【工程与技术】

聚集数据线性模型参数的多元聚集改进的综合岭估计的相对效率

余新宏，潘冠涛

（合肥经济学院 基础课教学部，安徽 合肥 230011）

摘 要：针对多元聚集数据的复共线性模型参数估计问题，岭估计是重要的参数估计方法，但是岭估计过于强调参数的稳定性而忽视了参数的无偏性。故利用 Stein 压缩理论技术，依托广义 Liu 型估计方法，给出了多元聚集改进的综合岭估计。研究了该类改进估计的优良性，论证了其中两种相对效率的的上界限问题。

关键词：线性模型；聚集数据；多元聚集数据；综合岭估计；相对效率

中图分类号：O 212.4 **文献标识码**：A DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.010

0 引言

考虑多元线性模型[1]

$$\boldsymbol{Y}_{n\times k}=\boldsymbol{X}_{n\times p}\boldsymbol{B}_{p\times k}+\boldsymbol{U}_{n\times k},\mathbf{E}(\boldsymbol{U})=0,\mathrm{cov}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{V}_{k\times k}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n}。\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{Y}_{n\times k}$为观测随机矩阵，$\boldsymbol{X}_{n\times p}$为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X})=P$ 的设计矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}_{p\times k}$为未知参数，$\boldsymbol{U}_{n\times k}$为随机误差，矩阵 $\boldsymbol{V}_{k\times k}>0$ 为已知参数，已知协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n}>0$，$\mathrm{Vec}(\boldsymbol{U}_{n\times k})$为矩阵 $\boldsymbol{U}_{n\times k}$的拉直向量，$\boldsymbol{V}_{k\times k}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n}$为 $\boldsymbol{V}_{k\times k}$和 $\boldsymbol{\Sigma}_{n\times n}$的 Kronecker 乘积。参数 B 的最小二乘估计(OLSE)$\hat{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$，其协方差阵

$$\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{B}})=\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}],\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\ \hat{\boldsymbol{B}})=\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}];$$

B 的最佳线性无偏估计量(BLUE)$\boldsymbol{B}^*=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{Y}$，其协方差阵

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{B}^*)=\boldsymbol{V}\otimes(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1},\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\boldsymbol{B}^*)=\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}。$$

由多元线性模型 Gauss-Markov 定理得

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\ \hat{\boldsymbol{B}})\geqslant\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\ \boldsymbol{B}^*)。$$

多元线性模型在数据观测时，当只能观测到 $\boldsymbol{Y}_{n\times k}$局部分量，或只能观测到 $\boldsymbol{Y}_{n\times k}$的某些线性组合 $\boldsymbol{Z}_{n\times k}=\boldsymbol{T}_{n\times n}\boldsymbol{Y}_{n\times k}$（其中 $\boldsymbol{T}_{n\times n}$为已知方阵）时，这种场景下采集的 $\boldsymbol{Y}_{n\times k}$的数据称为聚集数据。当 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ 且 $k=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$的无偏估计在文献[2]中定义为 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}$。其中，当 $\boldsymbol{T}_{n\times n}$为对称幂等且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{T})=q\geqslant p$ 时，此无偏估计具有某种优良性，易知 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的无偏估计。但当复共线性模型中的设计阵 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}$ 存在特征值接近于 0 时，参数估计 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 就会出现均方误差很大，且变得极不稳定化的问题，目前学术领域较为广泛地采用岭估计来克服复共线性问题。如文献[3]提出了一种新的有偏岭估计

$$\boldsymbol{\beta}_h^*=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}),$$

收稿日期：2024-03-29

基金项目：安徽省科研编制计划项目(2022AH052621)

第一作者简介：余新宏(1982—)，男，安徽颍上人，教授，硕士，主要从事参数估计研究。

E-mail：yxh229913@126.com

$h>0$ 是参数。当 $h=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_h^*=\tilde{\boldsymbol{\beta}}$；只要 $h\neq 1$，$\boldsymbol{\beta}_h^*$ 就是有偏估计。

