【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

Halanay 不等式在状态依赖时滞脉冲种群系统中的应用

谢瑞军

（安徽财经大学 统计与应用数学学院，安徽 蚌埠 233030）

摘　要：建立一个具有状态依赖时滞的脉冲种群系统，运用改进的 Halanay 不等式得到该种群系统周期解的全局渐近稳定的充分条件。研究结果显示，脉冲毒物输入的浓度和种群幼体的成熟时间是影响种群生存的关键因素，当脉冲毒物输入量大于阈值 μ^* 或者成熟时滞小于阈值 τ_{m}^* 时，该种群将灭绝。

关键词：Halanay 不等式；状态依赖时滞；脉冲；渐近稳定性；周期解

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.014

0　引言

Halanay 不等式由匈牙利数学家 Paul Halanay 提出并证明[1]。该不等式在微分方程和变分原理研究领域应用广泛，主要用于证明解的存在唯一性和稳定性等重要性质。文献[2]利用 Halanay 不等式的推广形式，证明了一类时滞微分系统的指数稳定性，得到了一个新的积分条件，推广和改进了已有的结果，并结合例子加以说明。文献[3]用一种简单的方法证明了广义的 Halanay 不等式，并利用广义的 Halanay 不等式研究一类多时滞的控制系统，得到系统全局指数稳定的充分条件。文献[4]利用改进的 Halanay 不等式，给出一类具有分布时滞的脉冲种群系统的周期解的指数渐近稳定和种群持久性的充分条件。近年来，学者致力于对 Halanay 不等式的理论性质进行深入探讨，并将其应用于解决实际问题，取得了许多研究成果[5-6]。

状态依赖时滞相关研究是当前的热点之一[7-13]。状态依赖时滞最早被用于研究海豹种群和南极鲸鱼种群的数量关系[11]。随着海洋环境污染加剧，海洋毒物的增加导致生物种群出生率降低，甚至致使许多物种濒临灭绝或灭绝。事实上，有毒物质是按照脉冲规律排入海洋的，例如工业和农业废物都是按照规定时间间隔排放的，并且毒物对种群污染有一定的时滞。研究脉冲毒物的排放浓度和成熟时滞如何影响生物种群的灭绝性，对保护生物种群具有重要的意义。因此，许多学者通过建立脉冲模型来研究毒物对种群的影响[14-16]。

特别地，Xie 等利用改进的 Halanay 不等式研究了一类具有状态依赖时滞的种群模型，得到了平衡点的全局指数渐近稳定性的判别准则[6]。结合文献[4]可知，研究具有状态依赖时滞的脉冲种群系统的平衡点稳定性是一个重要课题。基于此，建立如下的具有状态依赖时滞的脉冲种群模型：当 $t \neq n\Gamma, n \in \mathbf{N}$ 时，

收稿日期：2024-05-14

基金项目：安徽省高等学校省级质量工程项目（2022jyxm030）

作者简介：谢瑞军（1984—　），男，安徽五河人，副教授，博士，硕士生导师，主要从事常微分方程与动力系统研究。

E-mail：xieruijun@aufe.edu.cn

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha u(t)-dv(t)-\alpha \mathrm{e}^{-d\tau(z)}(u(t-\tau(z))),\\ \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\alpha \mathrm{e}^{-d\tau(z)}(u(t-\tau(z)))-\beta u^2(t)-r_1c_0(t-\tau_1)u(t)-r_2c_e(t-\tau_1)u(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-mc_0(t)-gc_0(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t);\end{cases} \tag{1}$$

当 $t=n\Gamma,n\in\mathbf{N}$ 时，$\Delta v(t)=0,\Delta u(t)=0,\Delta c_0(t)=0,\Delta c_e(t)=\mu$。其中，$z=v(t)+u(t),0<\tau_m\leqslant\tau(z)\leqslant\tau_M$，并且满足

$$\tau'(z)\geqslant 0,\tau(0)=\tau_m,\tau(\infty)=\tau_M。 \tag{2}$$

这里假设时滞 τ 是关于种群总密度的增长函数，并认为这种单调增加的非线性函数是存在的，例如海豹种群和南极鲸鱼[12]以及苍蝇卵的孵化期[13]。令

$$\tau'=\max\{\tau_1,\tau_M\},\mathbf{R}_+^4=\{x\in\mathbf{R}^4\mid x(t)>0\},$$

系统(1)的初始条件为

$$(v(t),u(t),c_0(t),c_e(t))=(\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t),\phi_4(t))\in C^1([-\tau',0],\mathbf{R}_+^4),\phi_i(0)>0,i=1,2,3,4。\tag{3}$$

