【微分方程与动力系统研究】

状态依赖时滞 Caputo 分数阶泛函微分方程的可解性

许文莉，王　奇

（安徽大学 数学科学学院，安徽 合肥 230601）

摘　要：考虑状态依赖时滞 Caputo 分数阶泛函微分方程解的存在唯一性。首先利用 Schaefer 不动点定理及 Gronwall 不等式得到方程解的存在性；然后利用适用于分数阶微积分的广义 Winston 单调滞后条件得到解的唯一性，推广了已有的结果。

关键词：状态依赖时滞；Caputo 分数阶泛函微分方程；Schaefer 不动点定理；Gronwal 不等式；广义 Winston 单调滞后条件

中图分类号：O 175.12　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.04.007

状态依赖时滞微分方程是泛函微分方程[1-2]的难点问题，已有成果主要研究整数阶状态依赖时滞微分方程解的存在唯一性、稳定性及解对初值的连续依赖性[3-6]。文献[3]考虑状态依赖时滞微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=F(x(t),x(t-g(x(t)))),t\geqslant t_0, \\ x(t)=\phi(t),t\leqslant t_0 \end{cases} \tag{1}$$

的初值问题并得到以下结论：设区域 $D\subseteq \mathbf{R}^n$，函数 $F:D\times D\to \mathbf{R}^n$ 满足局部 Lipschitz 条件，函数 $g:D\to \mathbf{R}^+$ 一阶可导并且导数满足 Lipschitz 条件。若存在 $\eta>0$ 使得

$$(\nabla g(x),F(x,y))<1,x\in D,\|y\|\leqslant\eta, \tag{2}$$

则当初始函数 $\|\phi\|<\eta$ 时，方程(1)存在唯一解。这里给出的 Winston 单调时滞条件(2)对保证解的唯一性非常重要。

受上述文献的启发，本文利用一个适用于分数阶微积分的广义 Winston 单调时滞条件并研究状态依赖时滞 Caputo 分数阶泛函微分方程

$$\begin{cases} {}^CD^\alpha x(t)=f(t,x(t),x(t-\sigma(x(t)))),t\in J=[0,T],\alpha\in(1,2], \\ x(t)=\phi(t),x'(t)=\varphi(t),t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{3}$$

解的存在唯一性。其中，${}^CD^\alpha$ 表示函数 $x(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数，$f\in C(J\times\mathbf{R}\times C_\tau,\mathbf{R})$，$\phi,\varphi\in C([-\tau,0],\mathbf{R})=C_\tau$，$\max\{\sigma(x(t))\}=\tau\geqslant 0$。关于分数阶微积分的具体内容见文献[7-8]。

1　预备知识

记 $C(I,\mathbf{R})$ 表示从 I 到 $\mathbf{R}$ 的连续函数组成的 Banach 空间，其范数为 $\|x\|=\sup\{|x(t)|,t\in I\}$。

收稿日期：2022-12-14

基金项目：安徽省教育厅自然科学基金重点项目（KJ2018A0027）

第一作者简介：许文莉（1998—），女，安徽阜阳人，硕士研究生，主要从事泛函微分方程及生物数学研究。

E-mail：xwl222221@163.com

通信作者简介：王　奇（1974—），男，安徽灵璧人，副教授，博士，主要从事泛函微分方程及生物数学研究。

E-mail：wq200219971974@163.com

定义 1[7-8]　对函数 $h \in L^1([a,b],\mathbf{R}^+)$，定义其 α- 分数阶积分为 $I_a^\alpha h(t) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\mathrm{d}s$，$\alpha > 0$，其中，$\Gamma(\alpha)$ 是伽马函数。

定义 2[7-8]　在区间 $[a,b]$ 有意义的函数 $h(t)$ 的 Caputo 分数阶导数定义为

$$({}^C D_{a^+}^\alpha h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

其中，$n = [\alpha]+1$，$[\alpha]$ 为取整函数。当 $a = 0$ 时，记 $({}^C D^\alpha h)(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)\mathrm{d}s$。

