【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

伪概反周期函数及其在一类 BAM 神经网络中的应用

赵莉莉

（云南大学 数学与统计学院，云南 昆明 650091）

摘　要：探讨一类具有分布时滞的 BAM 神经网络伪概反周期解的存在性与唯一性。首先，仿照概反周期函数的概念，提出伪概反周期函数的定义。其次，讨论了伪概反周期函数的相关性质，证明了全体伪概反周期函数构成的集合是概周期函数空间的一个闭集。最后，利用不动点定理证明 BAM 神经网络存在唯一的有界解，而且该解函数是伪概反周期函数。相较于伪概周期函数，伪概反周期函数是一类更加“精细”的函数，对神经网络伪概反周期解的存在性和唯一性的探讨，能够更加精确地描述神经网络的动力学性质，进一步补充完善现有结论。

关键词：概周期解；伪概周期解；伪概反周期解；神经网络；时滞

中图分类号：O 175　　**文献标识码：**A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.013

0　引言

BAM 神经网络[1]及其推广模型[2-4]都是由 Kosko 首次提出的，这种能够实现网络状态在两层神经元之间来回传递的神经网络吸引了越来越多学者的关注。对 BAM 神经网络的研究不仅取得了理论上的多个突破，也拓宽了 BAM 神经网络的应用空间。文献[5]研究了具多比例时滞的 BAM 神经网络的各种稳定性。文献[6]利用压缩映射原理得到一类具时变无界时滞的模糊惯性 BAM 神经网络平衡点存在的唯一性，并通过设计 Lyapunov 函数以及反馈控制器，采用非降阶法得到该类神经网络固定时间同步判定准则，使得 BAM 神经网络的工作准则更加清晰。文献[7]将 BAM 神经网络扩展到了四元数域，提出了一类四元数 BAM 神经网络，并利用四元数的分解以及微分包含理论，探讨了四元数 BAM 神经网络固定时间同步问题。文献[8]利用微分方程的稳定性理论以及分支理论，探讨了具双时滞的分数阶 BAM 神经网络模型稳定性以及产生 Hopf 分支的充分条件。作为文献[6]的进一步拓展，文献[9]借助有限时间稳定性定理，利用微分不等式技巧，得到了一类具时滞的一般 BAM 神经网络有限时间反同步的判定准则。文献[10]的研究表明，BAM 神经网络可以通过噪声改善数字通信系统的可靠性，扩大了 BAM 神经网络的应用空间。文献[11]将 BAM 神经网络应用于随机系统，通过设计反馈控制器以及构造合适的 Lyapunov 函数，得到了一类具时滞的模糊随机 BAM 神经网络达到固定时间同步的判定准则。文献[12]研究了一类具时变时滞的 Markovian 忆阻二阶 BAM 神经网络，其作者放弃了传统的降阶法，利用 Lyapunov 函数法以及微分不等式技巧，直接从神经网络自身出发，考虑非脆弱指数状态估计，得到了估计

收稿日期：2024-07-15

基金项目：云南省教育厅自然科学基金项目（2020J0020）；云南大学教育教学改革研究项目（2023Y22）

作者简介：赵莉莉（1979—　），女，白族，云南大理人，讲师，博士，硕士生导师，主要从事非线性微分方程研究。
E-mail：llzhao@ynu.edu.cn

器存在的判定准则。在上述文献中，学者们都致力于研究 BAM 神经网络的各种稳定性以及同步性，很少探讨 BAM 神经网络的各类概周期型解，尤其是各类概反周期型解的存在性与唯一性。然而，相较于稳定性与同步性，神经网络各类概周期型解以及各类概反周期型解的存在性与唯一性，能够更加精确地描述神经网络的动力学性质，也能更加准确地揭示客观世界中的概周期型现象与概反周期型现象。

概周期函数是一种几乎周期函数。在自然界中，相较于周期现象，概周期现象是频繁的、经常发生的，故概周期函数更加符合客观实际。文献[13]提出的概反周期函数与概周期函数的关系，类似于周期函数与反周期函数的关系。伪概周期函数是概周期函数概念的进一步推广，其概念见文献[14-15]。类似于从概周期函数到概反周期函数概念的推广，可以相应地得到伪概反周期函数的概念，但包含伪概反周期函数的集合尚无相应的线性空间结构，故探讨微分系统伪概反周期解的存在性颇有意义。

基于以上原因，探讨 BAM 神经网络

$$\begin{cases} x_i'(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{m_1} a_{ij}(t) f_j(y_j'(t-\tau_{ij})) + \sum_{j=1}^{m_1} \alpha_{ij}(t)\int_0^{+\infty} \beta_{ij}(\theta) h_j(y_j(t-\theta))\mathrm{d}\theta + I_i(t), \\ y_j'(t) = -d_j(t)y_j(t) + \sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}(t) g_i(x_i'(t-\omega_{ji})) + \sum_{i=1}^{n_1} l_{ji}(t)\int_0^{+\infty} v_{ji}(\theta)\eta_i(x_i(t-\theta))\mathrm{d}\theta + J_j(t) \end{cases} \tag{1}$$