其中，变量 $v(t)$ 和 $u(t)$ 分别表示不成熟个体和成熟个体在 t 时刻的密度，$c_0(t)$ 表示种群在 t 时刻体内的毒物的浓度，$c_e(t)$ 表示在 t 时刻环境中毒物的浓度，α 表示不成熟个体出生率系数，d 表示不成熟个体死亡率，β 表示成熟种群内部的竞争系数，r_1 和 r_2 分别表示机体内毒物和环境中毒物对种群个体的影响系数，k 表示在 t 时刻由种群机体对污染物的吸收导致的环境中毒物的损失率系数，g 和 m 分别表示种群机体对毒物的消化率和排泄率系数，h 表示环境中人为因素和自然因素导致的毒物损失率系数，τ_1 表示有毒物质对成熟个体产生影响所需要的时间而毒物对幼体不产生影响，Γ 表示脉冲输入毒物的周期，μ 表示每个脉冲周期输入的毒物量。能够验证系统(1)右边满足利普希茨条件，系统(1)右端解的全局存在唯一性可以保证。

本文假设环境的承受力足够大，即机体从环境中吸收或排泄的毒物浓度可以忽略不计。

注 1 由于 $c_0(t)$ 和 $c_e(t)$ 表示毒物的浓度，故本文假设 $0\leqslant c_0(t)\leqslant 1,0\leqslant c_e(t)\leqslant 1$，即 $c_0(t)$ 和 $c_e(t)$ 都是有界的，详细内容参见文献[14]。

1 脉冲种群系统的全局渐近稳定性

从生物学的观点来说，系统(1)解的正则性和有界性代表了种群能够一直生存下去。本文 $v(t)$ 和 $u(t)$ 的正性和有界性证明类似文献[11]，这里忽略。为了证明系统周期解的稳定性，首先给出以下引理。

引理 1(改进的 Halanay 不等式)[4] 假设 $p>q>0,\tau\geqslant 0$ 是常数，并且 $x(t)$ 在区间 $[t_0-\tau,+\infty)$ 是非负函数。如果

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant -px(t)+q\sup_{t-\tau\leqslant\theta\leqslant t}x(\theta)$$

对所有的 $t\geqslant t_0$ 成立，则有

$$x(t)\leqslant \sup_{t_0-\tau\leqslant\theta\leqslant t_0}x(\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}。$$

其中，λ 是方程 $\lambda=p-q\mathrm{e}^{\lambda\tau}$ 的唯一正解。

引理 2[4] 系统(1)的子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-mc_0(t)-gc_0(t),t\neq n\Gamma,n\in\mathbf{N},\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-hc_e(t),t\neq n\Gamma,n\in\mathbf{N},\\ \Delta c_0(t)=0,\Delta c_e(t)=\mu,t=n\Gamma,n\in\mathbf{N}\end{cases} \tag{4}$$

有唯一的 Γ-周期解，并且当 $t\to\infty$ 时，这个解 $(c_0(t),c_e(t))\to(\hat{c}_0(t),\hat{c}_e(t))$。其中，

$$\begin{cases}\hat{c}_0(t)=\hat{c}_0(0)\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\Gamma)}+\dfrac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\Gamma)}-\mathrm{e}^{-h(t-n\Gamma)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})},\\ \hat{c}_e(t)=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-h(t-n\Gamma)}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}},\\ \hat{c}_0(0)=\dfrac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma})(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})},\\ \hat{c}_e(0)=\dfrac{\mu}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}\end{cases}$$

对 $t\in(n\Gamma,(n+1)\Gamma]$，$n\in\mathbf{Z}^+$ 成立。

令

$$\mu^*=\frac{\alpha\mathrm{e}^{-d\tau_m}(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}{kr_1(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})+r_2\mathrm{e}^{-h\Gamma}(h-g-m)(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})},$$

$$\tau_m^*=\max\{0,\frac{\alpha}{d\mu}\ln\frac{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}{kr_1(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})+r_2\mathrm{e}^{-h\Gamma}(h-g-m)(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}\}。$$

定理 1　如果 $\mu>\mu^*$ 或者 $\tau_m<\tau_m^*$，那么系统(1)的周期解 $(0,0,\hat{c}_0(t),\hat{c}_e(t))$ 是全局渐近稳定的。

