第 42 卷第 4 期 山东航空学院学报 2025 年 8 月
Vol. 42, No. 4 Journal of Shandong University of Aeronautics Aug., 2025

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

具有预警机制的觅食者-掠食者模型的有界解

刘 丹,马 蕊,刘丹丹,蒋 敏

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院,贵州 贵阳 550025)

摘 要: 生物预警机制是生物体维持生存和适应新环境的重要途径之一,生物体通过提高警惕应对来自种群内或种群间的威胁进而维持自身的生存。因此,研究了在光滑有界域中具有预警机制的觅食者-掠食者模型的全局有界解。研究发现,在空间维数 $n\geqslant 2$ 的条件下,当初值和相关参数满足一定条件时,通过应用一些经典的不等式以及 Neumann 热半群理论等,可以证明模型解的正则性,并由此得到模型解在高维空间中的全局存在性和有界性。

关键词: 全局有界性;全局存在性;觅食者;掠食者;逻辑源

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A DOI:10.13486/j.issn.2097-4973.2025.04.016

近年来,许多学者从数学和生物的角度对觅食者-掠食者模型进行了深入研究。文献[1]提出一种觅食者-掠食者模型,得到了在一维条件下模型经典解的全局存在性和一致有界性。考虑物种自身的增长和死亡作用,文献[2]引入了 Logistic 源,证明了解的全局有界性以及大时间行为。关于此模型的其他形式,例如拟线性觅食者-掠食者模型[3]和具有奇异[4]、非线性项[5]或非线性扩散项[6]觅食者-掠食者模型也受到许多学者的关注。在以上模型的基础上,关于三条食物链模型的研究也有很多[7-9]。近几年,具有预警机制的捕食-食饵关系的觅食者-掠食者模型[10]的研究越来越受关注,其主要模型为

$$\begin{cases} u_t=d_1\Delta u+u(1-u)-b_1uv, x\in\Omega, t>0,\\ v_t=d_2\Delta v-\xi\nabla\cdot(v\nabla u)+uv-b_2vw+\theta_1(v-v^2), x\in\Omega, t>0,\\ w_t=\Delta w-\chi\nabla\cdot(w\nabla(uv))+vw+\theta_2(w-w^2), x\in\Omega, t>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0, x\in\partial\Omega, t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x), w(x,0)=w_0(x), x\in\Omega。\end{cases} \tag{1}$$

其中,x 表示猎物、中间捕食者和顶级捕食者所在的位置,t 表示时间,Δu、Δv、Δw 分别表示猎物、中间捕食者和顶级捕食者的自由扩散,$u(1-u)-b_1uv$ 表示猎物的增殖、死亡和竞争,$\theta_2 v(1-v)+uv-b_2uw$ 表示中间捕食者的增殖、死亡和竞争,$\theta_2 w(1-w)+wv$ 表示顶级捕食者的增殖、死亡和竞争,$u=u(x,t)$、$v=v(x,t)$、$w=w(x,t)$ 分别表示猎物、中间捕食者和顶级捕食者的种群密度,d_1、d_2 分别表示猎物和中间捕食者的扩散速率,$-\xi\nabla\cdot(v\nabla u)$ 表示中间捕食者向猎物种群密度高的区域运动,$-\chi\nabla\cdot(w\nabla(uv))$ 表示顶级捕食者向猎物和中间捕食者相互作用产生信号强的区域运动,ξ 和 χ 分别表示中间捕食者跟踪猎物的趋向

收稿日期: 2024-07-08

基金项目: 贵州省教育厅青年人才成长项目(黔教合 KY 字〔2017〕133)

第一作者简介: 刘 丹(1999—),女,仡佬族,贵州道真人,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统研究。
E-mail:1309601797@qq.com

通信作者简介: 蒋 敏(1981—),女,四川泸州人,副教授,博士,主要从事微分方程与动力系统研究。
E-mail:minjiang0701@163.com

项系数、顶级捕食者对猎物和中间捕食者的警惕项系数，b_1、b_2 用于描述猎物和中间捕食者的消耗率，θ_1、θ_2 表示中间捕食者和顶级捕食者的内耗率。文献[11]研究了当 $n\geqslant 3$ 时，通过 L^p 估计和构建 Lyapunov 函数证明了模型解的全局有界性和渐近稳定性。当逻辑源项分别为 $u(\lambda_1-\mu_1 u-a_1 v-a_2 w)$、$v(\lambda_2-\mu_2 v+b_1 u-a_3 w)$、$w(\lambda_3-\mu_3 w+b_2 u+b_3 v)$时，文献[12]证明了解的全局存在性和有界性。