但岭估计方法片面强调估计参数的稳定性，忽视了估计参数的无偏性，有时使得估计参数的均值较大地偏离实际值。而 Liu 型广义估计方法的优点在于通过引入新的数量参数，保持了估计参数的稳定性和近似无偏性。受文献[4-6]启发，基于 Stein 压缩估计理论，提出聚集数据多元线性模型多元聚集改进的综合岭估计 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$，以此缩小均方误差，提高估计的精度。为了度量 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 代替 $\boldsymbol{B}$ 后 OLSE $\hat{\boldsymbol{B}}$ 和 BLUE $\boldsymbol{B}^*$ 的精度蒙受的损失，对 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 代替 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 的两种相对效率定义如下：

$$e_1(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\left[\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))^q}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))^q}\right]^{\frac{1}{q}},q\geqslant 1$$

称为推广欧氏模之比意义下的效率。式中的 $\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))$ 表示 $\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 的均方误差矩阵，下同。

$$e_2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\sqrt{\frac{\mathrm{tr}[(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))'\boldsymbol{H}(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))]}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))]}}$$

称为加权欧氏模之比意义下的效率。据此可得利用 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 代替 OLSE $\hat{\boldsymbol{B}}$、BLUE $\boldsymbol{B}^*$ 的效率上界。下文中，记号 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 表示方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个顺序特征值。

1 定义和引理

定义 1 在多元聚集线性模型(1)下，未知参数向量 $\boldsymbol{B}$ 的估计 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 称为多元聚集改进的综合岭估计，

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}。$$

式中：$\boldsymbol{Q}$ 是使

$$\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$$

的正交矩阵，$h>0$ 为参数，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})=\mathrm{diag}(f_1(k_1),f_2(k_2),\cdots,f_p(k_p)),f_1(k_1)\geqslant\cdots\geqslant f_p(k_p)>0。$$

注 1 在定义 1 中，当 $h=1$ 时，$\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))=\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$，显然，估计 $\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 为文献[5]中多元线性模型中参数 $\boldsymbol{B}$ 的多元聚集综合岭估计 $\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$ 的推广。

引理 1[7] $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Y}$ 为 $n\times k$ 矩阵，则有

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}))=(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A})(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}')。$$

引理 2[7] $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$ 为适当阶数的矩阵，则有

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(\boldsymbol{AC}\otimes\boldsymbol{BD})。$$

引理 3[7] 设已知方阵 $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ 为正定阵，则有

$$p^{1-q}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})^q\leqslant\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}^q\leqslant(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})^q,q\geqslant 1。$$

引理 4[7] 已知矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$、$\boldsymbol{B}_{p\times q}$，则有 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 为 $mp\times nq$ 矩阵，且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$。

引理 5[7] 设已知方阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}_{n\times n}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{B}_{n\times n}>\boldsymbol{O}$，则有

$$\lambda_n(\boldsymbol{B})\lambda_i(\boldsymbol{A}^2)\leqslant\lambda_i(\boldsymbol{ABA})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{B})\lambda_i(\boldsymbol{A}^2),i=1,2,\cdots,n。$$

引理 6[7] 设已知矩阵 $\boldsymbol{U}_{n\times p}$ 使得

$$\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Delta}=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_p),\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p\geqslant 0,$$

则对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}>\boldsymbol{O}$，有

$$\max_{\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Delta}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})=\sum_{i=1}^{p}\delta_i\lambda_i(\boldsymbol{A}),\min_{\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Delta}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{-1}=\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\lambda_{p-i+1}^{-1}(\boldsymbol{A}),$$

$$\max_{\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Delta}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})^{-1}=\sum_{i=1}^{p}\delta_{p-i+1}^{-1}\lambda_{n-i+1}^{-1}(\boldsymbol{A}),\min_{\boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\Delta}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{U})=\sum_{i=1}^{p}\delta_i\lambda_{n-i+1}(\boldsymbol{A})。$$

