【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

回归时间上的半流局部熵的重分形分析

王 威[1],张昕源[2],黄 萍[3]

(1. 南通理工学院 基础教学学院,江苏 南通 226002;
2. 安徽师范大学 数学与统计学院,安徽 芜湖 241000;
3. 泰州学院 数理学院,江苏 泰州 225300)

摘 要:为了丰富 Carathéodory 相关理论的研究,建立了 Poincaré 回归时间上的半流熵和多重分形谱,得出了半流局部熵的多重分形谱关于回归时间的精确公式。

关键词:熵;半流;重分形分析;Poincaré 回归;Hausdorff 维数

中图分类号:O 19 **文献标识码**:A DOI:10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.012

1958 年,为了对动力学系统进行分类,Kolmogorov 将熵的概念引入遍历理论[1]。此后,熵在动力学系统复杂性研究中发挥了重要作用。Bowen 在紧致度量空间中引入了流的拓扑熵,证明了流的拓扑熵只是时间映射的熵[2]。Thomas 定义了流上的拓扑熵[3],如果是无固定点的流,其性质和普通的熵一样都是时间映射的熵[3-6]。受 Katok 熵公式的启发,Sun 提出流上的测度熵[7],流的拓扑熵被定义为遍历测度的测度熵的上确界。文献[8]基于 Carathéodory 结构理论[9],在非紧集上引入了流的拓扑熵,并证明了该熵与文献[7]定义的熵等价,建立了流的拓扑熵与测度熵之间的变分原理。受上述研究启发,本文利用流的思想研究半流的维数理论。

多重分形分析是动力系统维数理论的主要研究内容,它主要描述测度的局部奇异性。文献[10]讨论了任意不变测度下局部熵的高维多重分形谱问题;文献[11-12]分别讨论了 Amenable 群作用下局部熵的多重分形分析和半群作用下局部熵的重分形分析。现利用文献[11-12]的构造方法研究回归时间上半流局部熵的多重分形分析。

1 预备知识

设(X,d)是紧致度量空间,记 $\mathbf{R}^{+}=[0,+\infty)$。若 f 满足条件:

(i) $f:X\to X$ 是连续的;

(ii) $f(0,x)=x,\ \forall x\in X$;

(iii) $f(s,f(t,x))=f(s+t,x),\ \forall s,t\in\mathbf{R}^{+},\ \forall x\in X$;则称 $f:\mathbf{R}^{+}\times X\to X$ 为一个连续半流。

记(X,d,f)为连续半流,称 $D(x,t,\varepsilon,f):=\{y\in X:d(f_s(x),f_s(y))<\varepsilon,0\leqslant s\leqslant t\}$为$(t,\varepsilon,f)$-球。

定义 1[8] 设 (X,d,f) 是连续半流,如果 $Z\subseteq\bigcup_i D(x_i,t_i,\varepsilon,f)$,则称 $\Gamma=\{D(x_i,t_i,\varepsilon,f)\}_i$ 是 Z 的一

收稿日期:2024-05-13

基金项目:国家自然科学基金项目(11971236,12101446);南通理工学院中青年骨干教师培养项目(ZQNGGJS202135);南通理工学院科研项目(2022xk(z)43)

第一作者简介:王 威(1978—),男,安徽寿县人,副教授,硕士,主要从事动力系统研究。
E-mail:20200003@ntit.edu.cn

个覆盖。

对于集合 $\Gamma=\{D(x_i,t_i,\varepsilon,f)\}_i$，令 $t(\Gamma)=\inf_i\{t_i\}_i$。给定实数 $r\geqslant 0$，记

$$M(Z,r,T,\varepsilon)=\inf_{\Gamma}\sum_i \exp(-rt_i)。$$

其中，下确界取遍所有 Z 的覆盖 $\Gamma=\{D(x_i,t_i,\varepsilon,f)\}_i$ 且满足 $t(\Gamma)\geqslant T$。由 Carathéodory 维数理论定义知：

（ⅰ）$M(Z,r,\varepsilon)=\lim\limits_{T\to\infty}M(Z,r,T,\varepsilon)$；

（ⅱ）$h_{\mathrm{top}}(f,Z,\varepsilon)=\inf\{r:M(Z,r,\varepsilon)=0\}=\sup\{r:M(Z,r,\varepsilon)=\infty\}$；

（ⅲ）$h_{\mathrm{top}}(f,Z)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}h_{\mathrm{top}}(f,Z,\varepsilon)$。