的伪概反周期解的存在性。式中：$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$；$x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别表示两层神经元在 t 时刻的状态；a_{ij}、α_{ij}、b_{ji}、l_{ji} 是神经网络的连接权重函数；f_j、h_j、g_i、η_i 为活动函数，又称激活函数；$\tau_{ij}\geqslant 0$ 和 $\omega_{ji}\geqslant 0$ 分别表示两层神经元在符号传输过程中所产生的离散时滞；β_{ij} 和 v_{ji} 表示两层神经元的时滞核函数；$I_i(t)$ 和 $J_j(t)$ 分别表示两层神经元在 t 时刻的外部输入。系统(1)的初值为

$$x_i(s)=\varphi_i(s),\ y_j(s)=\psi_j(s),\ x_i'(s)=\varphi_i'(s),\ y_j'(s)=\psi_j'(s),\ s\in(-\infty,0],\ i=1,2,\cdots,n_1,\ j=1,2,\cdots,m_1,$$

其中，$\varphi_i(\cdot)$ 和 $\psi_j(\cdot)$ 表示定义在 $(-\infty,0]$ 上的有界实值且可微的函数，而且 $\varphi_i'(\cdot)$ 和 $\psi_j'(\cdot)$ 也是 $(-\infty,0]$ 上的有界函数。

1　伪概反周期函数定义的提出与讨论

下文中 $(X,||\cdot||)$ 总表示一个 Banach 空间。

定义 1[13]　如果 $f\in C(\mathbf{R},X)$ 的 ε-移位数集

$$ANE(f,\varepsilon)=\{\tau\in\mathbf{R}:\|f(t+\tau)+f(t)\|<\varepsilon,\forall t\in\mathbf{R}\}$$

在实数集 $\mathbf{R}$ 上稠密，即任给 $\varepsilon>0$，总存在正常数 $l(\varepsilon)$ 使得实数集上每一个以 $l(\varepsilon)$ 为长度的区间与 $ANE(f,\varepsilon)$ 的交集是非空的，则称 f 是一个概反周期函数。

定义于实数集，取值于 X 的全体概反周期函数构成的集合，用 $AANP(\mathbf{R},X)$ 表示。

定义 2　函数 $f\in C(\mathbf{R},X)$ 称为伪概反周期是指 f 可以表示为 $f=g+h$。其中，$g\in AANP(\mathbf{R},X)$，$h\in PAP_0(\mathbf{R},X)$，$PAP_0(\mathbf{R},X)$ 定义为

$$PAP_0(\mathbf{R},X)=\{h\in BC(\mathbf{R},X):\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|h(t)\|\mathrm{d}t=0\}。$$

用 $PAANP(\mathbf{R},X)$ 表示全体定义于 $\mathbf{R}$，取值于 X 的伪概反周期函数构成的集合。

注 1　由定义 1 与定义 2 可得，每一个伪概反周期函数都是伪概周期函数，但并非每一个伪概周期函数都是伪概反周期函数，例如 $f(t)=\sin^2 t+\dfrac{1}{1+t^2}$ 是一个伪概周期函数，但并非伪概反周期函数。

定理 1　若

$$f=g+h\in PAANP(\mathbf{R},X),$$

则 $(-g)(\mathbf{R})\subset\overline{f(\mathbf{R})}$，且 $\|g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$。其中 $g\in AANP(\mathbf{R},X)$，$h\in PAP_0(\mathbf{R},X)$。

证明　若 $(-g)(\mathbf{R})\subset\overline{f(\mathbf{R})}$ 不成立，则存在 $t_0\in\mathbf{R}$ 以及 $\varepsilon_0>0$，使得

$$\inf_{s\in\mathbf{R}}\|g(t_0)+f(s)\|>\varepsilon_0。$$

因为 g 是连续函数，所以对于 $\varepsilon_0>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|t_1-t_0|<\delta$ 时，有

$$\|g(t_1)-g(t_0)\|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

由 $g(u)$ 的概反周期性知，对于 $\varepsilon_0>0$，必定存在 $l_{\frac{\varepsilon_0}{4}}>0$ 使得实数集上每一个长度为 $l_{\frac{\varepsilon_0}{4}}$ 的区间中，都存在且至少存在一点 τ，满足如下性质

$$\|g(t_1+\tau)+g(t_1)\|<\frac{\varepsilon_0}{4},\ \forall\, t_1\in(t_0-\delta,t_0+\delta)。$$

故

$$\|h(t_1+\tau)\|=\|f(t_1+\tau)-g(t_1+\tau)\|=$$
$$\|f(t_1+\tau)+g(t_0)-g(t_0)+g(t_1)-g(t_1)-g(t_1+\tau)\|\geqslant$$
$$\|f(t_1+\tau)+g(t_0)\|-\|g(t_0)-g(t_1)\|-\|g(t_1)+g(t_1+\tau)\|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}。$$

即，函数 h 映射有界集 $(t_0+\tau-\delta,t_0+\tau+\delta)$ 到无界集 $(-\infty,-\frac{\varepsilon_0}{4}]\cup[\frac{\varepsilon_0}{4},+\infty)$，这与 h 是连续函数矛盾，故 $(-g)(\mathbf{R})\subset\overline{f(\mathbf{R})}$。如果 $\|f\|_\infty<\|g\|_\infty$，任取 $t\in\mathbf{R}$，对于

$$\varepsilon_1=\frac{\|g\|_\infty-\|f\|_\infty}{2}$$

存在 $t_2\in\mathbf{R}$ 使得 $\|g(t)+f(t_2)\|<\varepsilon_1$，且

$$\|g(t)\|-\frac{\|g\|_\infty-\|f\|_\infty}{2}\leqslant\|g(t)\|-\|g(t)+f(t_2)\|<\|f(t_2)\|,$$

那么

$$\|f\|_\infty<\frac{\|g\|_\infty+\|f\|_\infty}{2}\leqslant\|f(t_2)\|,$$

矛盾，从而定理1得证。

定理2　如果 $\{x_n\}\subset PAANP(\mathbf{R},X)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(t)-x(t)\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in\mathbf{R}}\|x_n(t)-x(t)\|=0,$$