2　$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$的统计性质

命题 1　估计 $\widetilde{\mathrm{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$基本性质如下：(ⅰ)$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$是$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$的一个线性变换；(ⅱ)当$h>1$时，$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$向原点压缩，即$\|\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))\|\leqslant\|\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))\|$。

证明

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y}=$$
$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}((\boldsymbol{K}))。$$

令矩阵

$$\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I}),$$

有

$$\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))=\boldsymbol{E}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})\widetilde{\boldsymbol{B}}]=$$
$$[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})]\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}})=$$
$$[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}。$$

当$h>1$时，

$$\|\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))\|=\|\boldsymbol{N}\|\cdot\|\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))\|\leqslant\|\boldsymbol{E}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})))\|。$$

证毕。

3　$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$代替$\hat{\boldsymbol{B}}$及$\boldsymbol{B}^*$在推广欧氏模之比意义下的效率上界

定理 1　设方阵$\boldsymbol{T}_{n\times n}$的秩为$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{T})=p$，$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$的特征值为$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$，$\boldsymbol{T\Sigma T}'$的特征值为$t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_p\geqslant0$，$\boldsymbol{\Sigma}$的特征值为$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p\geqslant0$，$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}$的特征值为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p>0$，$f(k_1)\geqslant f_2(k_2)\geqslant\cdots\geqslant f_p(k_p)>0$，其中$h>0$为参数，则

$$e_1(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\cdot s_{p-i+1}}{\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}}。$$

证明　令

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T},$$

从而

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{K})=\boldsymbol{NAY},$$
$$\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))=\boldsymbol{M}[\mathrm{Vec}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{Y})]=$$
$$\boldsymbol{M}[\mathrm{Vec}(\boldsymbol{NAY})]=\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(\boldsymbol{NAY}))+\boldsymbol{ee}'。$$

其中，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{E}[\mathrm{Vec}(\boldsymbol{NAY})]-\boldsymbol{B}$。由引理 1 可得

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(\boldsymbol{NAY}))=(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{NA})(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\boldsymbol{Y}))(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}'\boldsymbol{N}')=\sigma^2(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{NA})(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}'\boldsymbol{N}')。$$

由引理 2 可得

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(\boldsymbol{NAY}))=\sigma^2(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{NA})(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{A}'\boldsymbol{N}')=\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes(\boldsymbol{NA\Sigma A}'\boldsymbol{N}')=$$
$$\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Sigma}\cdot$$
$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}+h\boldsymbol{I})^{-1}]。$$

由$e_1(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{K}),\hat{\boldsymbol{B}})$的定义，可得

$$e_1^q(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))^q}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))^q}=\frac{\mathrm{tr}[\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})]^q}{\mathrm{tr}\{\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes[\boldsymbol{NAX}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{TXAN}]+\boldsymbol{ee}'\}^q}。$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}],$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma}\cdot\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}]。$$

由引理 3 知

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{q})\leqslant(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C})^{q},\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')^{q}\geqslant p^{1-q}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')]q,$$

$$e_1^q(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))^q}{\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))^q}\leqslant\frac{(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C})^q}{p^{1-q}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')]^q}\leqslant\frac{p^{q-1}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C})^q}{(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{G})^q}。$$

即

$$e_1(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C})}{(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{G})}=$$

$$\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot\mathrm{tr}\{\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]\}}{\mathrm{tr}\{\boldsymbol{V}\otimes[\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{N}']\}}=$$

$$\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot\mathrm{tr}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]}{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{tr}[\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{N}']}=$$

$$\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]}{\mathrm{tr}[\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{N}']}。$$