$h_{\mathrm{top}}(f,Z)$ 称为集合 Z 上半流 f 的拓扑熵。

下面给出非紧集上的半流熵的另一种定义。令 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_N\}$ 是 X 的有限开覆盖。字符串

$$\underline{U}=\prod_{0\leqslant s\leqslant t}u_{i(s)}\ ,i(s)\in\{1,2,\cdots,N\}$$

的长度记为 $t(\underline{U})$。所有字符串记为 $W_t(U)$，且记 $W_{\geqslant t}(U)=\bigcup_{K\geqslant t}W_K(U)$。取任意 $\underline{U}\in W_t(U)$，定义

$$X(\underline{U})=\{x\in X:f_s(x)\in u_{i(s)},\forall\, 0\leqslant s\leqslant t\}。$$

如果 $Z\subseteq\bigcup_{\underline{U}\in\Gamma}X(\underline{U})$，称集族 $\bigcup_{\underline{U}\in\Gamma}X(\underline{U})$ 是 Z 的一个覆盖。对任意实数 $r\in\mathbf{R}$ 和集合 Γ，自由能力给定如下：

$$F(\Gamma,r)=\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-t(\underline{U})r)。$$

令

$$M(Z,U,r,t)=\inf_{\Gamma}F(\Gamma,r),$$

其中，下确界取遍所有覆盖 Z 的集合 $\Gamma\subseteq\bigcup_{\geqslant t}W_K(U)$。再令

$$M(Z,U,r)=\lim_{t\to\infty}M(Z,U,r,t),$$

那么存在唯一实数 $h(Z,U)$ 满足 $M(Z,U,r)$ 从 $+\infty$ 跃至 0，即

$$h(Z,U)=\sup\{r:M(Z,U,r)=+\infty\}=\inf\{r:M(Z,U,r)=0\},$$

使得极限 $h'_{\mathrm{top}}(f,Z)=\lim\limits_{\mathrm{diam}(U)\to 0}h(Z,U)$ 存在。

事实上，假如 U、V 是 X 的两个有限开覆盖，令 $\delta(U)$ 是 U 的 Lebesgue 数，不失一般性，假设 $\mathrm{diam}\,V\leqslant\delta(U)$，根据 Lebesgue 数的定义知，$V$ 是有限开覆盖 U 的加细。取

$$\underline{V}=\prod_{0\leqslant s\leqslant t}v_{i(s)}\in W_t(V)，令\ U(\underline{V})=\prod_{0\leqslant s\leqslant t}u(v_{i(s)})\in W_t(U)。$$

如果 $\Gamma\subseteq W_{\geqslant t}(V)$ 覆盖 Z，那么 $\Gamma'=\{u(\underline{V}),\underline{V}\in\Gamma\}\subset \mathrm{W}_{\geqslant t}(U)$ 也覆盖 Z。故

$$M(Z,V,r,t)\geqslant M(Z,U,r,t),M(Z,V,r)\geqslant M(Z,U,r),h(Z,V)\geqslant h(Z,U)。$$

因此上极限存在。

性质 1　$h_{\mathrm{top}}(f,Z)=h'_{\mathrm{top}}(f,Z)$。

证明　这个命题是由以下事实得出的：设 U 是 X 的有限开覆盖，$\delta(U)$ 是它的 Lebesgue 数，对任意 $x\in X$，对于 $\underline{U}\in W(U)=W_{t\geqslant 0}(U)$，如果 $x\in X(\underline{U})$，那么

$$D\left(x,t(\underline{U}),\frac{1}{2}\delta(U),f\right)\subset X(\underline{U})\subset D(x,t(\underline{U}),2|U|,f)。$$

半流拓扑熵的两个定义与 Hausdorff 维数的定义相似。事实上，这些定义是 Carathéodory 结构的特殊情况，因此它们具有类似的性质。

引理 1　上面定义的拓扑熵具有以下性质：

（ⅰ）任意 $Z_1\subset Z_2$，$h_{\mathrm{top}}(f,Z_1)\leqslant h_{\mathrm{top}}(f,Z_2)$；

（ⅱ）任意 $Z_i\subset X$，$i=1,2,\cdots$，$h_{\mathrm{top}}(f,\bigcup_i Z_i)=\sup\limits_i h_{\mathrm{top}}(f,Z_i)$。

