k$  个微段进行静力受力分析, 建立以右端点坐标  $S_k(X_k, Y_k)$ , 左端点坐标  $S_{k-1}(X_{k-1}, Y_{k-1})$ , 并以左端点坐标  $S_{k-1}(X_{k-1}, Y_{k-1})$  的法线为  $y_k$  轴、切线为  $x_k$  轴, 建立局部坐标系  $x_k o y_k$ , 利用胡克定律, 每个微段在局部坐标系下可以看成小变形问题, 如图 2 所示。

第  $k$  个微段的内力为

$$\begin{cases} M_k = -P_1 \times \langle X_C - X_{k-1} \rangle + \frac{P_1 X_C}{X_{B'} \times (X_{B'} - X_{k-1}) - P_2 Y_{k-1}}, \\ Q_k = (P_1 - \frac{P_1 X_C}{X_{B'}}) \times \cos \theta_{k-1} - P_1 \times \cos \theta_{k-1} \times \frac{\langle X_{k-1} - X_C \rangle}{(X_{k-1} - X_C)} - P_2 \sin \theta_{k-1}, \\ N_k = (P_1 - \frac{P_1 X_C}{X_{B'}}) \times \sin \theta_{k-1} - P_1 \times \sin \theta_{k-1} \times \frac{\langle X_{k-1} - X_C \rangle}{(X_{k-1} - X_C)} + P_2 \cos \theta_{k-1}. \end{cases} \quad (1)$$

分析纵横弯曲杆件第  $k$  个微段的变形, 由式(1)可得在局部坐标系下第  $k$  个微段的转角为

$$\Delta\theta_k = \frac{\Delta l}{\rho_k} = \frac{M_k \Delta l}{EI}。 \quad (2)$$

$\Delta x_k$  和  $\Delta y_k$  分别为弯矩-轴力、弯矩-剪力在局部坐标系引起的变形:

$$\begin{cases} \Delta x_k = \rho_k \sin \Delta\theta_k + \frac{N_k \Delta l}{EA}, \\ \Delta y_k = \rho_k (1 - \cos \Delta\theta_k) + \frac{Q_k \times 2(1 + \mu) \Delta l}{EA}. \end{cases} \quad (3)$$

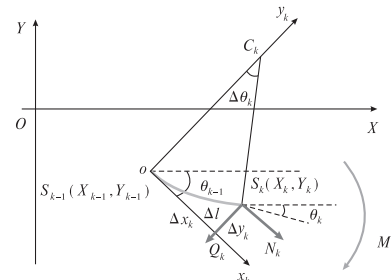


图 2 局部坐标系下第  $k$  个微段的平衡状态图

1.3 建立在整体坐标系下各微段的整体坐标

在整体坐标系下, 由  $S_{k-1}$  点位置和第  $k$  个微段的挠曲变形与转角共同决定  $S_k$  点的位置, 第  $k$  个微段的挠曲变形与转角分别为  $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta\theta_k$ 。则  $S_k$  点的转角和位移变形由递推关系式

$$\begin{cases} \theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\theta_k, \\ X_k = X_{k-1} + \Delta x_k \cos \theta_{k-1} + \Delta y_k \sin \theta_{k-1}, \\ Y_k = Y_{k-1} + \Delta x_k \sin \theta_{k-1} - \Delta y_k \cos \theta_{k-1} \end{cases} \quad (4)$$

得到。

2 纵横弯曲杆件优化问题的目标函数

纵横弯曲杆件发生变形平衡后, 端点坐标为  $A'(0, 0), B'(X_{B'}, Y_{B'}), Y_{B'} = 0$ , 转角  $\theta_{A'} \neq 0$ , 挠度  $Y_{A'} = 0$ ; 横向力  $P_1$  作用点坐标为  $C'(X_C, Y_C)$ ; 挠度最大处坐标为  $D'(X_{D'}, Y_{D'})$ , 且  $\theta_{D'} = 0$ 。第  $k$  个微段的弯矩

$M_k$ 、轴力  $N_k$ 、剪力  $Q_k$  由式(1)得到,由式(2)和式(3)求得每个微段的转角和变形,再由式(4)得出  $S_k$  点的整体坐标  $\theta'_k, X'_k, Y'_k$ , 即可得到  $D', C', B'$  各点的整体坐标分别为  $(\theta'_{D'}, X'_{D'}, Y'_{D'}) (\theta'_{C'}, X'_{C'}, Y'_{C'})$  和  $(\theta'_{B'}, X'_{B'}, Y'_{B'})$ 。构建以  $\theta_{A'}, C'$  点和  $B'$  点未知坐标为设计变量  $F(z)$  的目标函数:

$$F(X_{B'}, \theta_{A'}, X_{C'}, Y_{C'}) = (X'_{B'} - X_{B'})^2 + (Y'_{B'} - 0)^2 + (X'_{C'} - X_{C'})^2 + (Y'_{C'} - Y_{C'})^2。$$