设 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵，使得

$$\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}。$$

令

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{P},$$

则

$$\boldsymbol{U}_1'\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}。$$

由引理 6 可得

$$\max_{\boldsymbol{U}_1'\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]=\max_{\boldsymbol{U}_1'\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}}\mathrm{tr}[\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{P}]=$$

$$\max_{\boldsymbol{U}_1'\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}_1'\boldsymbol{\Sigma U}_1)=\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_{p-i+1}。$$

设

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QKQ}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Q}],$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TXQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}=&\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}\cdot\\&(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Q}=\\&\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX})\cdot\\&\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{QQ}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Q}=\\&(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}=\\&\mathrm{diag}[(\lambda_1+h)^{-2}(\lambda_1+1)^2(\lambda_1+f_1(k_1))^{-2}\lambda_1,\cdots,(\lambda_p+h)^{-2}(\lambda_p+1)^2(\lambda_p+k_p)^{-2}\lambda_p]。\end{aligned}$$

又由引理 5、引理 6 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{N}']=\\&\mathrm{tr}[\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma}\cdot\\&\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{Q}]\geqslant\\&\min_{\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{T\Sigma T}'\boldsymbol{V})=\\&\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_{n-i+1}(\boldsymbol{T\Sigma T}')\cdot\lambda_i[(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-1}]\geqslant\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{\lambda}_{n-i+1}(\boldsymbol{T\Sigma T}')\cdot\lambda_i(\boldsymbol{\Lambda}+h\boldsymbol{I})^{-2}\cdot\lambda_p[(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})]\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{p}\boldsymbol{t}_{n-i+1}\cdot(\boldsymbol{\lambda}_{p-i+1}+h)^{-2}\cdot\boldsymbol{\lambda}_p(\boldsymbol{\Lambda})\cdot\lambda_p(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^2\lambda_p[(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))^{-2}]=$$

$$\lambda_p\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^{-2}。$$

故有

$$e_1(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\cdot s_{p-i+1}}{\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}}。$$

证毕。

定理 2　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{T}$ 的秩为 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{T})=p$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值为 $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$,$\boldsymbol{T\Sigma T}'$ 的特征值为 $t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_p>0$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值为 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p>0$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}$ 的特征值为

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p>0,f(k_1)\geqslant f_2(k_2)\geqslant\cdots\geqslant f_p(k_p)>0,$$

其中 $h>0$ 为参数,则

$$e_1(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{K}),\boldsymbol{B}^*)\leqslant\frac{p^{1-\frac{1}{q}}\cdot(\lambda_1+k_1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}(\delta_{p-i+1}^{-1}\cdot s_{n-p+i})}{\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}}。$$

证明　令 $\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{XP}$,则 $\boldsymbol{U}_2'\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{XP}\triangleq\boldsymbol{\Lambda}$,则

$$\max_{\boldsymbol{U}_2'\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{\Lambda}}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}]=\max_{\boldsymbol{U}_2'\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{\Lambda}}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{XP})^{-1}]=$$

$$\max_{\boldsymbol{U}_2'\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{\Lambda}}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{U}_2'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}_2)^{-1}]=\sum_{i=1}^{p}\delta_{p-i+1}^{-1}\cdot\lambda_{n-i+1}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})=\sum_{i=1}^{p}\delta_{p-i+1}^{-1}\cdot s_{n-p+i}。$$

定理 2 得证。

4　$\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))$代替 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 及 $\boldsymbol{B}^*$ 在加权欧氏模之比意义下的效率上界

定理 3　设方阵 $\boldsymbol{T}_{n\times n}$ 的秩为 $\mathrm{Rank}(\boldsymbol{T})=p$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值为 $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$,$\boldsymbol{T\Sigma T}'$ 的特征值为 $t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_p>0$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值为 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p>0$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p>0$,$\boldsymbol{H}$ 的特征值为 $q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_p>0$,$h>0$ 为参数,$f(k_1)\geqslant f_2(k_2)\geqslant\cdots\geqslant f_p(k_p)>0$,则

$$e_2(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^2\cdot(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\cdot s_{p-i+1})}{\sqrt{q_p}\cdot\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}}。$$