证明 （ⅰ）显然由 $h_{\mathrm{top}}(f,Z)$ 的定义可得。

（ⅱ）由（ⅰ）可知 $h_{\mathrm{top}}(f,\bigcup_i Z_i)\geqslant\sup_i h_{\mathrm{top}}(f,Z_i)$。下证

$$h_{\mathrm{top}}(f,\bigcup_i Z_i)\leqslant\sup_i h_{\mathrm{top}}(f,Z_i)。$$

令 $Z=\bigcup_i Z_i$。只需证

$$M(Z,r,\varepsilon)\leqslant\sum_i M(Z_i,r,\varepsilon)。$$

对 $\forall Z_i\subset X,\delta>0$，存在覆盖 $\Gamma=\{D(x_{i_j},t_{i_j},\varepsilon,f)\}_{j=1}^{\infty}$ 满足 $t_{i_j}(\Gamma)\geqslant T$ 使得

$$\sum_j \exp(-rt_{i_j})\leqslant M(Z_i,r,T,\varepsilon)+\frac{\delta}{2^i}。$$

那么 $\Gamma'=\{D(x_{i_j},t_{i_j},\varepsilon,f):i=1,2,\cdots\}$ 是 Z 的覆盖。这里蕴含了

$$M(Z,r,T,\varepsilon)\leqslant\sum_i\sum_j\exp(-rt_{i_j})\leqslant\sum_i(M(Z_i,r,T,\varepsilon)+\frac{\delta}{2^i})=$$

$$\sum_i(M(Z_i,r,T,\varepsilon)+\delta)\leqslant\sum_i(M(Z_i,r,\varepsilon)+\delta)。$$

令 $T\to\infty,\delta\to 0$，可得 $M(Z,r,\varepsilon)\leqslant\sum_i M(Z_i,r,\varepsilon)$。

回归时间定义为

$$\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)=\inf\{s>0:f_s(x)\in D(x,t,\varepsilon,f)\}。$$

定义半流回归时间下、上局部熵：

$$\underline{h}_\tau(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to+\infty}\inf\ \frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x),$$

$$\overline{h}_\tau(f,x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to+\infty}\sup\ \frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)。$$

下面研究半流回归时间的上、下局部熵的多重分形谱。对任意实数 $\alpha\in\mathbf{R}$，考虑水平集

$$K_\alpha=\{x\in X:\underline{h}_\tau(f,x)=\overline{h}_\tau(f,x)=\alpha\}。$$

假如 $G=\{D(x_i,t_i,\varepsilon,f)\}_i$ 是任意一个至多可数集，另有 $t(G)=\inf_i\{t_i\}$，$\lambda\in\mathbf{R}$，定义 G 的 (q,τ)-自由能量为

$$F_\tau(G,q,\lambda)=\sum_i(\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon,f))(x_i))^{-q}\exp(-\lambda t_i)。$$

给定 $Z\in X,q,\lambda\in\mathbf{R},\varepsilon>0,T\in\mathbf{R}^+\bigcup\{0\}$，记

$$M_\tau^c(G,q,\lambda)=\inf_G F_\tau(G,q,\lambda)。$$

其中，下确界取遍所有有限或可数集合 $G=\{D(x_i,t_i,\varepsilon,f)\}_i$，且 $x_i\in Z,t_i\geqslant T$ 满足 $Z\subseteq\bigcup_i D(x_i,t_i,\varepsilon,f)$。对任意的 q、λ、ε、T，令 $M_\tau^c(\phi,q,\lambda,\varepsilon,T)=0$。$M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon,T)$ 是关于 T 不减的量，所以极限

$$M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon)=\lim_{T\to\infty}M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon,T)=\sup_T M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon,T)$$

存在。由于覆盖的中心位于某个给定的集合，故 $M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon)$ 关于 Z 不具有单调性。在此，附加等式

$$M_\tau(Z,q,\lambda,\varepsilon)=\sup_{Z'\subseteq Z}M_\tau^c(Z',q,\lambda,\varepsilon)。$$

定义 2 称 $h_\tau(f,q,Z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup h_\tau(f,q,Z,\varepsilon)$ 为 Z 上的半流 (q,τ)-熵。

下面讨论上式的极限是否存在。假设 $q\leqslant 0$。令 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$，且 $G=\{D(x_i,t_i,\varepsilon_2,f)\}$ 是 Z 的中心覆盖。显然 $G'=\{D(x_i,t_i,\varepsilon_1,f)\}$ 是 Z 的覆盖且有 $F_\tau(G,q,\lambda)\geqslant F_\tau'(G,q,\lambda)$。因此 $M_\tau(Z,q,\lambda,\varepsilon_2)\geqslant M_\tau(Z,q,\lambda,\varepsilon_1)$，即 $h_\tau(f,q,Z,\varepsilon_2)\geqslant h_\tau(f,q,Z,\varepsilon_1)$，所以该极限存在。