那么 $x(t)\in PAANP(\mathbf{R},X)$。

证明　对于每一个 $n\in\mathbf{Z}^+$，因为 $x_n\in PAANP(\mathbf{R},X)$，所以每一个 $x_n(t)$ 都可以分解为

$$x_n(t)=y_n(t)+z_n(t)。$$

其中，$y_n\in AANP(\mathbf{R},X)$，$z_n\in PAP_0(\mathbf{R},X)$。由定理1知 $\|y_n\|_\infty\leqslant\|x_n\|_\infty$，考虑到

$$y_n-y_m\in AANP(\mathbf{R},X),\ x_n-x_m\in PAANP(\mathbf{R},X),$$

故

$$\|y_n-y_m\|_\infty\leqslant\|x_n-x_m\|_\infty。$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_\infty=0$ 可得 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列。从而，当 $n,m\to\infty$ 时，$\|y_n-y_m\|_\infty\to0$，即 $\{y_n\}$ 也是一个柯西序列。又因为 $(AANP(\mathbf{R},X),\|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间，所以存在 $y\in AANP(\mathbf{R},X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|_\infty=0。$$

令 $z=x-y$。则

$$\|z_n-z\|_\infty=\|x_n-y_n-(x-y)\|_\infty\leqslant\|x_n-x\|_\infty+\|y_n-y\|_\infty\to0(n\to\infty)。$$

因为 $(C(\mathbf{R},X),\|\cdot\|_\infty)$ 也是一个 Banach 空间，所以 $z\in C(\mathbf{R},X)$。因为

$$\|z(t)\|=\|z(t)-z_n(t)+z_n(t)\|\leqslant\|z(t)-z_n(t)\|+\|z_n(t)\|\leqslant$$
$$\|z-z_n\|_\infty+\|z_n(t)\|,$$

所以

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|z(t)\|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|z-z_n\|_\infty\mathrm{d}t+\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|z_n(t)\|\mathrm{d}t。$$

在上式中，令 $r\to\infty$，可得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|z(t)\|\mathrm{d}t\leqslant\|z-z_n\|_\infty,$$

令 $n\to\infty$，可得

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|z(t)\|\mathrm{d}t=0。$$

即 $z\in PAP_0(\mathbf{R},X)$，也就是 $x\in PAANP(\mathbf{R},X)$。

2　关于 BAM 神经网络伪概反周期解存在性的探讨

在本小节中，需做如下假设：

（H1）$c_i,d_j,a_{ij},\alpha_{ij},b_{ji},l_{ji}\in AP(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$I_i,J_j\in PAANP(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且

$$\inf_{t\in\mathbf{R}}c_i(t)>0,\inf_{t\in\mathbf{R}}d_j(t)>0,i=1,2,\cdots,n_1,j=1,2,\cdots,m_1。$$

（H2）f_j、h_j、g_i、η_i 都满足利普希茨条件，它们的利普希茨常数分别用 L_{f_j}、L_{h_j}、L_{g_i}、L_{η_i} 表示，且

$$f_j(0)=h_j(0)=g_i(0)=\eta_i(0)=0。$$

其中，$i=1,2,\cdots,n_1;j=1,2,\cdots,m_1$。

（H3）全体时滞核函数 $\beta_{ij},v_{ji}:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 都是连续函数，且它们都是可积的，且满足

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}|\beta_{ij}(s)|\mathrm{d}s\leqslant\beta_{ij}^M,0\leqslant\int_0^{+\infty}|v_{ji}(s)|\mathrm{d}s\leqslant v_{ji}^M。$$

其中，$i=1,2,\cdots,n_1;j=1,2,\cdots,m_1$。

引理 1[16]　设 f 是实变量的、满足利普希茨条件的实值函数，φ 是定义在实数集上的实值连续有界函数，则 Γ 也是实值的连续有界函数，其中 Γ 的定义为 $\Gamma:t\to f(\varphi(t-\tau))$。

引理 2[16]　设 f 是实变量的、满足利普希茨条件的实值函数，$k:[0,+\infty)$ 是一个可积的连续函数，且满足

$$0\leqslant\int_0^{+\infty}|k(u)|\mathrm{d}u\leqslant\bar{k},$$

其中，$\bar{k}>0$ 是一个常数，φ 是定义在实数集上的实值连续有界函数，则 Π 也是实值的连续有界函数，其中 Π 的定义为

$$\Pi:t\to\int_0^{+\infty}k(u)f(\varphi(t-u))\mathrm{d}u。$$

利用文献[16]引理 3 的证明方法，也可以证明如下引理。

引理 3　假设条件（H1）～（H3）成立，对于每一个

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n_1},\psi_1,\cdots,\psi_{m_1})^{\mathrm{T}}\in PAANP^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1})$$

定义一个非线性算子

$$T_{\boldsymbol{\varphi}}(t)=(x_{\varphi_1}(t),\cdots,x_{\varphi_{n_1}}(t),y_{\psi_1}(t),\cdots,y_{\psi_{m_1}}(t))^{\mathrm{T}},$$

其中，

$$x_{\varphi_i}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}F_i(s)\mathrm{d}s,\ y_{\psi_j}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}F_{n_1+j}(s)\mathrm{d}s,$$

$$F_i(s)=\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)f_j(\psi_j'(s-\tau_{ij}))+\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(u)h_j(\psi_j(s-u))\mathrm{d}u+I_i(s),i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$F_{n_1+j}(s)=\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)g_i(\varphi_i'(s-\omega_{ji}))+\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(u)\eta_i(\varphi_i(s-u))\mathrm{d}u+J_j(s),j=1,2,\cdots,m_1,$$

