

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

恐惧效应对偏害模型的影响

周 帅¹, 张 荣²

(1. 安徽国防科技职业学院 公共课教学部, 安徽 六安 237005;

2. 皖西学院 金融与数学学院, 安徽 六安 237012)

摘 要:研究了恐惧效应对偏害模型的影响,讨论了系统平衡点的存在性与全局稳定性的条件,并通过数值模拟分析了恐惧效应对系统的动态影响。研究表明,恐惧效应存在阈值,当被偏害物种对偏害物种的恐惧大于该阈值时,被偏害物种将会灭亡,反之,则与偏害物种长期共存。

关键词:恐惧效应;偏害模型;全局稳定性;阈值;存在性

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:**10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.015

偏害共生指两物种生活在一起时,其中一个物种的增长对另一物种增长产生抑制作用,但其本身不能从中直接得到益处或害处。偏害关系在自然界中较为常见,例如青霉菌分泌青霉素抑制其他细菌,青藏高原东部的高寒草甸上的蝗虫跳跃时会对青草毛虫的进食产生不利影响,但是生态学者对这一种间关系的研究较少^[1-4]。经典的两物种种群偏害模型可表示为^[5]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{k}) - qxy, \\ \frac{dy}{dt} = y(s - cy). \end{cases} \quad (1)$$

式中: x 、 y 是两物种的种群密度(为便于书写,以下也代指种群类型),物种 x 除了受自身生长率和环境容纳量影响之外,还受物种 y 的偏害限制,而物种 y 仅受资源和种内竞争的影响;参数 r 、 s 分别为物种 x 、 y 的生长率, k 是物种 x 的环境容纳量, c 是物种 y 的种内竞争系数, q 为物种 y 对物种 x 的偏害系数。模型(1)中,作者没有考虑到恐惧效应的影响。事实上,恐惧是影响自然界物种分布的重要因素之一,能对物种之间的相互作用产生重要影响。近年来,生态学家对恐惧效应做了大量的研究^[6-9],然而这些研究都是围绕食饵或捕食者在捕食系统中的恐惧效应对物种的生存、生长和繁殖产生影响。事实上,偏害系统中也存在恐惧现象,例如在大型食草动物和一些小型节肢动物构成的偏害系统中,放牧时大型食草动物无意识踩踏到节肢动物使其受伤或者死亡,在此过程中节肢动物担心被踩,对大型食草动物产生恐惧。受文献[9]启发,用 $f(e, y) = \frac{1}{1+ey}$ 表示被偏害物种受到偏害物种恐惧效应的影响。其中, e 表示恐惧效应参数, e 越大表示被偏害物种对偏害物种的恐惧越大,当 $e=0$ 时,表示没有恐惧。基于此,尝试研究恐惧效应对偏害共生系统物种动态的影响,提出模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{rx}{1+ey}(1 - \frac{x}{k}) - qxy, \\ \frac{dy}{dt} = y(s - cy). \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期:2024-05-29

基金项目:安徽省高校自然科学研究重点项目(2023AH052740);安徽省优秀青年教师培育项目(YQZD2024088)

第一作者简介:周 帅(1990—),男,安徽淮北人,讲师,硕士,主要从事数学生态学研究。E-mail:zs01618@163.com

接下来研究 $e \geq 0$ 时系统动力学行为,即恐惧效应 $f(e, y) = \frac{1}{1+ey}$ 对偏害系统(2)的影响。

1 平衡点存在和局部稳定性

系统(2)的平衡点满足方程

$$\begin{cases} \frac{rx}{1+ey}(1-\frac{x}{k})-qxy=0, \\ y(s-cy)=0. \end{cases}$$

计算可知,系统恒有边界平衡点 $A_1(0,0), A_2(k,0), A_3(0, \frac{s}{c})$, 在不等式

$$\frac{r}{1+\frac{se}{c}} > \frac{qs}{c} \quad (\text{即 } rc^2 > qs(c+es)) \quad (3)$$

的条件下,系统(2)有唯一的正平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 。其中, $x^* = \frac{k(c^2re - qs(c+es))}{rec^2}, y^* = \frac{s}{c}$ 。

定理 1 平衡点 A_1 和 A_2 是不稳定的; 如果不等式

$$\frac{r}{1+\frac{se}{c}} < \frac{qs}{c} \quad (\text{即 } rc^2 < qs(c+es)) \quad (4)$$