在以上研究的基础上，本文研究具有预警机制的觅食者-掠食者模型

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\chi\nabla\cdot(u\nabla w)+a(u-u^2),x\in\Omega,t>0,\\ v_t=\Delta v-\xi\nabla\cdot(v\nabla(uw))+b(v-v^2),x\in\Omega,t>0,\\ w_t=\Delta w-(u+v)w-\mu w+r(x,t),x\in\Omega,t>0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=\dfrac{\partial w}{\partial\nu}=0,x\in\partial\Omega,t>0,\\ u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),w(x,0)=w_0(x),x\in\Omega。\end{cases}\tag{2}$$

其中，$\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$是具有光滑边界条件的有界域，$\partial/\partial\nu$ 表示在$\partial\Omega$ 上关于 ν 的外方向导数，函数 $u=u(x,t)$和 $v=v(x,t)$分别为觅食者、掠食者的种群密度，$w=w(x,t)$为营养物质的浓度，非负函数 $r=r(x,t)$为营养物质的生产率，$-\chi\nabla\cdot(u\nabla w)$表示捕食者向营养物质浓度高的区域运动，$-\xi\nabla\cdot(v\nabla(uw))$为掠食者向觅食者种群密度高和营养物质浓度高的区域运动，χ、ξ 分别为觅食者被营养物质吸引的趋向项系数以及掠夺者对觅食者消耗营养物质过程中发出信号的警惕项系数，常数 χ、ξ、a、b、μ 均为假定的正数。现给出初始值(u_0,v_0,w_0)和非负的生产速率函数 $r(x,t)$的一些基本假设：

$$(u_0,v_0,w_0)\in(W^{2,\infty}(\Omega))^3,u_0,v_0,w_0\geqslant 0;$$
$$r\in C^2(\bar{\Omega}\times[0,\infty))\cap L^\infty(\Omega\times[0,\infty));r_*:=\|r\|_{L^\infty(\bar{\Omega}\times[0,\infty))}<\infty。\tag{3}$$

定理 1 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$为光滑有界域，初值$(u_0,v_0,w_0)$满足条件(3)，并且

$$p>\frac{n}{2},n<q<2p,\theta:=\frac{2(p-1)}{2(p-1)-q}>1,\eta:=\frac{2pq}{2p-q}>n,$$

则模型(2)存在全局有界经典解(u,v,w)，满足$(u,v,w)\in(C^0(\bar{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2,1}(\bar{\Omega}\times[0,\infty)))^3$，且存在常数 $C>0$ 使得对任意的 $t>0$，有

$$\|u(\cdot,t)\|_{W^{1,2q}(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{W^{1,2q}(\Omega)}\leqslant C。$$

在下文中，在空间 Ω 上关于 x 的积分符号 $\mathrm{d}x$ 均省略，M、$M_i(i=1,2)$、$m_i(i=1,2,\cdots)$、$C_i(i=1,2,\cdots)$均为正常数。

1 预备知识

在证明主要结果之前，先给出模型(2)经典解的局部存在性。

引理 1(局部存在性) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$为具有光滑边界的有界域，且条件(3)成立，则存在 $T_{\max}\in(0,\infty)$使得模型(2)具有唯一的非负经典解$(u,v,w)\in(C^0(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max}))\cap C^{2,1}(\bar{\Omega}\times[0,T_{\max})))^3$，对任意的 $t\in(0,T_{\max})$满足 $u,v,w>0$。此外，若 $T_{\max}<\infty$，则

$$\lim_{t\to T_{\max}}\sup(\|u(\cdot,t)\|_{W^{1,2p}(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{W^{1,2p}(\Omega)})=\infty。$$

下面给出证明定理 1 需要用到的一些重要引理。

引理 2 设 $t\in(0,T_{\max})$，$\tau\in(0,T)$(其中 $T<T_{\max}$)，$a>0$ 和 $b>0$，假设函数 $y:[0,T_{\max})\to[0,+\infty)$是一致连续的并且满足 $y'(t)+ay(t)\leqslant h(t)$。其中，非负函数 $h(x)\in L^1_{loc}([0,T_{\max}))$满足：当 $t\in[0,T-\tau)$时，若$\int_t^{t+\tau}h(x)\mathrm{d}x\leqslant b$，则 $y(t)\leqslant\max\{y(0)+b,\frac{b}{a\tau}+2b\}$。