引理 1[9]　若 $\beta > 0$，$a(t)$ 是区间 $[0,T)$，$T \leqslant +\infty$ 上的非负局部可积函数，$b(t)$ 是区间 $[0,T)$ 上的非负、有界连续函数，$y(t)$ 在区间 $[0,T)$ 满足 $y(t) \leqslant a(t) + b(t)\int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)\mathrm{d}s$，则

$$y(t) \leqslant a(t) + \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} (b(t)\Gamma(\beta))/\Gamma(j\beta) \times (t-s)^{j\beta-1} a(s)\mathrm{d}s, t \in [0,T)。$$

若 $a(t)$ 非减，则 $y(t) \leqslant a(t)E_\beta(b(t)\Gamma(\beta)t^\beta)$，$t \in [0,T)$，其中 Mittag-Leffler 函数 $E_\beta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{t^j}{\Gamma(\beta+1)}$。

2　主要结果

(H1) $f \in C(J \times \mathbf{R} \times C_\tau, \mathbf{R})$，$f(s,0,0) \in L^{\frac{1}{q}}(J,\mathbf{R}^+)$，$0 < q < 1$ 存在常数 $L \geqslant 0$ 使得

$$\| f(t,\tilde{u},u) - f(t,\tilde{v},v) \| \leqslant L(\| \tilde{u} - \tilde{v} \| + \| u - v \|), \tilde{u},\tilde{v} \in \mathbf{R}, u,v \in C_\tau。$$

(H2)（适用于分数阶微积分的 Winston 单调时滞条件）对任意 $t,a \in J$，$u \in \mathbf{R}$，$v \in C_\tau$ 有

$$\frac{\tau'(u)}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2} f(s,u,v)\mathrm{d}s \geqslant 1。$$

(H3) $\tau(t) \in C^1(J,\mathbf{R}^+)$，$\tau'(t) < 1$ 存在正常数 L' 使得 $\|\tau(x(t)) - \tau(y(t))\| \leqslant L' \| x(t) - y(t) \|$，$t \in J$。

定理 1　若条件(H1)(H2)(H3)均满足，则方程(3)的解存在且唯一。

证明　定义 $\Phi = \{x:[-\tau,T] \to \mathbf{R}, x|_J \in C(J,\mathbf{R}), x_0 \in C_\tau\}$ 到 Φ 算子为

$$(Fx)(t) = \begin{cases} \phi(t), \phi'(t) = \varphi(t), t \in [-\tau,0], \\ \phi(0) + \varphi(0)t + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s),x(s-\sigma(x(s))))\mathrm{d}s, t \in J。\end{cases}$$

在 Φ 中取函数列 $x_n \to x$，对应的初始函数 $\phi_n \to \phi$，$\varphi_n \to \varphi$，则

$$(Fx)(t) - (Fx_n)(t) = \phi(0) - \phi_n(0) + (\varphi(0) - \varphi_n(0))t +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s,x(s),x(s-\sigma(x(s)))) - f(s,x_n(s),x_n(s-\sigma(x_n(s))))]\mathrm{d}s, t \in J,$$

由(H1)可得算子 F 的连续性。

任取 Φ 中有界集 $B_r = \{x \in \Phi: \| x \| \leqslant r\}$。由条件(H1)及 Hölder 不等式得

$$\| (Fx)(t) \| \leqslant \| \phi(0) \| + \| \varphi(0) \| T + \frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \| f(s,x(s),x(s-\sigma(x(s)))) \| \mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)} \leqslant$$

$$\| \phi(0) \| + \| \varphi(0) \| T + \frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[L(\| x \| + \| x(s-\sigma(x(s))) \|) + \| f(s,0,0) \|]\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)} \leqslant$$

$$\| \phi(0) \| + \| \varphi(0) \| T + \frac{2LT^\alpha r}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f_{L^{\frac{1}{q}}} T^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)} = H,$$