成立,则平衡点 A_3 是局部渐近稳定的; 在不等式(3)成立的前提下,正平衡点 A_4 是局部渐近稳定的。

证明 系统(2)在 (x, y) 点的变分矩阵为 $J(x, y) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & s-2cy \end{bmatrix}$ 。其中,

$$a_{11} = \frac{r}{1+ey}(1-\frac{x}{k}) - \frac{rx}{k(1+ey)} - py, a_{12} = -\frac{erx}{(1+ey)^2}(1-\frac{x}{k}) - px.$$

变分矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0. \quad (5)$$

显然,如果 $\text{tr}(J) < 0$ 和 $\det(J) > 0$ 成立,则方程(5)的两个特征根都有负实部,从而对应的平衡点是局部渐近稳定的。

系统(2)在平衡点 $A_1(0,0)$ 处的雅可比矩阵为 $J(A_1(0,0)) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$, 两个特征根分别为 $\lambda_1 = r > 0, \lambda_2 = s > 0$, 因此 $A_1(0,0)$ 是不稳定的。

系统(2)在平衡点 $A_2(k,0)$ 处的雅可比矩阵为 $J(A_2(k,0)) = \begin{bmatrix} -r & -pk \\ 0 & s \end{bmatrix}$, 矩阵的两个特征值满足 $\lambda_1 = -r < 0, \lambda_2 = s > 0$, 由此可知 $A_2(k,0)$ 是不稳定的。

系统(2)在平衡点 $A_3(0, \frac{s}{c})$ 处的雅可比矩阵为

$$J(A_3(0, \frac{s}{c})) = \begin{bmatrix} \frac{rc^2 - ps(e+es)}{c(c+es)} & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix},$$

在条件(4)成立的前提下,显然 $\lambda_1 = \frac{rc^2 - ps(c+es)}{c(c+es)} < 0, \lambda_2 = -s < 0$ 。相应地 $A_3(0, \frac{s}{c})$ 局部渐近稳定。

在条件(4)成立前提下,可以得到唯一正平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 满足方程

$$\begin{cases} \frac{r}{1+ey^*}(1-\frac{x^*}{y}) - qy^* = 0, \\ s - cy^* = 0. \end{cases} \quad (6)$$

借助方程(6),系统(2)在正平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(A_4(x^*, y^*)) = \begin{bmatrix} -\frac{rx^*}{k(1+ey^*)} & -\frac{epy^*}{(1+ey^*)} - px^* \\ 0 & -cy^* \end{bmatrix}.$$

由

$$\text{tr}(J) = -\frac{rx^*}{k(1+ey^*)} - cy^* < 0, \det(J) = \frac{crx^*y^*}{k(1+ey^*)} > 0,$$

可知 $A_4(x^*, y^*)$ 局部渐近稳定的。定理 1 证毕。

2 系统全局稳定性

定理 2 条件(4)保证系统边界 A_3 全局渐近稳定。

证明 不等式(4)表明,对足够小的 $\epsilon > 0$,有不等式

$$\frac{r}{1+e(\frac{s}{c}-\epsilon)} < q(\frac{s}{c}-\epsilon) \tag{7}$$

成立。系统(2)中的第 2 个方程式是经典的 Logistic 模型,由此可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{a_2}{c_2}. \tag{8}$$

当存在足够大的 T_1 使得 $t > T_1$ 时,有不等式

$$\frac{s}{c} + \epsilon > y(t) > \frac{s}{c} - \epsilon \tag{9}$$

成立。则由式(9)与系统(2)的第 1 个方程可得

$$\frac{dx}{dt} \leq x \left(\frac{r}{1+e(\frac{s}{c}-\epsilon)} \left(1 - \frac{x}{k}\right) - q\left(\frac{s}{c}-\epsilon\right) \right),$$

结合式(7),当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$x(t) \leq x(T_1) \exp\left\{ \left[\frac{r}{1+e(\frac{s}{c}-\epsilon)} - q\left(\frac{s}{c}-\epsilon\right) \right] (t - T_1) \right\} \rightarrow 0.$$

也就有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ 。结合式(8)知, $A_3(0, \frac{s}{c})$ 是全局吸引的。又由定理 1 的结论知 $A_3(0, \frac{s}{c})$ 局部渐近稳定,故 $A_3(0, \frac{s}{c})$ 是全局渐近稳定的。