则 T 是 $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 上的一个自反映射。

为了后续讨论方便，采用如下记号：

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t)=(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_1(u)\mathrm{d}u}I_1(s)\mathrm{d}s,\cdots,\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_{n_1}(u)\mathrm{d}u}I_{n_1}(s)\mathrm{d}s,\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t d_1(u)\mathrm{d}u}J_1(s)\mathrm{d}s,\cdots,\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t d_{m_1}(u)\mathrm{d}u}J_{m_1}(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}},$$

$$\underline{c_i}=\inf_{t\in\mathbf{R}}c_i(t),\overline{c_i}=\sup_{t\in\mathbf{R}}c_i(t),\underline{d_j}=\inf_{t\in\mathbf{R}}d_j(t),\overline{d_j}=\sup_{t\in\mathbf{R}}d_j(t),\overline{I_i}(t)=\sup_{t\in\mathbf{R}}|I_i(t)|,$$

$$\overline{J_j}(t)=\sup_{t\in\mathbf{R}}|J_j(t)|,\overline{a_{ij}}=\sup_{t\in\mathbf{R}}|a_{ij}(t)|,\overline{\alpha_{ij}}=\sup_{t\in\mathbf{R}}|\alpha_{ij}(t)|,\overline{b_{ji}}=\sup_{t\in\mathbf{R}}|b_{ji}(t)|,\overline{l_{ji}}=\sup_{t\in\mathbf{R}}|l_{ji}(t)|,$$

$$A=\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\frac{\overline{I_i}}{\underline{c_i}}\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\frac{\overline{J_j}}{\underline{d_j}}\},\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\overline{I_i}+\overline{c_i}\frac{\overline{I_i}}{\underline{c_i}}\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\overline{J_j}+\overline{d_j}\frac{\overline{J_j}}{\underline{d_j}}\}\}。$$

定理 3 假设条件(H1)～(H3)成立，且

$$\xi=\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\frac{1}{\underline{c_i}},1+\frac{\overline{c_i}}{\underline{c_i}}\}\times[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^ML_{h_j})],$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\frac{1}{\underline{d_j}},1+\frac{\overline{d_j}}{\underline{d_j}}\}\times[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^ML_{\eta_i})]\}<1,$$

其中，每一个$\underline{c_i}$、$\underline{d_j}$均是正常数，则 BAM 神经网络(1)在集合

$$E=\{\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}\in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1}),\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty^1\leqslant\frac{A\xi}{1-\xi}\}$$

中存在唯一可微的伪概反周期解。

证明 根据引理 3，$T(\boldsymbol{\varphi})\in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1})$。由 $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1})$的定义，有

$$\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty^1=\max\{\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty,\|\boldsymbol{\varphi}_0'\|\}=\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i(s)\mathrm{d}s|,$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t b_j(u)\mathrm{d}u}J_j(s)\mathrm{d}s|,\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}|I_i(t)-\int_{-\infty}^t c_i(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i(s)\mathrm{d}s|,$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}|J_j(t)-\int_{-\infty}^t d_j(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}J_j(s)\mathrm{d}s|\}\leqslant$$

$$\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\frac{\overline{I_i}}{\underline{c_i}}\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\frac{\overline{J_j}}{\underline{d_j}}\},\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\overline{I_i}+\overline{c_i}\frac{\overline{I_i}}{\underline{c_i}}\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\overline{J_j}+\overline{d_j}\frac{\overline{J_j}}{\underline{d_j}}\}\}=A。\tag{2}$$

所以，由每一个

$$\boldsymbol{\varphi}\in E=\{\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{\varphi}\in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1}),\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty^1\leqslant\frac{A\xi}{1-\xi}\}$$

都可得

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1\leqslant\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty^1+\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty^1\leqslant\frac{A\xi}{1-\xi}+A=\frac{A}{1-\xi}。\tag{3}$$

接下来，证明 T 是 $BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1})$的闭子集 E 上的一个自反映射。事实上，对每一个 $\boldsymbol{\varphi}\in E$，由条件(H2)(H3)可得

$$\|T\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0\|_\infty=\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)f_j(\psi_j'(s-\tau_{ij}))+$$

$$\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)h_j(\psi_j(s-\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|,\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)g_i(\varphi'_i(s-\omega_{ji}))+$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)\eta_i(\varphi_i(s-\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\}\leqslant$$

$$\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}|a_{ij}(s)|\times(|f_j(\psi_j'(s-\tau_{ij}))-f_j(0)|+|f_j(0)|)+$$

$$\sum_{j=1}^{m_1}|\alpha_{ij}(s)|\int_0^{+\infty}|\beta_{ij}(\theta)|(|h_j(\psi_j(s-\theta))-h_j(0)|+|h_j(0)|)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s\},$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}|b_{ji}(s)(|g_i(\varphi_i'(s-\omega_{ji}))-g_i(0)|+|g_i(0)|)+$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}|l_{ji}(s)|\int_0^{+\infty}|v_{ji}(\theta)|(|\eta_i(\varphi_i(s-\theta))-\eta_i(0)|+|\eta_i(0)|)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s\}\}\leqslant$$

$$\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}|a_{ij}(s)|\times(L_{f_j}|\psi_j'(s-\tau_{ij})|+|f_j(0)|)+$$