证明　由引理 2 得，存在 $T_1>0$，当 $t>T_1$ 时，有

$$\hat{c}_0(t)-\varepsilon<c_0(t)<\hat{c}_0(t)+\varepsilon,\hat{c}_e(t)-\varepsilon<c_e(t)<\hat{c}_e(t)+\varepsilon。$$

那么当 $t>T_1+\tau_1$ 且 $t-\tau_1\in(N_1\Gamma,(N_1+1)\Gamma]$，$N_1\in\mathbf{Z}^+$ 时，可得

$$\begin{aligned}c_0(t-\tau_1)&>\hat{c}_0(t-\tau_1)-\varepsilon=\hat{c}_0(0)\mathrm{e}^{-(g+m)(t-\tau_1-N_1\Gamma)}+\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-\tau_1-N_1\Gamma)}-\mathrm{e}^{-h(t-\tau_1-N_1\Gamma)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}-\varepsilon>\\ &\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1-\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma})}\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\varepsilon=\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}-\varepsilon,\end{aligned}\tag{5}$$

$$c_e(t-\tau_1)>\hat{c}_e(t-\tau_1)-\varepsilon=\frac{\mu\mathrm{e}^{-h(t-\tau_1-N_1\Gamma)}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}-\varepsilon>\frac{\mu\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}-\varepsilon。\tag{6}$$

由已知条件得

$$\mu>\mu^*=\frac{\alpha\mathrm{e}^{-d\tau_m}(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}{kr_1(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})+r_2\mathrm{e}^{-h\Gamma}(h-g-m)(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})},$$

可得

$$\mu(\frac{kr_1(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}+\frac{r_2\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})})>\alpha\mathrm{e}^{-d\tau_m},$$

对给定的 $\varepsilon>0$，则有

$$r_1(\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}-\varepsilon)+r_2(\frac{\mu\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}-\varepsilon)>\alpha\mathrm{e}^{-d\tau_m}。\tag{7}$$

当 $\tau_m<\tau_m^*$ 时，类似可得式(7)。由系统(1)的第二个方程和不等式(5)(6)知，对所有的 $t>T_1+\tau_1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}&\leqslant\alpha\mathrm{e}^{-d\tau(z)}(u(t-\tau(z)))-(r_1(\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}-\varepsilon)+r_2(\frac{\mu\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}-\varepsilon))u(t)\leqslant\\ &-(r_1(\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}-\varepsilon)+r_2(\frac{\mu\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{1-\mathrm{e}^{-h\Gamma}}-\varepsilon))u(t)+\alpha\mathrm{e}^{-d\tau_m}\sup_{t-\tau_M\leqslant\theta\leqslant t}u(\theta),\end{aligned}$$

由不等式(7)和引理 2 可得

$$u(t)\leqslant\sup_{T_1+\tau_1-\tau_m\leqslant\theta\leqslant T_1+\tau_1}u(\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-T_1-\tau_1)}。\tag{8}$$

其中，λ 是方程

$$\lambda=r_1(\frac{\mu k(\mathrm{e}^{-(g+m)\Gamma}-\mathrm{e}^{-h\Gamma})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\Gamma})(1+\mathrm{e}^{(g+m)\Gamma})}-\varepsilon)+r_2(\frac{\mu\mathrm{e}^{-h\Gamma}}{1-e^{-h\Gamma}}-\varepsilon)-\alpha\mathrm{e}^{(\lambda-d)\tau_m}$$

的唯一正解。由系统(1)的第一个方程和式(8)可得

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant -dv(t)+\alpha\sup_{T_1+\tau_1-\tau_m\leqslant\theta\leqslant T_1+\tau_1}u(\theta)\mathrm{e}^{-\lambda(t-T_1-\tau_1)}。$$

当 $\lambda\neq d$ 时,通过常数变异公式和比较原理得

$$v(t)\leqslant\frac{\alpha\sup\limits_{T_1+\tau_1-\tau_m\leqslant\theta\leqslant T_1+\tau_1}u(\theta)\mathrm{e}^{(\lambda-d)(T_1+\tau_1)}}{d-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda(t-T_1-\tau_1)}+u(T_1+\tau_1)\mathrm{e}^{-d(t-T_1-\tau_1)};\tag{9}$$

当 $\lambda=d$ 时,同理可得

$$v(t)\leqslant C\mathrm{e}^{-dt},\tag{10}$$

其中,$C>0$ 是给定的常数。由不等式(8)(9)(10)及引理 2 得,系统(1)的周期解$(0,0,\hat{c}_0(t),\hat{c}_e(t))$是全局渐近稳定的。定理 1 得证。