当 $q<0$ 时，该极限关于 ε 不是单调的。然而在附加等式的条件下，可得该量关于 ε 是单调的，所以对于充分小的 $\varepsilon>0$，

$$C(\varepsilon):=\sup_t\sup_x\frac{\tau(D(x,t,\frac{\varepsilon}{2},f))(x)}{\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)}<\infty。$$

当 $a>1$ 时，可用$\frac{1}{a}$代替$\frac{1}{2}$。若上式对所有 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$都成立，选取 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0$，令 $a=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}>1$，可得存在 $\widetilde{C}=\widetilde{C}(a)<\infty$使得对任何 t 有

$$\frac{\tau(D(x,t,\frac{\varepsilon_1}{a},f))(x)}{\tau(D(x,t,\varepsilon_1,f))(x)}<\frac{\tau(D(x,t,\varepsilon_2,f))(x)}{\tau(D(x,t,\varepsilon_1,f))(x)}<\widetilde{C}(a)。$$

取 $G=\{D(x_i,t_i,\varepsilon_2,f)\}_i$ 是 Z 的中心覆盖。显然 $G'=\{D(x_i,t_i,\varepsilon_1,f)\}$是 Z 的覆盖且有 $F_\tau(G,q,\lambda)\geqslant\widetilde{C}^{-q}F_\tau(G',q,\lambda)$。所以 $M_\tau(Z,q,\lambda,\varepsilon_2)\geqslant\widetilde{C}^{-q}M_\tau(Z_2,q,\lambda,\varepsilon_1)$，故 $h_\tau(f,q,Z,\varepsilon_2)\geqslant h_\tau(f,q,Z,\varepsilon_1)$，至此可得定义 2 极限存在。由上文分析易知下列引理成立。

引理 2　对任意实数 $\lambda\in\mathbf{R}$，$M_\tau(\cdot,q,\lambda,\varepsilon)$具有如下性质：

（ⅰ）$M_\tau(\phi,q,\lambda,\varepsilon)=0$；

（ⅱ）对任意 $Z_1\subseteq Z_2$，$M_\tau(Z_1,q,\lambda,\varepsilon)\leqslant M_\tau(Z_2,q,\lambda,\varepsilon)$；

（ⅲ）对任意 $Z_i\subseteq X$，$i=1,2,\cdots$，$M_\tau(\bigcup_i Z_i,q,\lambda,\varepsilon)\leqslant\sum_i M_\tau(Z_i,q,\lambda,\varepsilon)$。

引理 3　存在临界值 $h_\tau(f,q,Z,\varepsilon)\in\mathbf{R}$ 使得

$$M_\tau(Z,q,\lambda,\varepsilon)=\begin{cases}0,h>h_\tau(f,q,z,\varepsilon),\\ \infty,h<h_\tau(f,q,z,\varepsilon)。\end{cases}$$

引理 4　下面结论成立：

（ⅰ）$h_\tau(f,q,\varphi,\varepsilon)=-\infty$；

（ⅱ）对任意 ε，$h_\tau(f,q,Z_1,\varepsilon)\leqslant h_\tau(f,q,Z_2,\varepsilon)$；

（ⅲ）对任意 $Z_i\subseteq X$，$i=1,2,\cdots$，$h_\tau(f,q,\bigcup_i Z_i,\varepsilon)=\sup_i h_\tau(f,q,Z_i,\varepsilon)$。

2　主要定理及其证明

下面讨论水平集 K_α 上拓扑熵与(q,τ)-熵的关系。

假设 $\alpha\in\mathbf{R}$ 对应的水平集为 K_α。如果 $x\in K_\alpha$，那么

$$\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)=\alpha。$$

选择 $M\to\infty$单调序列 $\varepsilon_M\to0$，令 $\delta>0$，取

$$K_{\alpha,M}:=\{x\in K_\alpha:\alpha-\delta<\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon_M,f))(x)\}。$$

显然，$K_{\alpha,M}\subset K_{\alpha,M+1}$且 $K_\alpha=\bigcup_M K_{\alpha,M}$。由于 $\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)$关于 ε 是单调的，对任意 $x\in K_\alpha$ 和任意 $\varepsilon>0$，则有