$$\sum_{j=1}^{m_1}|\alpha_{ij}(s)|\int_0^{+\infty}|\beta_{ij}(\theta)|(L_{h_j}|\psi_j(s-\theta)|+|h_j(0)|)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s\},$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}|b_{ji}(s)|\times(L_{g_i}|\varphi_i'(s-\omega_{ji})|+|g_i(0)|)+$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}|l_{ji}(s)|\int_0^{+\infty}|v_{ji}(\theta)|\times(L_{\eta_i}|\varphi_i(s-\theta)|+|\eta_i(0)|)\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s\}\}\leqslant$$

$$\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}(t-s)}\times[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1]\mathrm{d}s\},$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\underline{d_j}(t-s)}[(\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})\times\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1]\mathrm{d}s\}\}=$$

$$\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\frac{1}{\underline{c_i}}[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})],\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\frac{1}{\underline{d_j}}[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})]\}\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1。\tag{4}$$

$$\|(T(\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{\varphi}_0)'\|_\infty=\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{|\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(t)f_j(\psi'_j(t-\tau_{ij}))+\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(t)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)h_j(\psi_j(t-\theta))\mathrm{d}\theta-$$

$$\int_{-\infty}^{t}c_i(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)f_j(\psi'_j(s-\tau_{ij}))+\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)h_j(\psi_j(s-\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\},$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{|\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(t)g_i(\varphi'_i(t-\omega_{ji}))+\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(t)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)\eta_i(\varphi_i(t-\theta))\mathrm{d}\theta-$$

$$\int_{-\infty}^{t}d_j(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)g_i(\varphi'_i(s-\omega_{ji}))+\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)\eta_i(\varphi_i(s-\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\}\}\leqslant$$

$$\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1+$$

$$\int_{-\infty}^{t}\overline{c_i}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}(t-s)}[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1]\mathrm{d}s\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1+$$

$$\int_{-\infty}^{t}\overline{d_j}\mathrm{e}^{-\underline{d_j}(t-s)}[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ij}^M L_{\eta_i})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1]\mathrm{d}s\}\}\leqslant$$

$$\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}(1+\frac{\overline{c_i}}{\underline{c_i}})\times[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1],$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}(1+\frac{\overline{d_j}}{\underline{d_j}})[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1]\}。\tag{5}$$

所以,通过式(2)～(5)可得不等式

$$\| T(\boldsymbol{\varphi})-\boldsymbol{\varphi}_0 \|_\infty^1 = \max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\frac{1}{\underline{c_i}},1+\frac{\overline{c_i}}{\underline{c_i}}\}[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})],\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\frac{1}{\underline{d_j}},1+\frac{\overline{d_j}}{\underline{d_j}}\}\times$$

$$[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})]\}\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1\leqslant\xi\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty^1\leqslant\frac{A\xi}{1-\xi},$$

即 $T(\boldsymbol{\varphi})\in E$，$T$ 将 E 映射到它的本身。最后，再证明映射 T 是压缩的。由条件(H2)，对于每一个

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n_1},\psi_1,\cdots,\psi_{m_1})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Phi}=(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n_1},\Psi_1,\cdots,\Psi_{m_1})^{\mathrm{T}}\in E,$$

都可得

$$\begin{aligned}
&\| T(\boldsymbol{\varphi})-T(\boldsymbol{\Phi}) \|_\infty = \max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)(f_j(\psi_j'(s-\tau_{ij}))-f_j(\Psi_j'(s-\tau_{ij})))+\\
&\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)(h_j(\psi_j(s-\theta))-h_j(\Psi_j(s-\theta)))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\},\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)(g_i(\varphi_i'(s-\omega_{ji}))-g_i(\Phi_i'(s-\omega_{ji})))+\\
&\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)(\eta_i(\varphi_i(s-\theta))-\eta_i(\Phi_i(s-\theta)))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\}\}\leqslant\\
&\max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}\overline{a_{ij}}L_{f_j}\|(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi})'\|_\infty+\sum_{j=1}^{m_1}\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j}\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty]\mathrm{d}s\},\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}\overline{b_{ji}}L_{g_i}\|(\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi})'\|_\infty+\sum_{i=1}^{n_1}\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i}\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty]\mathrm{d}s\}\}\leqslant\\
&\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{\frac{1}{\underline{c_i}}[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})]\},\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{\frac{1}{\underline{d_j}}[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})]\}\}\times\\
&\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty^1\leqslant\xi\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty^1。
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|(T(\boldsymbol{\varphi})-T(\boldsymbol{\Phi}))'\|_\infty = \max\{\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}\{|\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(t)[f_j(\psi_j'(t-\tau_{ij}))-f_j(\Psi_j'(t-\tau_{ij}))+\\
&\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(t)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)[h_j(\psi_j(t-\theta))-h_j(\Psi_j(t-\theta))]\mathrm{d}\theta-\\
&\int_{-\infty}^t c_i(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}[\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)[f_j(\psi_j'(s-\tau_{ij}))-f_j(\Psi_j'(s-\tau_{ij}))]+\\
&\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)[h_j(\psi_j(s-\theta))-h_j(\Psi_j(s-\theta))]\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\},\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}\{|\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(t)[g_i(\varphi_i'(t-\omega_{ji}))-g_i(\Phi_i'(t-\omega_{ji}))]+\\
&\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(t)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)[\eta_i(\varphi_i(t-\theta))-\eta_i(\Phi_i(t-\theta))]\mathrm{d}\theta-\\
&\int_{-\infty}^t d_j(t)\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}[\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)[g_i(\varphi_i'(s-\omega_{ji}))-g_i(\Phi_i'(s-\omega_{ji}))]+\\
&\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(\theta)[\eta_i(\varphi_i(s-\theta))-\eta_i(\Phi_i(s-\theta))]\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s|\}\}\leqslant\\
&\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n_1}(1+\frac{\overline{c_i}}{\underline{c_i}})[\sum_{j=1}^{m_1}(\overline{a_{ij}}L_{f_j}+\overline{\alpha_{ij}}\beta_{ij}^M L_{h_j})],\max_{1\leqslant j\leqslant m_1}(1+\frac{\overline{d_j}}{\underline{d_j}})[\sum_{i=1}^{n_1}(\overline{b_{ji}}L_{g_i}+\overline{l_{ji}}v_{ji}^M L_{\eta_i})]\}\times\\
&\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty^1\leqslant\xi\|\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi}\|_\infty^1。
\end{aligned}$$