定理 3 若条件(3)成立,则正平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 是全局稳定的。

证明 由定理 2 可知,正平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的,若系统(2)在 $G = \{x, y | x > 0, y > 0\}$ 内不存在极限环,则该平衡点就是全局稳定的。

取 Dulac 函数 $B(x, y) = x^{-1}y^{-1}$, 则

$$\frac{\partial(BP)}{x} + \frac{\partial(BQ)}{y} = -\frac{r}{ky(1+ey)} - \frac{c}{x} < 0.$$

由 Dulac 准则可知,系统(2)在 $G = \{x, y | x > 0, y > 0\}$ 内不存在极限环,故平衡点 $A_4(x^*, y^*)$ 是全局稳定的。

3 数值模拟

通过 Matlab 2022a 软件进行数值模拟,模拟了物种带有恐惧效应的偏害模型(2)的动力学。模型中

参数取值如下： $r=2, k=3, q=1, s=2, c=2$ 。当恐惧效应 $e=0.4$ 时，系统数值满足条件(4)，系统局部渐近于边界上的平衡点 $A_4(0.9, 1)$ ，如图 1(a)所示；这与定理 1 中证明的结果一致。当恐惧效应 $e=1.5$ 时，超过恐惧阈值，满足系统条件(4)，系统(2)的运动轨逐渐稳定于正平衡点 $A_3(0, 1)$ ，如图 1(b)所示。系统其他的两个边界平衡点 A_1 和 A_2 始终是不稳定的。

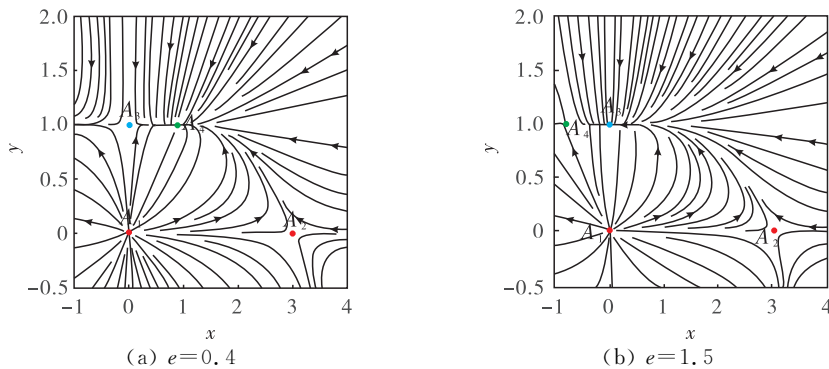


图 1 相线图

图 2 所示为恐惧效应对物种动态变化的影响情况。由图 2 可知，当物种的种群密度初值 $[x_0, y_0] = [0.4, 0.4]$ 时，在没有恐惧效应的情况下，两物种能稳定共存；随着恐惧效应的增加，物种 x 的密度随之减少；当恐惧参数 e 达到一定程度，使得不等式(3)成立时，物种 x 最终趋于灭亡。然而恐惧效应对物种 y 种群密度没有影响。这是因为 $\frac{dx^*}{de} = -\frac{qs^2}{rc^2} < 0, \frac{dy^*}{de} = 0, x^*$ 关于 e 是单调递减的，恐惧效应对物种 y 没有影响；随着物种 x 恐惧效应的减少，恐惧效应对物种 x 的种群密度抑制作用减小，因此物种 x 的密度增大， x, y 两物种能长期共存。

图 3 模拟物种种群的初始值密度对物种趋于平衡动态的影响。当恐惧参数 $e=0.4$ 时，系统有唯一正平衡点 $(0.9, 1.0)$ ，且是全局吸引的。图 3 中物种的种群初始密度值为 $[x_0, y_0] = [0.2, 0.2], [x_0, y_0] = [0.9, 1.0], [x_0, y_0] = [1.4, 0.6]$ 。观察发现，物种初始密度不影响物种最终的平衡密度，但对物种趋于平衡的速度有影响，如果物种的初始密度不是最终平稳密度，物种趋于平衡所需要的时间会更长。