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon,f))(x)<\alpha。$$

固定 $x\in K_{\alpha,M}$，存在 $T_0=T_0(x,\delta,\varepsilon_M)$满足

$$\alpha-\delta<\frac{1}{t}\log\tau(D(x,t,\varepsilon_M,f))(x)<\alpha+\delta。$$

对一切 $t>T_0$，取

$$K_{\alpha,M,T}=\{x\in K_{\alpha,M}:T_0=T_0(x,\delta,\varepsilon_M)<T\}。$$

易得，如果 $T_1<T_2$，那么 $K_{\alpha,M,T_1}\subset K_{\alpha,M,T_2}$，记 $K_{\alpha,M}=\bigcup_T K_{\alpha,M,T}$。若 U 是 X 的有限开覆盖，由拓扑熵的性质可得

$$h(K_\alpha,U)=\lim_{M\to\infty}\lim_{T\to+\infty}h(K_{\alpha,M,T},U)。$$

引理5 设U是X的任意有限开覆盖，$\delta(U)$是U Lebesgue数。对于$M\in\mathbf{N}$，$T\in\mathbf{R}^{+}\cup\{0\}$，考虑$K_{\alpha,M,T}$满足$\varepsilon_M<\frac{\delta(U)}{2}$，那么对于$r\geqslant q\alpha+|q|\delta+\lambda$，有$M(K_{\alpha,M,T},U,r)\leqslant M_{\tau}^{c}(K_{\alpha,M,T},q,\lambda,\varepsilon_M)$。

证明 假设$t>T$，及任意i，$G=\{D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)\}_i$是$K_{\alpha,M,T}$的任意覆盖且$x_i\in K_{\alpha,M,T}$满足$t(G)\geqslant t$。对任意$x_i$，因为$\varepsilon_M<\frac{\delta(U)}{2}$存在某字符串$\underline{U}(i)=\prod_{0\leqslant s\leqslant t_i}U_{i(s)}$满足$t(\underline{U}(i))=t_i$使得$D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)\subseteq X(\underline{U}(i))$。事实上，对任意$x\in D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)$，$0\leqslant s\leqslant t_i$，$D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)\in G$，可知$d(f_s x,f_s x_i)<\varepsilon_M$。所以对任意$0\leqslant s\leqslant t_i$，$f_s x\in B(f_s x_i,\varepsilon_M)$，其中$B(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$。由于$B(f_s x_i,\varepsilon_M)$的直径最大为$2\varepsilon_M$，小于$\delta(U)$，故存在$u_{i(s)}\in U$使得$B(f_s x_i,\varepsilon_M)\subset u_{i(s)}$，$0\leqslant s\leqslant t_i$。令$\underline{U}(i)=\prod_{0\leqslant s\leqslant t_i}u_{i(s)}$，那么$x\in X(\underline{U}(i))$，则$D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)\subseteq X(\underline{U}(i))$。所以

$$K_{\alpha,M,T}\subseteq\bigcup_i D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f)\subseteq\bigcup_i X(\underline{U}(i))。$$

因此，把这些链$\underline{U}_i$放在一起组成链族$\Gamma=\{\underline{U}_i\}$，则$\Gamma$是$K_{\alpha,M,N}$的一个覆盖。对任意$i$和$t_i\geqslant t>T$，由于$x_i\in K_{\alpha,M,T}$，故

$$\exp((\alpha-\delta)t_i)\leqslant\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f))(x_i)\leqslant\exp((\alpha+\delta)t_i)。$$

当$q\geqslant0$时，

$$\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f))^{-q}(x_i)\geqslant\exp(-q(\alpha+\delta)t_i),$$

且对$r\geqslant q\alpha+q\delta+\lambda$，有

$$\sum_i\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f))^{-q}(x_i)\exp(-\lambda t_i)\geqslant\sum_i\exp(-q(\alpha+\delta)t_i)\exp(-\lambda t_i)=$$
$$\sum_i\exp(-r_i(q\alpha+q\delta+\lambda))\geqslant\sum_i\exp(-rt_i)=\sum_{\underline{U}(i)\in\Gamma_G}\exp(-t(\underline{U}(i))r)\geqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r,t)。$$

因为G是任意中心覆盖，故可得

$$M_{\tau}^{c}(K_{\alpha,M,T},q,\lambda,\varepsilon_M,t)\geqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r,t)。$$

若$q<0$，则

$$\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f))^{-q}(x_i)\geqslant\exp(-q(\alpha-\delta)t_i),$$