从而

$$\| T(\boldsymbol{\varphi})-T(\boldsymbol{\Phi}) \|_{\infty}^{1} \leqslant \xi \| \boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\Phi} \|_{\infty}^{1}。$$

由 $\xi<1$ 得映射 T 是压缩的。由不动点定理知，在 E 中存在唯一的不动点 υ 使得 $T\upsilon=\upsilon$，即 BAM 神经网络(1)在 E 中存在唯一有界的连续解。接下来，再证明该解函数是伪概反周期函数。

将映射 T 的不动点记为 $\upsilon=(\upsilon_1(t),\cdots,\upsilon_{n_1}(t),\cdots,\upsilon_{n_1+m_1}(t))^{\mathrm{T}}$，将

$$\upsilon_i(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}F_i(s)\mathrm{d}s,\upsilon_j(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}F_j(s)\mathrm{d}s$$

分别改写为

$$\upsilon_i(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-v}^t c_i(u)\mathrm{d}u}F_i(t-v)\mathrm{d}v,\upsilon_j(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-w}^t d_j(u)\mathrm{d}u}F_j(t-w)\mathrm{d}w。$$

其中，

$$F_i(s)=\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)f_j(\upsilon'_{n_1+j}(s-\tau_{ij}))+\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(u)h_j(\upsilon_{n_1+j}(s-u))\mathrm{d}u+I_i(s),i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$F_j(s)=\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)g_i(\upsilon'_i(s-\omega_{ji}))+\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(u)\eta_i(\upsilon_i(s-u))\mathrm{d}u+J_j(s),j=1,2,\cdots,m_1。$$

因为 $I_i,J_j\in PAANP(\mathbf{R},\mathbf{R})$，所以存在 $I_i^1,J_j^1\in AANP(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$I_i^2,J_j^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 使得

$$I_i=I_i^1+I_i^2,J_j=J_j^1+J_j^2。$$

相应地，记

$$F_i^1(s)=\sum_{j=1}^{m_1}a_{ij}(s)f_j(\upsilon'_{n_1+j}(s-\tau_{ij}))+\sum_{j=1}^{m_1}\alpha_{ij}(s)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(u)h_j(\upsilon_{n_1+j}(s-u))\mathrm{d}u+I_i^1(s),i=1,2,\cdots,n_1,$$

$$F_j^1(s)=\sum_{i=1}^{n_1}b_{ji}(s)g_i(\upsilon'_i(s-\omega_{ji}))+\sum_{i=1}^{n_1}l_{ji}(s)\int_0^{+\infty}v_{ji}(u)\eta_i(\upsilon_i(s-u))\mathrm{d}u+J_j^1(s),j=1,2,\cdots,m_1,$$

则

$$F_i(s)=F_i^1(s)+I_i^2(s),F_j(s)=F_j^1(s)+J_j^2(s)。$$

令

$$\upsilon_i^1(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-v}^t c_i(u)\mathrm{d}u}F_i^1(t-v)\mathrm{d}v,\upsilon_j^1(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-w}^t d_j(u)\mathrm{d}u}F_j^1(t-w)\mathrm{d}w,$$

$$\upsilon_i^2(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-v}^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i^2(t-v)\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i^2(s)\mathrm{d}s,$$

$$\upsilon_j^2(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_{t-w}^t d_j(u)\mathrm{d}u}J_j^2(t-w)\mathrm{d}w=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}J_j^2(s)\mathrm{d}s。$$

用与文献[16]定理 2 相同的证明方法，可得 $\upsilon_i^1,\upsilon_j^1\in AANP(\mathbf{R},\mathbf{R})$。接下来，只需再证明 $\upsilon_i^2,\upsilon_j^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 即可。令

$$\Lambda_i=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i^2(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t,\Lambda_j=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t d_j(u)\mathrm{d}u}J_j^2(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t。$$

要证明 $\upsilon_i^2,\upsilon_j^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$，只需证明 $\lim\limits_{r\to\infty}\Lambda_i=\lim\limits_{r\to\infty}\Lambda_j=0$。注意到

$$\Lambda_i=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i^2(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}(t-s)}I_i^2(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}s}I_i^2(t-s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}s}\left|I_i^2(t-s)\right|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\underline{c_i}s}\left(\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|I_i^2(t-s)\right|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s,$$

因为 $I_i^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$，所以

$$\Pi_r(s)=\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|I_i^2(t-s)|\,\mathrm{d}t$$