基于上面的分析推导,构建的目标函数  $F(z)$  可表示为

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \{ [X_i(z) - z_{i+1}]^2 + [Y_n(z)]^2 \},$$

从而确立无约束条件下的纵横弯曲杆件变形分析的优化问题为  $\min(F(z))$ 。式中设计变量  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ , 其中  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  为平衡状态分点的横坐标,  $z$  为复杂显式函数, 可编制优化程序计算过程求解其变形和转角。

### 3 纵横弯曲杆件问题的算例

压弯杆件的结构参数采用文献[5]所提供的无量纲量。纵横弯曲杆件的截面为正方形, 截面宽  $\frac{\sqrt{12}}{100}$ , 杆长  $L=1$ , 弹性模量  $E=10^8$ , 惯性矩  $I_z = (\frac{\sqrt{12}}{100})^4 / 12 = 1 \times 10^{-8}$ 。采用本文推导的优化计算算法进行计算, 计算中考虑剪力、轴力和弯矩, 同时使用有限元软件对同一算例进行求解, 并将两种方法的计算结果进行比较。

**算例 1** 纵横弯曲杆件小变形时, 本文优化计算和文献[5]的解析法分别进行求解, 并将计算结果列于表 1。从表 1 可以看到, 应用本文推导的优化算法得到的结果和用解析法得到的解析解十分近似。表 2 列出在小变形条件下, 纵横弯曲杆件挠曲变形和转角的相对误差。通过表 2 列出的计算结果相对误差, 可以看到应用本文终态平衡分析的优化算法的计算精确度较高。

表 1 本文优化算法和文献[5]的解析法的计算结果

载荷	本文优化算法			文献[5]的解析解		
	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$
0.01	0.999 214	-0.008 097	-0.019 232	0.998 000	-0.008 000	-0.019 000
0.02	0.996 919	-0.011 114	-0.024 067	0.995 000	-0.011 000	-0.024 000
0.03	0.991 383	-0.014 170	-0.034 162	0.988 000	-0.014 000	-0.034 000

表 2 本文优化算法和文献[5]解析法计算结果的相对误差

载荷	相对误差/%		
	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$
0.01	0.121 5	1.197 9	1.206 3
0.02	0.192 5	1.025 7	0.279 2
0.03	0.341 2	1.201 8	0.474 5

**算例 2** 杆件在  $x=0.4$  处受横向力  $P_1$  作用, 同时两端还受轴向力  $P_2$  作用, 作用力的方向如图 1 所示。应用本文优化算法和 ANSYS 有限元软件分别计算  $P_1 = P_2 = 1 \sim 10$  的载荷情况, 并将两种方法计算出的挠曲变形和转角的结果分别列于表 3 中。图 3 为  $P_1$  作用在  $x=0.4$  处, 在不同载荷  $P_1, P_2$  时, 应用本文优化算法计算得到的纵横弯曲杆件变形后的平衡状态图。图 4 为  $P_1$  作用在  $x=0.4$  处, 且  $P_1 = P_2 = 10$  时, 本文推导的临界荷载优化算法和有限元软件计算确定的纵横弯曲杆件变形后的对比图, 通过挠曲

变形和转角的对比图可以看出,本文提出的优化计算方法和有限元方法的计算结果具有很好的一致性。

表 3 不同载荷作用在  $x=0.4$  时,本文优化算法和有限元软件计算的挠曲变形和转角

载荷 $P_1=P_2$	本文优化算法			有限元软件计算结果		
	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$
1	0.998 856	-0.021 599	-0.069 860	0.998 805	-0.021 258	-0.070 894
2	0.994 016	-0.048 168	-0.156 060	0.994 116	-0.047 330	-0.158 130
3	0.982 938	-0.080 732	-0.262 726	0.983 406	-0.079 202	-0.265 760
4	0.961 760	-0.119 764	-0.393 220	0.962 971	-0.117 360	-0.397 170
5	0.925 993	-0.164 158	-0.547 333	0.928 548	-0.160 840	-0.552 504
6	0.873 538	-0.210 255	-0.717 675	0.877 480	-0.206 480	-0.725 750
7	0.806 895	-0.253 079	-0.891 140	0.812 370	-0.249 020	-0.902 360
8	0.732 408	-0.288 904	-1.054 952	0.738 650	-0.285 120	-1.071 301
9	0.656 269	-0.316 849	-1.202 760	0.663 680	-0.313 110	-1.222 203
10	0.582 971	-0.337 516	-1.332 051	0.590 990	-0.333 970	-1.354 902