则 $\| Fx \| \leqslant H$，即算子 F 把有界集映射为有界集。

任取 $x \in B_r$，$t'_1, t'_2 \in J$，当 $t'_1 \to t'_2$ 时，由(H1)得

$$\|(Fx)(t'_2)-(Fx)(t'_1)\| \leqslant \|\varphi(0)\| \, |t'_2-t'_1|+\frac{M_{L^{\frac{1}{q}}}(t'_2-t'_1)^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)}r\to 0,$$

即集合 $F(B_r)$ 是等度连续的。由 Arezela-Ascoli 定理知算子 F 是相对紧的。

定义集合 $\Omega=\{x\in\Phi : x=\lambda Fx, 0<\lambda<1\}$。对任意 $x\in\Omega$，由条件(H1)，类似于以上推导，有

$$\|x(t)\| \leqslant \|\phi(0)\|+\|\varphi(0)\|T+\frac{f_{L^{\frac{1}{q}}}T^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)}+\frac{L\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(\|x(s)\|+\|x(s-\sigma(x(s)))\|)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)},$$

其中 $0<q<1$，取 $y(t)=\sup\limits_{t\in[-\tau,T]}\|x(t)\|$，则有

$$y(t)\leqslant \|\phi(0)\|+\|\varphi(0)\|T+\frac{f_{L^{\frac{1}{q}}}T^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)}+\frac{2L\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)},$$

由引理 1 得

$$\|x(t)\|\leqslant y(t)\leqslant\left(\|\phi(0)\|+\|\varphi(0)\|T+\frac{f_{L^{\frac{1}{q}}}T^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)}\right)+\frac{2L\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\leqslant$$
$$\left(\|\phi(0)\|+\|\varphi(0)\|T+\frac{f_{L^{\frac{1}{q}}}T^{\alpha-q}(1-q)^{1-q}}{(\alpha-q)\Gamma(\alpha)}\right)E_\beta(2Lt^\alpha),$$

则 Ω 的有界性得证。由 Schaefer 不动点定理，算子 F 至少有一个不动点，即为方程(1) 的解。

若方程(3) 存在两个解 $x(t)$ 和 $y(t)$，对应的初始函数 $\phi_x(t)=\phi_y(t)$，$\varphi_x(t)=\varphi_y(t)$，$t\in[-\tau,0]$。设 $\tilde{t}=\inf\{t\in[0,T];x(t)\neq y(t)\}$，则由条件(H2) 得

$$D^+(t-\tau(x(t)))=1-\frac{\tau'(x)}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-2}f(s,x,\tilde{x})\mathrm{d}s\geqslant 0,$$

其中 $D^+(t-\tau(x(t)))$ 为右上 Dini 导数，因此 $t-\tau(x(t))$ 单调非减连续。令 $u(s)=s-\sigma(x(s))$，$v(s)=s-\sigma(y(s))$，则 $u(s)$，$v(s)$ 在$[\tilde{t},T]$上连续单调非减。任取充分小的正数 ε' 使得 x 在$[u(\tilde{t}),u(\tilde{t})+\varepsilon']$上是 Lipschitz 连续的并且 $|x(t_2)-x(t_1)|\leqslant k|t_2-t_1|$，$t_2,t_1\in[u(\tilde{t}),u(\tilde{t})+\varepsilon']$。再定义

$$\delta=\sup\{s\in[\tilde{t},T]:\max\{u(s),v(s)\}\leqslant u(\tilde{t})+\varepsilon'\},$$

则由 $u(\tilde{t})=v(\tilde{t})$ 及 $u(s)$，$v(s)$ 在$[\tilde{t},T]$上都连续单调非减可得$\tilde{t}<\delta$。由于

$$\sup_{s\in[\tilde{t},t]}\|x(u(s))-y(v(s))\|\leqslant\sup_{s\in[0,t]}\|x(s)-y(s)\|,t\leqslant\delta,$$

故由条件(H3) 中 $\tau(x(t))$ 的性质知，存在正常数 L' 使得

$$\|u(t)-v(t)\|=\|\tau(x(t))-\tau(y(\tau))\|\leqslant L'\|x(t)-y(t)\|,t\in[\tilde{t},\delta]。$$