证明　由 $e_2(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(K),\hat{\boldsymbol{B}})$的定义,可得

$$e_2(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\sqrt{\frac{\mathrm{tr}[(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))'\boldsymbol{H}(\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}}))]}{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}\,\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))]}}。$$

由定理 1 的证明过程,知

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}],\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}\,\hat{\boldsymbol{B}})=\sigma^2\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]=\sigma^2\boldsymbol{C},$$

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{V}\otimes[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T\Sigma}\cdot$$

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{QF}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{Q}')^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}+h\boldsymbol{I})^{-1}],$$

$$\boldsymbol{M}(\mathrm{Vec}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))=\mathrm{Cov}(\mathrm{Vec}(\widetilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K}))))+\boldsymbol{ee}'=\sigma^2\boldsymbol{G}+\boldsymbol{ee}',$$

故

$$e_2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\left\{\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{CHC})}{\operatorname{tr}[(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')]}\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

设 $\boldsymbol{P}$ 为正交阵,使得

$$\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{H},$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{CHC})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{H})=\operatorname{tr}[\boldsymbol{C}^2\cdot\boldsymbol{P}\cdot\operatorname{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)\cdot\boldsymbol{P}']=$$

$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{P}'\cdot\boldsymbol{C}^2\cdot\boldsymbol{P}\cdot\operatorname{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)]=\sum_{i=1}^{p}c_{ii}\cdot q_i\leqslant$$

$$q_1\cdot\sum_{i=1}^{p}c_{ii}=q_1\cdot\operatorname{tr}(\boldsymbol{P}'\cdot\boldsymbol{C}^2\cdot\boldsymbol{P})=q_1\cdot\operatorname{tr}(\boldsymbol{C}^2)\leqslant q_1\cdot(\operatorname{tr}\boldsymbol{C})^2,$$

式中:$c_{11},c_{12},\cdots,c_{pp}$ 为 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{P}$ 的主对角线元素。

$$\operatorname{tr}[(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')]=\operatorname{tr}[(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')^2\boldsymbol{H}]\geqslant$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{H})=\operatorname{tr}[\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_p)\boldsymbol{P}']=\sum_{i=1}^{p}g_{ii}q_i\geqslant q_p\sum_{i=1}^{p}g_{ii}=q_p\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}^2)。$$

式中:$g_{11},g_{22},\cdots,g_{pp}$ 为 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{G}^2\boldsymbol{P}$ 的主对角线元素。

由引理 3 获知,当 $q=2$ 时,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}^2)\geqslant\frac{1}{p}(\operatorname{tr}\boldsymbol{G})^2,$$

则

$$e_2^2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})=\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{CHC})}{\operatorname{tr}[(\boldsymbol{G}+\sigma^{-2}\boldsymbol{ee}')\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G}+\sigma^{2}\boldsymbol{ee}')]}\leqslant\frac{pq_1(\operatorname{tr}\boldsymbol{C})^2}{q_p(\operatorname{tr}\boldsymbol{G})^2},$$

$$e_2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}(\operatorname{tr}\boldsymbol{C})}{\sqrt{q_p}(\operatorname{tr}\boldsymbol{G})}。$$

故

$$e_2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^2\cdot(\sum_{i=1}^{p}\delta_i^{-1}\cdot s_{p-i+1})}{\sqrt{q_p}\cdot\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}}。$$