且对$r\geqslant q\alpha-q\delta+\lambda$，有

$$\sum_i\tau(D(x_i,t_i,\varepsilon_M,f))^{-q}(x_i)\exp(-\lambda t_i)\geqslant\sum_i\exp(-q(\alpha-\delta)t_i)\exp(-\lambda t_i)=$$
$$\sum_i\exp(-r_i(q\alpha-q\delta+\lambda))\geqslant\sum_i\exp(-rt_i)=\sum_{\underline{U}(i)\in\Gamma_G}\exp(-t(\underline{U}(i))r)\geqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r,t)。$$

由G的任意性得

$$M_{\tau}^{c}(K_{\alpha,M,T},q,\lambda,\varepsilon_M,t)\geqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r,t)。$$

令$t\to\infty$，引理5得证。

引理6 假设$\delta>0$和相应集合$K_{\alpha,M,T}$，U是X的一个有限开覆盖，且$\operatorname{diam}(U)<\frac{\varepsilon_M}{2}$，则对任意$r\leqslant q\alpha-|q|\delta+\lambda$，有$M_{\tau}^{c}(K_{\alpha,M,T},q,\lambda,\varepsilon_M)\leqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r)$。

证明 固定M,T。设$\phi\neq Z\subseteq K_{\alpha,M,T}$。考虑$X$的任一有限开覆盖$U$且$\operatorname{diam}(U)<\frac{\varepsilon_M}{2}$。选取任意$t>T$，设$\Gamma$是覆盖$Z$的任一链族且$t(\Gamma)=\inf_{\underline{U}\in\Gamma}t(\underline{U})\geqslant t>T$。不失一般性，假设对任意$\underline{U}\in\Gamma$，$X(\underline{U})\cap Z\neq\phi$。固定$\underline{U}\in\Gamma$，不妨设

$$\underline{U}=(U_1,U_2,\cdots,U_k,U_{2,2},\cdots,U_{k,k},\underbrace{U_{2,2,\cdots,2}}_{|\underline{U}|-1},\cdots,\underbrace{U_{k,k,\cdots,k}}_{|\underline{U}|-1})。$$

令$x(\underline{U})\in X(\underline{U})\cap Z$。因为$\operatorname{diam}U<\frac{1}{2}\varepsilon_M$，可得

$$X(\underline{U})\subseteq D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f)。$$

实际上，对任意 $y\in X(\underline{U})$，有 $f_s(y)\in u_{i(s)}$，$0\leqslant s\leqslant t(\underline{U})$。因为 $x(\underline{U})\in X(\underline{U})\cap Z$，所以 $f_s(x(\underline{U}))\in u_{i(s)}$，$0\leqslant s\leqslant t(\underline{U})$，可得对任意 $0\leqslant s\leqslant t(\underline{U})$，$d(f_s y,f_s(x(\underline{U})))\leqslant\frac{\varepsilon_M}{2}<\varepsilon_M$。因此 $y\in D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f)$，那么 $X(\underline{U})\subseteq D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f)$。其中，$\{D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f)\}$是 Z 的中心覆盖。因为 $t(\underline{U})>T$，$x(\underline{U})\in Z\subseteq K_{\alpha,M,T}$，所以

$$\exp((\alpha-\delta)t(\underline{U}))\leqslant\tau(D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f))(x(\underline{U}))\leqslant\exp((\alpha+\delta)t(\underline{U}))。$$

若 $q\geqslant 0$ 且 $r\leqslant q\alpha-q\delta+\lambda$，则

$$\begin{aligned}M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon_M,T)&\leqslant\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\tau(D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f))^{-q}(x(\underline{U}))\exp(-\lambda t(\underline{U}))\leqslant\\&\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-q(\alpha-\delta)t(\underline{U}))\exp(-\lambda t(\underline{U}))=\\&\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-t(\underline{U})(q\alpha-q\delta+\lambda))\geqslant\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-rt(\underline{U}))。\end{aligned}$$

若 $q<0$ 且 $r\leqslant q\alpha+q\delta+\lambda$，则

$$\begin{aligned}M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon_M,T)&\leqslant\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\tau(D(x(\underline{U}),t(\underline{U}),\varepsilon_M,f))^{-q}(x(\underline{U}))\exp(-\lambda t(\underline{U}))\leqslant\\&\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-q(\alpha+\delta)t(\underline{U}))\exp(-\lambda t(\underline{U}))=\\&\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-t(\underline{U})(q\alpha+q\delta+\lambda))\geqslant\sum_{\underline{U}\in\Gamma}\exp(-rt(\underline{U}))。\end{aligned}$$

由于 Γ 是覆盖 Z 的任一链长至少为 t 的覆盖，所以对任意 $r\leqslant q\alpha-|q|\delta+\lambda$，有

$$M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon_M,t)\leqslant M(Z,U,r,t)。$$