由方程(3) 解的定义得

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\frac{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,x(s),x(u(s)))-f(s,y(s),y(v(s)))\|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}。$$

当 $t\in[\tilde{t},\delta]$ 时，由条件(H3) 得

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\frac{\int_{\tilde{t}}^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,x(s),x(u(s)))-f(s,y(s),y(v(s)))\|\mathrm{d}s}{\Gamma(\alpha)}\leqslant$$
$$\frac{(t-\tilde{t})^\alpha L(k\sup\limits_{s\in[\tilde{t},t]}\|x(s)-y(s)\|+\|x(s)-y(s)\|+\|x(u(s))-y(v(s))\|)}{\Gamma(\alpha+1)}\leqslant$$
$$\frac{(t-\tilde{t})^\alpha L(k+1+L')\sup\limits_{s\in[0,t]}\|x(s)-y(s)\|}{\Gamma(\alpha+1)}。$$

令 $\varepsilon = (\frac{\Gamma(\alpha+1)}{3L(k+1+L')})^{\alpha^{-1}}$，则

$$\| x(t)-y(t) \| \leqslant \sup_{s\in[0,\tilde{t}+\varepsilon]} \| x(s)-y(s) \| = \sup_{s\in[\tilde{t},\tilde{t}+\varepsilon]} \| x(s)-y(s) \| \leqslant \frac{1}{3} \sup_{s\in[0,\tilde{t}+\varepsilon]} \| x(s)-y(s) \|, t\in[\tilde{t},\delta],$$

因此 $x(t)=y(t), t\in[0,T]$ 方程(3) 的解的唯一性得证。

3　结论

本文在文献[3，6]的基础上，进一步考虑状态依赖时滞 Caputo 分数阶泛函微分方程的可解性。首先利用 Schaefer 不动点定理及 Gronwall 不等式得到方程(3)解的存在性结论，并利用适用于分数阶微积分的广义 Winston 单调滞后条件得到解的唯一性，扩展了文献[3，6]的结果。研究表明，广义 Winston 单调性滞后条件对保证解的唯一性非常重要，是保证解的唯一性的经典条件。

参考文献：

[1]　HALE J K. Theory of functional differential equations[M]. New York：Springer，1977.

[2]　郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥：安徽教育出版社，1994.

[3]　WINSTON E. Uniqueness of solutions of state dependent delay differential equations[J]. Journal of mathematical analysis and applications，1974，47(3)：620-625.

[4]　HARTUNG F. Linearized stability for a class of neutral functional differential equations with state-dependent delays[J]. Nonlinear analysis：an international multidisciplinary journal，2008，69(5/6)：1629-1643.

[5]　MAGPANTAY F M G，HUMPHRIES A R. Generalised Lyapunov-Razumikhin techniques for scalar state-dependent delay differential equations[J]. Discrete and continuous dynamical systems，2020，13(1)：85-104.

[6]　CHURCH K E M. Uniqueness of solutions and linearized stability for impulsive differential equations with state-dependent delay[J]. Journal of differential equations，2022，338：415-440.

[7]　PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego：Academic Press，1999.

[8]　KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]//North-Holland Mathematics Studies 24. Amsterdam：Elsevier Science B V，2006.

[9]　YE H P，GAO J M，DING Y S. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation[J]. Journal of mathematical analysis and applications，2007，328(2)：1075-1081.

On Caputo Fractional Functional Differential Equations with State-dependent Delay

XU Wenli，WANG Qi

(*School of Mathematical Sciences*，*Anhui University*，*Hefei* 230601，*China*)

Abstract：The existence and uniqueness of solutions for Caputo fractional functional differential equations with state-dependent delay is considered. The existence of the solution is obtained by using Schaefer fixed point theorem and Gronwall inequality，then the uniqueness of the solution is obtained by using the generalized Winston monotone lag condition that is suitable for fractional differential equation，which extends the existing results.

Keywords：state-dependent delay；Caputo fractional functional differential equations；Schaefer fixed point theorem；Gronwall inequality；generalized Winston monotone lag condition

(责任编辑：贾晶晶)