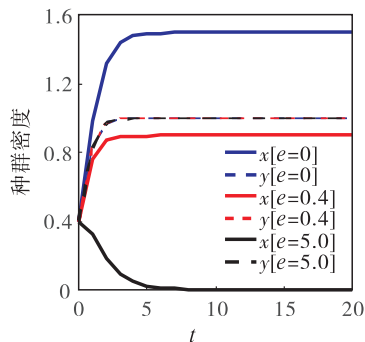


图 2 恐惧效应对物种动态变化的影响

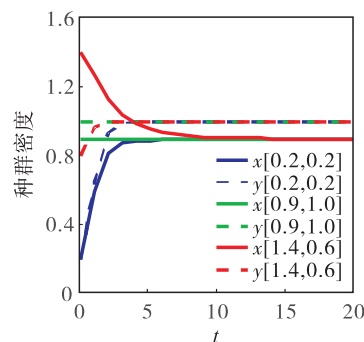


图 3 种群初始密度对物种趋于平衡的影响

4 结论

本文提出并研究了恐惧效应对偏害模型的影响，讨论了该模型系统平衡点的存在性，分析了平衡点全局稳定的条件，并用 Matlab 2022a 软件模拟了恐惧效应对系统物种的种群密度的影响。恐惧效应能影响被偏害物种的最终平衡密度，但不影响偏害物种的最终平衡密度。恐惧效应存在阈值，当被偏害物种对偏害物种恐惧值大于该阈值时，被偏害物种最终会走向灭亡；小于该阈值时，被偏害物种能与偏害物种长期

共存。物种初始密度不会改变物种最终的平衡密度,但是会对物种趋于平稳的时间产生影响。恐惧效应是影响物种生存和灭绝重要因素之一,恰当调控干扰恐惧的条件,有利于促进物种的多样性,保护生态平衡。

参考文献:

- [1] 刘刚. 蝗虫-草原毛虫的偏害关系研究获得进展[J]. 农药市场信息, 2013(24):35.
- [2] GUAN X, CHEN F. Dynamical analysis of a two species amensalism model with Beddington-DeAngelis functional response and Allee effect on the second species[J]. *Nonlinear analysis: real world applications*, 2019, 48:71-93.
- [3] ZHOU Q, CHEN F, LIN S. Complex dynamics analysis of a discrete amensalism system with a cover for the first species[J]. *Axioms*, 2022, 11(8):1-22.
- [4] ZHOU Q, CHEN F. Dynamical analysis of a discrete amensalism system with the Beddington-DeAngelis functional response and Allee effect for the unaffected species[J]. *Qualitative theory of dynamical systems*, 2023, 22(1):1-25.
- [5] 石志高. 一类具有 Allee 效应的偏害系统的稳定性分析[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2020, 41(5):394-396.
- [6] 李江, 魏春金. 具有恐惧效应的随机捕食-食饵模型动力学[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2023, 28(5):397-406.
- [7] 蒋唐唐, 张睿. 具有相互干扰和恐惧效应的捕食模型的稳定性[J]. 咸阳师范学院学报, 2024(2):16-19.
- [8] 张萌萌, 李善兵. 具有恐惧效应和空间异质捕食-食饵模型的稳态解[J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, 60(4):775-783.
- [9] WANG X, ZANETTE L, ZOU X. Modelling the fear effect in predator-prey interactions[J]. *Journal of mathematical biology*, 2016, 73(5):1179-1204.

The impact of fear effects on amensalism models

ZHOU Shuai¹, ZHANG Rong²

(1. *Public Course Teaching Department*,

Anhui Vocational College of Defense Technology, Lu'an 237005, China;

2. *School of Finance and Mathematics, West Anhui University, Lu'an 237012, China*)

Abstract: The impact of fear effect on biased amensalism models was proposed and studied, and the conditions for the existence and global stability of system equilibrium points were discussed. The dynamic effects of fear effect on the system were simulated through data. Research has shown that there is a threshold for the fear effect. When the fear of the targeted species is greater than this threshold, they will perish. If it is less than this threshold, they can coexist with the targeted species for a long time.

Keywords: fear effect; amensalism model; global stability; threshold; coexistence

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 周帅, 张荣. 恐惧效应对偏害模型的影响[J]. 山东航空学院学报, 2025, 42(4):112-116.

ZHOU S, ZHANG R. The impact of fear effects on amensalism models[J]. *Journal of Shandong University of Aeronautics*, 2025, 42(4):112-116.