由此可得 $M_\tau^c(Z,q,\lambda,\varepsilon_M)\leqslant M(Z,U,r)\leqslant M(K_{\alpha,M,T},U,r)$。引理 6 得证。

定理 1　对任意 $\alpha,q\in\mathbf{R}$，有 $h_{\text{top}}(f,K_\alpha)=q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)$。

证明　第 1 步，证明 $h_{\text{top}}(f,K_\alpha)\leqslant q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)$。如果 $K_\alpha=\phi$，那么不等式两边都等于$-\infty$，显然成立。假设 $K_\alpha\neq\phi$，则存在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 和 $q\in\mathbf{R}$ 满足

$$\gamma=\frac{1}{4}(h_{\text{top}}(f,K_\alpha)-q\alpha-h_\tau(f,q,K_\alpha))>0。$$

因为 $h_{\text{top}}(f,K_\alpha)=\lim\limits_{\text{diam}(U)\to 0}h(K_\alpha,U)$存在有限开覆盖 U 使得

$$h(K_\alpha,U)>q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)+3\gamma。$$

当 $q=0$ 时，取任意 $\delta>0$。若$|q|>0$，令 $\delta=\frac{\gamma}{2|q|}$，由集合 $K_{\alpha,M,T}$的定义，选取充分大的 M、T 使得如下不等式成立：

$$\begin{cases}h(K_{\alpha,M,T},U)>q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)+2\gamma,\\ \frac{1}{2}\delta(U)>\varepsilon_M,\\ h_\tau(f,q,K_\alpha)+\frac{\gamma}{2}>h_\tau(f,q,K_\alpha,\varepsilon_M)。\end{cases}\tag{1}$$

由 $h(K_{\alpha,M,T},U)$的定义及不等式组(1)得

$$M(K_{\alpha,M,T},U,q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)+2\gamma)=+\infty。$$

令

$$r=q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)+2\gamma,\lambda=-|q|\delta+h_\tau(f,q,K_\alpha)+\gamma。$$

由引理 5 得

$$M_\tau(K_{\alpha,M,T},q,h_\tau(f,q,K_\alpha)+\gamma-|q|\delta,\varepsilon_M)=+\infty。\tag{2}$$

事实上

$$h_\tau(f,q,K_\alpha)+\gamma-|q|\delta=h_\tau(f,q,K_\alpha)+\gamma-\frac{\gamma}{2}>h_\tau(f,q,K_\alpha,\varepsilon_M)>h_\tau(f,q,K_{\alpha,M,T},\varepsilon_M)。$$

由引理 3 得 $M_\tau(K_{\alpha,M,T},q,h_\tau(f,q,K_\alpha)+\gamma-|q|\delta,\varepsilon_M)=0$。这与式 (2) 矛盾。

第 2 步，证明 $h_{\text{top}}(f,K_\alpha)\geqslant q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)$。若 $K_\alpha=\phi$，不等式两边都等于∞，显然成立。假设 $K_\alpha\neq\phi$。存在 $\alpha\in\mathbf{R}$ 和 $q\in\mathbf{R}$ 满足

$$\gamma=\frac{1}{4}(h_\tau(f,q,K_\alpha)+q\alpha-h_{\text{top}}(f,K_\alpha))>0。$$

由于 $h_{\text{top}}(f,K_\alpha)=\lim\limits_{\text{diam}(U)\to 0}h(K_\alpha,U)$和极限定义存在一个有限开覆 U，故 $h(K_\alpha,U)>q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)-3\gamma$ 且 $\text{diam}(U)<\frac{\varepsilon_M}{2}$；若 $q=0$，令 $\delta>0$；若$|q|>0$，令 $\delta=\frac{\gamma}{2|q|}$。考虑式(2)定义的集合 $K_{\alpha,M,T}$，选取充分大的 M、T 使得如下不等式成立：

$$\begin{cases}h(K_{\alpha,M,T},U)<q\alpha+h_\tau(f,q,K_\alpha)-2\gamma,\\ h_\tau(f,q,K_\alpha)-\frac{\gamma}{2}<h_\tau(f,q,K_\alpha,\varepsilon_M)。\end{cases} \tag{3}$$

由 $h(K_{\alpha,M,T},U)$的定义及不等式组(3)得

$$M(K_{\alpha,M,T},U,q\alpha+h_\tau(f,q,k_\alpha)-2\gamma)=0。$$

令

$$r=q\alpha+h_\tau(f,q,k_\alpha)-2\gamma,\lambda=h_\tau(f,q,k_\alpha)-2\gamma+|q|\delta,$$