引理 3 假设引理 1 中的条件成立，则对任意的 $t\in(0,T_{\max})$，模型(2)的解满足

$$\|w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant M。\tag{4}$$

引理 3 的详细证明参考文献[1]的引理 2.2,此处省略其详细证明过程。

2　解的有界性及定理 1 的证明

接下来,将通过一些引理逐步得出(u,v,w)的有界性及定理 1 的证明。

引理 4　设 $n\geqslant 2, M=\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{r_*}{\mu}$,则对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,有

$$\int_\Omega u\leqslant m_1,\int_\Omega v\leqslant m_2,\ m_1=\int_\Omega u_0+|\Omega|,m_2=\int_\Omega v_0+|\Omega|。\tag{5}$$

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega u^2\leqslant m_3,\int_t^{t+\tau}\int_\Omega v^2\leqslant m_4。\tag{6}$$

证明　由 Hölder 不等式,有$\frac{1}{|\Omega|}(\int_\Omega u)^2\leqslant\int_\Omega u^2$,对模型(2) 中的第一个方程进行积分,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u=a\int_\Omega u-a\int_\Omega u^2\leqslant a\int_\Omega u-\frac{a}{|\Omega|}(\int_\Omega u)^2,\tag{7}$$

由 Gronwall 不等式,有

$$\int_\Omega u\leqslant\max\{|\Omega|,\int u_0\}。\tag{8}$$

将式(7) 在$(t,t+\tau),\tau\in(0,T_{\max}-t)$ 上积分,并由式(8) 知$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega u^2\leqslant m_3$,类似地,可以得到 v 的估计。

引理 5　假设条件(3) 成立,则存在常数 $m_5,m_6>0$ 使得对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,有

$$\int_\Omega|\nabla w(\cdot,t)|^{2(p+1)}\leqslant m_5,\tag{9}$$

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\Delta w(\cdot,t)|^{p+1}\leqslant m_6。\tag{10}$$

证明　该证明的详细过程见文献[13] 的引理 3.1 和引理 3.2 中 $\lambda=1$ 时的情形。

引理 6[14]　假设条件(3) 成立,则存在常数 $m_7,m_8>0$ 使得对任意的 $t\in(0,T_{\max})$ 有

$$\int_\Omega|\nabla w|^{2(p-1)}\leqslant m_7,\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla w|^{2p}\leqslant m_8。\tag{11}$$

引理 7　假设条件(3) 成立,则对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,存在 $M_1>0$ 使得模型(2) 的解满足

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant M_1。\tag{12}$$

证明　对任意给定的 $T\in(0,T_{\max})$,令

$$H(T)=\sup_{t\in(0,T)}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}<\infty,\tag{13}$$

取 $p>\frac{n}{2},n<q<2p$,并对模型(2) 的第一个方程应用常数变易法,则存在 $C_1,\lambda_1>0$ 使得

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=&\|e^{t\Delta}u_0+\int_0^t e^{(t-s)\Delta}(-\chi\nabla\cdot(u\nabla w)+a(u-u^2))\mathrm{d}s\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\\ &\|e^{t\Delta}u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\chi\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}\nabla\cdot(u\nabla w)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s+\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}a(u-u^2)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\leqslant\\ &\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}+C_1\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})e^{-\lambda_1(t-s)}\|(u\nabla w)\|_{L^q(\Omega)}\mathrm{d}s+\\ &\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}a(u-u^2)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{14}$$

由式(5)、式(6) 和 $H(T)$ 的定义,有

$$\|u\nabla w\|_{L^q(\Omega)}\leqslant\|u\|_{L^\theta(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}\leqslant\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{\theta}}H^{\frac{\theta-1}{\theta}}(T)\|\nabla w\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}\leqslant C_2H^{\frac{\theta-1}{\theta}}(T),\tag{15}$$

其中,$C_2>0,\theta=\frac{2(p-1)q}{2(p-1)-q}>1$。令 $g(u)=au-au^2$,有 $au-au^2\leqslant g(\frac{1}{2})\leqslant a$。根据 Neumann 热半