注 2　定理 1 说明当周期输入的毒物量 μ 大于一定值 μ^* 或者种群幼体初期成熟时间太慢,即 $\tau_m<\tau_m^*$,那么最终都将导致种群灭绝。

2　结论

通过建立具有状态依赖时滞的脉冲种群系统模型,探讨了 Halanay 不等式在状态依赖时滞脉冲微分方程中的应用。通过模型构建和分析,证明了该种群系统的周期解$(0,0,\hat{c}_0(t),\hat{c}_e(t))$是全局渐近稳定的,这为理解和应用 Halanay 不等式提供了新的视角和实例,并对时滞微分方程理论的教学及相关研究具有一定实际参考价值。研究结果也表明,周期性毒物输入量和种群幼体的成熟时间是影响种群生存的关键因素。当这些因素超过一定阈值时,可能导致种群灭绝,这强调了环境保护和毒物管理的重要性。

参考文献:

[1]　HALANAY A. Differential equations: stability, oscillations, time lags[M]. New York: Academic Press, 1966.

[2]　欧伯群. 一类推广的 Halanay 不等式的稳定性研究及其应用[J]. 湛江师范学院学报, 2014, 35(3): 16-23.

[3]　张超龙, 杨建富, 吴东庆. 广义的 Halanay 不等式及其应用[J]. 仲恺农业工程学院学报, 2015, 28(3): 57-59.

[4]　谢瑞军, 袁荣. 具有分布时滞的脉冲种群系统的动力学行为[J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(6): 213-222.

[5]　文海洋, 文立平. Halanay 不等式的一个推广及应用[J]. 湘潭大学学报(自然科学版), 2024, 46(6): 47-53.

[6]　XIE R J, ZHANG X, ZHANG W. Harvesting on a state-dependent time delay model[J]. Journal of systems science and information, 2020, 8(1): 82-96.

[7]　XIE R J, YUAN R, YANG Z H. Wavefronts of a nonlocal state-dependent time delay model[J]. Acta mathematica sinica, English series, 2020, 36(1): 77-92.

[8]　LV Y F, YUAN R. Global stability and wavefronts in a cooperation model with state-dependent time delay[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2014, 415(2): 543-573.

[9]　万育基, 余志先, 孟艳玲. 状态依赖时滞非局部扩散方程的波前解[J]. 数学学报(中文版), 2019, 62(3): 479-496.

[10]　HUMPHRIES A R, MAGPANTAY F M G. Lyapunov-Razumikhin techniques for state-dependent delay differential equations[J]. Journal of differential equations, 2021, 304: 287-325.

[11] AIELLO W, FREEDMAN H, WU J H. Analysis of a model representing stage-structured population growth with state-dependent time delay[J]. SIAM journal on applied mathematics, 1992, 52: 855-869.

[12] GAMBELL R. Birds and mammals-antarctic whales[M]. New York: Pergamon Press, 1985.

[13] ANDREWARTHA H, BIRCH L. The distribution and abundance of animals[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1954.

[14] LIU B, CHEN L S, ZHANG Y J. The effects of impulsive toxicant input on a population in a polluted environment[J]. Journal of biology, 2003, 11(3): 265-274.

[15] MUKHERJEE D. Persistence and global stability of a population in a polluted environment with delay[J]. Journal of biological systems, 2002, 10: 225-232.

[16] DUBEY B. Modeling the interaction of two biological species in a polluted environment[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2000, 246: 58-79.

Application of Halanay inequality in state-dependent delay impulsive population system

XIE Ruijun

(*School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu* 233030, *China*)

Abstract: This paper establishes an impulsive population system with state-dependent delay. By employing an improved Halanay inequality, sufficient conditions for the global asymptotic stability of the periodic solution of the population system are obtained. When the concentration of toxic substances in the impulsive input exceeds the threshold μ^* or the maturation delay is less than the threshold τ_m^*, the population will become extinct.

Keywords: Halanay inequality; state-dependent delay; impulsive; asymptotic stability; periodic solution

（责任编辑：贾晶晶）

引用格式　谢瑞军. Halanay 不等式在状态依赖时滞脉冲种群系统中的应用[J]. 山东航空学院学报，2025，42(4)：107-111.

XIE R J. Application of Halanay inequality in state-dependent delay impulsive population system[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2025, 42(4): 107-111.