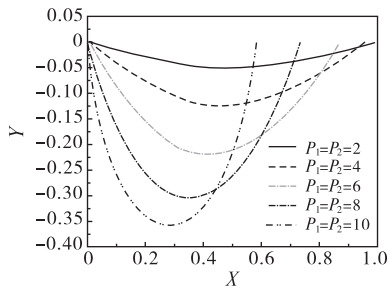


图 3 本文优化算法确定的变形图(1)

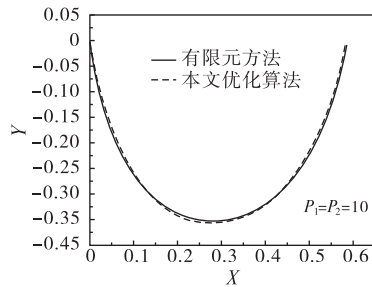
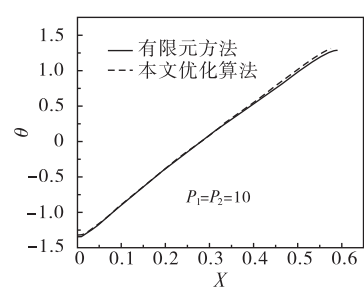


图 4 本文优化算法和有限元软件计算的挠曲变形和转角(1)



算例 3 杆件在  $x=0.7$  处受横向力  $P_1$  作用,同时两端还受轴向力  $P_2$  作用,作用力的方向如图 1 所示。用本文优化算法和 ANSYS 有限元软件分别计算  $P_1=P_2=1\sim 10$  的载荷情况,并将两种方法计算出的挠曲变形和转角计算结果分别列于表 4 中。

表 4 不同载荷作用在  $x=0.7$  时,本文优化算法和有限元软件计算出的挠曲变形和转角

载荷 $P_1=P_2$	本文优化算法			有限元软件计算结果		
	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$	$X_B$	$Y_C$	$\theta_A$
1	0.999 164	-0.016 512	-0.049 819	0.999 116	-0.016 213	-0.051 109
2	0.995 698	-0.036 661	-0.112 741	0.995 669	-0.035 985	-0.115 730
3	0.987 772	-0.061 330	-0.192 714	0.987 760	-0.060 133	-0.197 790
4	0.972 173	-0.091 116	-0.293 618	0.972 433	-0.089 251	-0.301 350
5	0.945 175	-0.125 697	-0.417 578	0.945 782	-0.123 090	-0.428 900
6	0.903 485	-0.162 775	-0.561 270	0.904 363	-0.159 660	-0.578 120
7	0.847 395	-0.198 417	-0.715 259	0.847 860	-0.195 210	-0.740 200
8	0.781 257	-0.228 870	-0.867 823	0.780 800	-0.225 830	-0.901 710
9	0.711 037	-0.252 495	-1.011 021	0.708 980	-0.249 790	-1.054 601
10	0.641 364	-0.269 456	-1.142 003	0.638 180	-0.266 990	-1.193 902

图 5 为  $P_1$  作用在  $x=0.7$  处,在不同横向力  $P_1、P_2$  时,应用本文优化算法计算得到的纵横弯曲杆件

变形后的平衡状态图。

图 6 为  $P_1$  作用在  $x=0.7$  处,且  $P_1=P_2=10$  时,本文推导的优化算法和有限元软件计算确定的纵横弯曲杆件变形后的对比图,通过挠曲变形和转角的对比图可以看出,本文提出的优化计算方法和有限元方法的计算结果,在不同荷载作用下,其计算结果均具有很好的一致性和有效性。

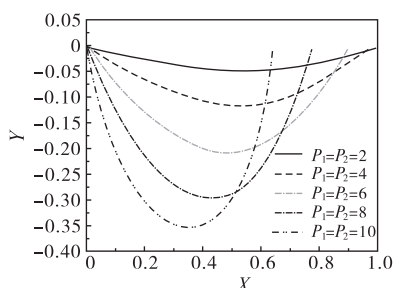


图 5 本文优化算法确定的变形图(2)

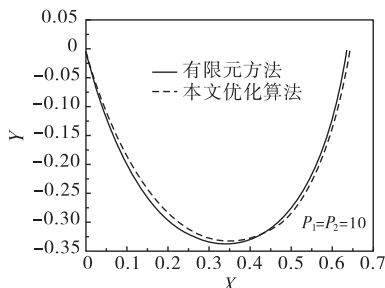
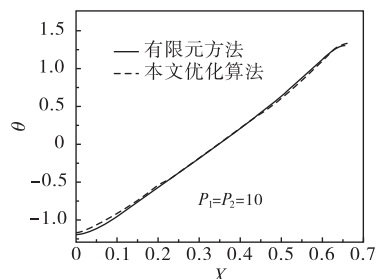