是有界的,且满足$\lim\limits_{r\to\infty}\Pi_r(s)=0$,故由勒贝格控制收敛定理可得

$$\lim_{r\to\infty}\Lambda_i=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\left|\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\int_s^t c_i(u)\mathrm{d}u}I_i^2(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\lim_{r\to\infty}(\mathrm{e}^{-\underline{c_i}s}\Pi_r(s))\mathrm{d}s=0,$$

即 $\upsilon_i^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$,同理 $\upsilon_j^2\in PAP_0(\mathbf{R},\mathbf{R})$。综上所述,$T$ 的不动点 υ 是一个伪概反周期函数。

3 相关数值实例

考虑神经网络

$$\begin{cases}x_i'(t)=-c_i(t)x_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{2}a_{ij}(t)f_j(y_j'(t-\tau_{ij}))+\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{ij}(t)\int_0^{+\infty}\beta_{ij}(\theta)h_j(y_j(t-\theta))\mathrm{d}\theta+I_i(t),\\ y_j'(t)=-d_j(t)y_j(t)+\sum\limits_{i=1}^{2}b_{ji}(t)g_i(x_i'(t-\omega_{ji}))+\sum\limits_{i=1}^{2}l_{ji}(t)\int_0^{+\infty}\upsilon_{ji}(\theta)\eta_i(x_i(t-\theta))\mathrm{d}\theta+J_j(t)。\end{cases}\tag{6}$$

式中:

$$c_1(t)=5+\sin^4 t,c_2(t)=6-|\cos(\sqrt{3}t)|,d_1(t)=10+cos^8 t,d_2(t)=11-|\sin(\sqrt{2}t)|,$$

$$a_{11}(t)=0.1\cos^4 t,a_{12}(t)=0.2\cos^2(\sqrt{2}t),a_{21}(t)=0.2\cos^6 t,a_{22}(t)=0.1|\sin t|,$$

$$\alpha_{11}(t)=0.2\sin(\sqrt{7}t),\alpha_{12}(t)=0.3|\cos t|,\alpha_{21}(t)=0.2\sin^{12}t,\alpha_{22}(t)=0.4|\cos(\sqrt{5}t)|,$$

$$b_{11}(t)=0.4\cos^2(\sqrt{3}t),b_{12}(t)=0.2\sin^6 t,b_{21}(t)=0.6|\sin t|,b_{22}(t)=0.3\sin^3(\sqrt{2}t),$$

$$l_{11}(t)=0.1\sin^3(\sqrt{3}t),l_{12}(t)=0.2\sin^2(\sqrt{2}t),l_{21}(t)=0.2\cos^5 t,l_{22}(t)=0.4\cos^6 t,$$

$$\beta_{11}(t)=\mathrm{e}^{-t},\beta_{12}(t)=\mathrm{e}^{-2t},\beta_{21}(t)=\mathrm{e}^{-3t},\beta_{22}(t)=\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t},$$

$$\upsilon_{11}(t)=\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-3t},\upsilon_{12}(t)=\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t},\upsilon_{21}(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t},\upsilon_{22}(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t},$$

$$I_1(t)=0.1\cos(\sqrt{2}t)+0.1\frac{1}{1+t^2},I_2(t)=0.1\cos t+0.1\frac{1}{1+t},$$

$$J_1(t)=0.2\cos t+0.3\frac{1}{1+t^2},J_2(t)=0.3\cos^2 t+0.1\frac{1+t}{1+t^2},f_1(t)=\frac{t}{4},f_2(t)=\frac{\cos^4 t}{16},$$

$$h_1(t)=\frac{\cos t}{4},h_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{-4t}}{16},g_1(t)=\frac{\sin t}{4},g_2(t)=\frac{\mathrm{e}^{-8t}}{32},\eta_1(t)=\frac{\sin 3t}{12},\eta_2(t)=\frac{\cos^4 t}{16},$$

τ_{ij} 和 $\omega_{ji}(i,j=1,2)$是正常数。经过计算得

$$\underline{c_1}=\underline{c_2}=5,\overline{c_1}=\overline{c_2}=6,\underline{d_1}=\underline{d_2}=10,\overline{d_1}=\overline{d_2}=11,\overline{a_{11}}=0.1,\overline{a_{12}}=0.2,\overline{a_{21}}=0.2,$$

$$\overline{a_{22}}=0.1,\overline{\alpha_{11}}=0.2,\overline{\alpha_{12}}=0.3,\overline{\alpha_{21}}=0.2,\overline{\alpha_{22}}=0.4,\overline{b_{11}}=0.4,\overline{b_{12}}=0.2,\overline{b_{21}}=0.6,$$

$$\overline{b_{22}}=0.3,\overline{l_{11}}=0.1,\overline{l_{12}}=0.2,\overline{l_{21}}=0.2,\overline{l_{22}}=0.4,\beta_{11}^M=1,\beta_{12}^M=\frac{1}{2},\beta_{21}^M=\frac{1}{3},$$

$$\beta_{22}^M=\frac{3}{2},\upsilon_{11}^M=\frac{5}{6},\upsilon_{12}^M=\frac{4}{3},\upsilon_{21}^M=\frac{1}{2},\upsilon_{22}^M=\frac{2}{3},\overline{I_1}=0.2,\overline{I_2}=0.2,\overline{J_1}=0.5,\overline{J_2}=0.4,$$

$$L_{f_1}=L_{f_2}=L_{h_1}=L_{h_2}=L_{g_1}=L_{g_2}=L_{\eta_1}=L_{\eta_2}=\frac{1}{4},A=1.05,\xi=\frac{133}{200},\frac{A\xi}{1-\xi}=\frac{2\ 793}{1\ 340}。$$