由引理 6 得

$$M_\tau(K_{\alpha,M,T},q,h_\tau(f,q,K_\alpha)-2\gamma+|q|\delta,\varepsilon_M)=0。 \tag{4}$$

对于充分大的 M、T 有

$$h_\tau(f,q,K_\alpha)-\gamma+|q|\delta=h_\tau(f,q,K_\alpha)-\gamma+\frac{\gamma}{2}<h_\tau(f,q,K_\alpha,\varepsilon_M)\leqslant h_\tau(f,q,K_{\alpha,M,T},\varepsilon_M)+\gamma,$$

所以

$$h_\tau(f,q,K_\alpha)-2\gamma+|q|\delta<h_\tau(f,q,K_{\alpha,M,T},\varepsilon_M)。$$

由引理 3 可知

$$M_\tau(K_{\alpha,M,T},q,h_\tau(f,q,k_\alpha)-2\gamma+|q|\delta,\varepsilon_M)=+\infty,$$

这与式 (4) 矛盾。

由以上两个步骤可知定理 1 成立。

3 结论

考虑到流和连续性在动力系统的广泛应用，本文先定义了一般条件下半流的局部熵，再构造水平集 K_α 上拓扑熵，并讨论了该熵与(q,τ)-熵的关系。水平集的构造是研究此类问题的核心工作，在构造的方法上本文仍需努力，主要对前期工作的简单修改和局部替换。后期的工作可以沿着本文的思路，考虑水平集的构造方法的突破，也可以将现在的成果推广至流上。

参考文献：

[1] KOLMOGOROV N. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces[J]. Doklady akademii nauk SSSR，1958，119(5)：861-864.

[2] BOWEN R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society，1971，153：401-414.

[3] THOMAS R F. Entropy of expansive flows[J]. Ergodic theory dynamical systems，1987，7(4)：611-625.

[4] SUN W，VARGAS E. Entropy of flows revisited[J]. Boletim da sociedade brasileira de matematica，1999，30(3)：315-333.

[5] SUN W. Measure-theoretic entropy for flows[J]. Science in China series A：mathematics，1997，40(7)：725-731.

[6] THOMAS R. Topological entropy of fixed points free flows[J]. Transactions of the American Mathematical Society，1990，319：601-618.

[7] SUN W. Entropy of orthonormal n-frame flows[J]. Nonlinearity，2001，14(4)：829-842.

[8] SHEN J，ZHAO Y. Entropy of a flow on non-compact sets[J]. Open systems & information dynamics，2012，19(2). DOI：10.1142/S1230161212500151.

[9] PESIN Y B. Dimension theory in dynamical systems：contemporary views and applications[M]. Chicago：University of Chicago Press，1997.

[10] YAN Z Z，CHEN E C. Upper estimates on the higher-dimensional multifractal spectrum of local entropy[J]. Northeast mathematical journal，2002，24(6)：471-484.

[11] 王威，曹洁. Amenable 群作用下的局部熵的重分形分析[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2022，46(1)：15-22.

[12] 王威，高晓燕，吴晶晶. 回归时间的半群作用的局部熵的重分形分析[J]. 广西大学学报(自然科学版)，2022，47(2)：557-563.

Multifractal analysis of semi-flow local entropy in reccurence time

WANG Wei[1]，ZHANG Xinyuan[2]，HUANG Ping[3]

(1. *School of General Education*，*Nantong Institute of Technology*，*Nantong* 226002，*China*；
2. *School of Mathematics and Statistics*，*Anhui Normal University*，*Wuhu* 241000，*China*；
3. *College of Mathematical and Physical Sciences*，*Taizhou University*，*Taizhou* 225300，*China*)

Abstract：To enrich the research on Carathéodory-related theories，a semiflow entropy and multifractal spectrum over Poincaré recurrence times have been established. The study results have derived an exact formula for the multifractal spectrum of local entropy of the semiflow concerning recurrence time.

Keywords：entropy；semi-flow；multifractal analysis；Poincaré reccurence；Hausdorff dimension

(责任编辑：贾晶晶)

引用格式　王威，张昕源，黄萍. 回归时间上的半流局部熵的重分形分析[J]. 山东航空学院学报，2025，42(4)：88-95.
WANG W，ZHANG X Y，HUANG P. Multifractal analysis of semi-flow local entropy in reccurence time[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2025，42(4)：88-95.