图 6 本文优化算法和有限元软件计算的挠曲变形和转角(2)



综上所述,从算例 1 的计算结果以及相对误差对比中,可以看出采用本文优化计算的结果与用解析法得到的解析解十分近似,且计算精确度更高。通过算例 2 与算例 3 可以看出,随着外荷载的递增,结构的挠曲变形和转角也随之变大,进一步验证了采用本文推导的优化计算方法的有效性和正确性。

#### 4 结论

通过计算实例,对纵横弯曲杆件挠曲变形和转角的问题进行了计算分析,通过微分方程初值问题的求解原理,建立优化设计计算,求解未知解,编制算法的求解程序,分析了计算实例,并同有限元软件的计算结果进行了对比,验证了本文研究的优化算法在求解土木工程结构问题上具有很好的准确性和有效性,从而为处理工程结构问题,提供了一种求解的新思路。

#### 参考文献:

[1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社,2016.  
 [2] 曹双寅. 工程结构设计原理[M]. 4 版. 南京:东南大学出版社,2018.  
 [3] 侯祥林,尤超. 大转动几何非线性梁变形问题的优化计算[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2006,22(5):726-731.  
 [4] 尤超,朱永祥,张锦丽. 超静定悬臂梁临界荷载的优化算法[J]. 滁州学院学报,2014,16(2):21-23.  
 [5] 孙训芳. 材料力学[M]. 6 版. 北京:高等教育出版社,2019.  
 [6] 侯祥林,刘大任. 杆件大变形问题的优化精确算法[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版),2006,22(2):221-223.  
 [7] 王新宁. 空间曲梁柔顺机构构型方法及负泊松比结构研究[D]. 大连:大连交通大学,2020.  
 [8] BELLMAN R,KASHEF B G,CASTI J. Differential quadrature;a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. Journal of computational physics,1972,10(1):40-52.  
 [9] 李敏,王治华,张恒德,等. 材料力学中梁变形分析方法的关联[J]. 力学与实践,2023,45(1):175-180.  
 [10] 张涛,吴晓. 用能量法求解分布载荷作用下的静不定梁[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版),2017,29(4):66-67.  
 [11] 秦荣. 板壳非线性分析的新理论新方法[J]. 工程力学,2004,21(1):9-14.  
 [12] 殷有泉. 非线性有限元基础[M]. 北京:北京大学出版社,2007.

(下转第 91 页)

## Finite Element Analysis and Fixture Design of Clamping Deformation of Thin-walled Annular Part

ZHOU Yuanzhi, ZHAO Wenying, ZHANG Guozheng

(Mechanical Engineering College, Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhu 241002, China)

**Abstract:** The clamping deformation of thin-walled parts is an important factor affecting the processing quality of workpieces. Taking a thin-walled ring part processed by 6061 aluminum alloy as the analysis object, aiming at its multi process clamping problems such as boring, thread processing, drilling and spot facer, on the basis of maintaining the same total clamping force, three clamping layouts such as 3-jaw, 6-jaw and 9-jaw are adopted respectively, the three-dimensional finite element method is used to analyze the stress and strain of different clamping layout positions, and the law of clamping deformation control is obtained. The results show that the clamping deformation can be effectively reduced by adopting the 9-point uniform clamping layout. The results show that the 9-point uniform clamping layout is adopted to design a flexible film disk 9-claw type fixture to complete multiple processes such as boring, thread processing, drilling and countersinking of thin-walled annular parts, which can effectively reduce the clamping deformation and ensure the workpiece processing accuracy.

**Keywords:** thin-walled annular part; clamping deformation; three-dimensional finite element; clamping layout; elastic fixture (责任编辑: 王新亮)

~~~~~  
(上接第 86 页)

## An Optimization Algorithm for Critical Load of Vertical and Horizontal Bending Members

YOU Chao<sup>1,2</sup>, SHEN Chenshu<sup>3</sup>, LIANG Guanjun<sup>1</sup>, YU Long<sup>1</sup>

(1. College of Architectural Engineering, Chuzhou Polytechnic, Chuzhou 239000, China;

2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

3. China Energy Engineering Group Anhui Electric Power Design Institute Co., Ltd., Hefei 230009, China)

**Abstract:** Based on the principle of solving the initial value problem of differential equations, the internal force calculation of the vertical and horizontal bending members under static equilibrium state is studied by using the optimization algorithm, and the deformation and rotation angle of the vertical and horizontal bending members under different loads are calculated. The correctness and effectiveness of the optimization algorithm have been verified through case analysis and comparison with the calculation results of finite element program software in this paper.

**Keywords:** differential equation; optimization algorithm; equilibrium state; load action

(责任编辑: 王新亮)