因 $\xi<1$,故在

$$E=\{\boldsymbol{\varphi}\mid\boldsymbol{\varphi}\in BC^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^{n_1+m_1}),\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\leqslant\frac{2\ 397}{1\ 340}\}$$

中,神经网络(6)的伪概反周期解有且仅有一个。

4 结语

本文证明了全体伪概反周期函数构成的集合是概周期函数空间的一个闭子集,但是该集合关于函数

的加法并不是封闭的。因此,全体伪概反周期函数构成的集合赋予了上确界范数之后,也无法成为概周期函数空间的一个闭子空间,无法直接使用不动点原理探讨神经网络的伪概反周期解的存在性与唯一性。然而,本文提供了另一个可行的思路,可以首先证明神经网络存在唯一的有界解,再证明该有界解就是伪概反周期函数,从而解决神经网络伪概周期解的存在性与唯一性。

加权伪概周期函数又是伪概周期函数的进一步推广,也可以仿照概反周期函数与伪概反周期函数的概念,得到加权伪概反周期函数的概念。为了更好地揭示概周期型现象的本质,今后也可以尝试用与文献[17]相似的方法,通过神经网络的外部输入函数去调控神经网络,获得概反周期型解。

参考文献:

[1] KOSKO B. Bidirectional associative memories[J]. IEEE transactions on systems,man and cybernetics,1988,18(1):49-60.

[2] KOSKO B. Unsupervised learning in noise[J]. IEEE transactions on neural networks,1991,1(1):44-57.

[3] KOSKO B. Neural networks and fuzzy systems:a dynamical systems approach to machine intelligence[M]. Englewood Ciffs:Prentice Hall,1992.

[4] KOSKO B. Structural stability of unsupervised learning in feedback neural networks[J]. IEEE transactions on automatic control,1991,36(7):785-792.

[5] 赵莉莉.一类具多比例时滞脉冲 BAM 神经网络的稳定性[J].滨州学院学报,2023,39(4):42-51.

[6] 叶宜豪,江明辉,章雅丹.模糊惯性 BAM 神经网络固定时间同步[J].南阳理工学院学报,2023,15(4):116-123.

[7] 石雨晨,魏若宇.四元数双向联想记忆神经网络的固定时间控制[J].南通大学学报(自然科学版),2023,22(3):81-94.

[8] 李冰冰,廖茂新,李伟南.具有双时滞的分数阶 BAM 神经网络模型的动力学行为[J].南华大学学报(自然科学版),2022,36(6):58-64.

[9] 李超,詹倩,韦慧.具时滞影响的一般 BAM 神经网络的有限时间反同步[J].应用数学,2022,35(4):938-946.

[10] 陈伟康,翟其清,王友国.基于离散双向联想记忆神经网络的多元通信系统[J].计算机应用,2023,43(3):848-852.

[11] 刘宇,刘铭.模糊随机 BAM 神经网络的固定时间同步[J].哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2022,38(1):75-81.

[12] 罗玲,蹇继贵,郑胜. Markovian 忆阻二阶 BAM 神经网络的非脆弱指数状态估计[J].三峡大学学报(自然科学版),2021,43(3):106-112.

[13] KOSTIC M,VELINOV D. A note on almost anti-periodic functions in Banach spaces[J]. Kragujevac journal of mathematics,2020,44(2):287-297.

[14] 宋娜,夏正德.分段双加权伪概周期函数的复合定理[J].西南大学学报(自然科学版),2021,43(2):103-109.

[15] 陈叶君,丁惠生,简伟刚.关于群上的概周期函数的几点注记[J].江西师范大学学报(自然科学版),2020,44(2):202-205.

[16] 赵莉莉,赵霜.概反周期函数及其在一类 Hopfield 神经网络上的应用[J].山东师范大学学报(自然科学版),2024,39(1):43-51.

[17] LI Y K,ZHAO L L. Weighted pseudo-almost periodic functions on time scales with applications

to cellular neural networks with discrete delays[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2017,40(6):1905-1921.

Pseudo almost anti-periodic function and its application in a class of BAM neural networks

ZHAO Lili

(*School of Mathematics and Statistics*, *Yunnan University*, *Kunming* 650091, *China*)

Abstract: This paper is devoted to investigating the existence of pseudo almost anti-periodic solutions of a class of BAM neural networks with distributed delays. Firstly, similar to almost anti-periodic functions, the concept of pseudo almost anti-periodic functions is proposed. Secondly, the related properties of pseudo almost anti-periodic functions are discussed in this paper and it is proved that the set of all pseudo almost anti-periodic functions is a closed subset of the almost periodic function space. Finally, by using the fixed point principle, it is proved that the BAM neural network has a unique bounded solution, which is a pseudo almost anti-periodic function. Since the pseudo almost anti-periodic function is more precise than the pseudo almost periodic function, the discussion on the existence and uniqueness of the pseudo almost anti-periodic solution of neural networks can describe the dynamic properties of neural networks more accurately than the discussion on the existence and uniqueness of the pseudo almost periodic solution, and the obtained conclusion is novel and serves as a further refinement and supplement to existing conclusions.

Keywords: almost periodic solution; pseudo almost periodic solution; pseudo almost anti-periodic solution; neural networks; delays

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 赵莉莉.伪概反周期函数及其在一类 BAM 神经网络中的应用[J].山东航空学院学报,2025,42(4):96-106.
ZHAO L L. Pseudo almost anti-periodic function and its application in a class of BAM neural networks[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2025,42(4):96-106.

本 刊 声 明