证毕。

定理 4 设方阵 $\boldsymbol{T}_{n\times n}$ 的秩为 $\operatorname{Rank}(\boldsymbol{T})=p$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值为 $\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant\cdots\geqslant\delta_p>0$,$\boldsymbol{T\Sigma T}'$ 的特征值为 $t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_p>0$,$\boldsymbol{\Sigma}$ 的特征值为 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p>0$,$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}$ 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p>0$,$\boldsymbol{H}$ 的特征值为 $q_1\geqslant q_2\geqslant\cdots\geqslant q_p>0$,$h>0$ 为参数,$f(k_1)\geqslant f_2(k_2)\geqslant\cdots\geqslant f_p(k_p)>0$,则

$$e_2(\tilde{\boldsymbol{B}}_h(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{K})),\hat{\boldsymbol{B}})\leqslant\frac{\sqrt{pq_1}\cdot(\lambda_1+f_1(k_1))^2\cdot\sum_{i=1}^{p}\delta_{p-i+1}^{-1}\cdot s_{n-p+i}}{\sqrt{q_p}\cdot\lambda_p\cdot(\lambda_p+1)^2\cdot\sum_{i=1}^{p}t_{n-i+1}\cdot(\lambda_{p-i+1}+h)^{-2}\cdot(\lambda_1+k_1)^2}。$$

参照定理 3 的证明思路,可以证明定理 4,在此不再赘述。

5 结论

针对复共线性模型的病态设计阵 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{TX}$ 至少有一个特征根接近于 0 的问题,分析了模型参数岭估计的缺陷,发现受岭估计重稳定性轻无偏性的影响,模型均值与实际值产生较大的偏离。因此,依托 Liu 型估计方法,应用 Stein 式压缩理论技术,通过引入新的参数 $h>0$,改进了多元聚集的综合岭估计,并分析了此改进估计的性质及相对效率等问题。研究表明,多元聚集改进的综合岭估计是文献[5]提出的多元聚

集综合岭估计的推广,并优于多元聚集综合岭估计。

参考文献:

[1] 何晓群. 多元统计分析[M]. 北京:中国人民大学出版社,2019.

[2] PETER S,KARSTEN S. On the least squares estimation with a particular linear function of the dependent variable[J]. Economics letters,1987,23(1):59-64.

[3] 李莉,余新宏. 聚集数据线性模型有偏估[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版),2012,29(1):43-45.

[4] 余新宏,朱文君,郑剑平. 聚集数据线性模型广义聚集双参数改进估计的相对效率[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版),2022,21(3):313-319.

[5] 余新宏,朱小梅,陈翔. 聚集数据线性模型广义聚集综合双参数改进估计的相对效率[J]. 北部湾大学学报,2024,39(4):38-44.

[6] 余新宏,郑剑平,王礼霞. 聚集数据多元线性模型参数的多元广义聚集双参数广义岭估计的相对效率[J]. 上饶师范学院学报,2024,44(3):1-7.

[7] 王松桂,吴密霞,贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京:科学出版社,2018.

The relative efficiency of the improved synthesized ridge estimator for multivariate aggregation of the parameters of the linear model with aggregated data

YU Xinhong, PAN Guantao

(*Basic Course Teaching Department*, *Hefei University of Economics*, *Hefei* 230011, *China*)

Abstract: In ridge estimation is an important parameter estimation method for multicollinearity models with multivariate aggregated data. However, ridge estimation overly emphasizes the stability of parameters and neglects their unbiasedness. This paper utilizes the Stein compression theory technique and relies on the generalized Liu type estimation method to provide a comprehensive ridge estimation improved by multivariate aggregation. It studied the superiority of this type of improved estimation and demonstrated the upper bound problem of two relative efficiencies.

Keywords: the linear mode; aggregated date; multivariate aggregation data; synthesized ridge estimation; relative efficiency

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式　余新宏,潘冠涛. 聚集数据线性模型参数的多元聚集改进的综合岭估计的相对效率[J]. 山东航空学院学报,2025,42(4):73-79.

YU X H,PAN G T. The relative efficiency of the improved synthesized ridge estimator for multivariate aggregation of the parameters of the linear model with aggregated data[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2025,42(4):73-79.