群理论[15] 和式(14),存在 $C_3>0$ 使得

$$\int_0^t \| e^{(t-s)\Delta} a(u-u^2) \|_{L^\infty(\Omega)} ds \leqslant \gamma_1 \int_0^t \left(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} e^{-\lambda_1(t-s)}\right) \| a(u-u^2) \|_{L^q(\Omega)} ds \leqslant C_3, \quad (16)$$

结合式(13) ～ (16),存在 $C_4, C_5>0$ 使得 $\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C_4+C_5 H^{\frac{\theta-1}{\theta}}(T)$,即 $H(T) \leqslant C_4+C_5 H^{\frac{\theta-1}{\theta}}(T)$。由 Young 不等式,存在 $C_6>0$ 使得 $H(T)<C_6$。因此式(12) 证毕。

引理 8 假设条件(3) 成立,则存在常数 $m_9, m_{10}>0$ 使得对任意的 $t \in (0, T_{\max})$,有

$$\int_\Omega |\nabla u|^{2p} \leqslant m_9, \int_t^{t+\tau} \int_\Omega |\nabla u|^{2(p+1)} \leqslant m_{10}。 \quad (17)$$

证明 由文献[16] 的引理 2.2 知,对任意的 $t \in (0, T_{\max})$,有

$$\int_\Omega |\nabla u^{2(p+1)}| \leqslant 2(n+2p^2) \| u \|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u^{2(p-1)}| |D^2 u|^2。 \quad (18)$$

结合式(12),有

$$\int_\Omega |\nabla u^{2(p+1)}| \leqslant 2(n+2p^2) M_1^2 \int_\Omega |\nabla u^{2(p-1)}| |D^2 u|^2 =: k \int_\Omega |\nabla u^{2(p-1)}| |D^2 u|^2, \quad (19)$$

其中,$k=2(n+2p^2)M_1^2$。由模型(2) 的第 1 个方程可知

$$\frac{1}{2p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^{2p} + \int_\Omega |\nabla u|^{2p} = \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \nabla u_t + \int_\Omega |\nabla u|^{2p} =$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \nabla[\Delta u - \chi \nabla\cdot(u \nabla w) + a(u-u^2)] + \int_\Omega |\nabla u|^{2p}。 \quad (20)$$

由文献[16] 的引理 2.6 知,存在常数 $C_7>0$ 使得

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{2(p-1)} \partial_v |\nabla u|^2 ds \leqslant (p-1)\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-2)} |\nabla|\nabla u|^2|^2 + C_7 \int_\Omega |\nabla u|^{2p} =$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \Delta \nabla u - \chi \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \Delta(u \nabla w) +$$
$$a\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u(\nabla u - 2u\nabla u) + \int_\Omega |\nabla u|^{2p} \leqslant$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \Delta \nabla u + \chi \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \nabla u \cdot \Delta(u \nabla w) + (a+1)\int_\Omega |\nabla u|^{2p} =:$$
$$I_1(t) + I_2(t) + (a+1)\int_\Omega |\nabla u|^{2p}。 \quad (21)$$

因此,应用 Green 公式、式(20) 及 $\nabla u \cdot \nabla\Delta u = \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 - |D^2 u|^2$,得

$$I_1(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \Delta |\nabla u|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} |D^2 u|^2 =$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla|\nabla u|^{2(p-1)} \cdot \nabla|\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{2(p-1)} \partial_v |\nabla u|^2 ds - \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} |D^2 u|^2 =$$
$$-\frac{p-1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-2)} |\nabla|\nabla u|^2|^2 + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{2(p-1)} \partial_v |\nabla u|^2 ds - \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} |D^2 u|^2 \leqslant$$
$$\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-2)} |D^2 u|^2 + \frac{C_7}{2}\int_\Omega |\nabla u|^{2p}。 \quad (22)$$

接下来,计算 $I_2(t)$:

$$I_2(t) = \chi \int_\Omega (\nabla|\nabla u|^{2(p-1)} \cdot \nabla u + |\nabla u|^{2(p-1)} \Delta u)(\nabla u \cdot \nabla w + u\Delta w) =$$
$$\chi \int_\Omega (\nabla|\nabla u|^{2(p-1)} \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nabla w) + \chi \int_\Omega u\Delta w(\nabla|\nabla u|^{2(p-1)} \cdot \nabla u) +$$
$$\chi \int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)} \Delta u(\nabla u \cdot \nabla w) + \chi \int_\Omega u |\nabla u|^{2(p-1)} \Delta u \cdot \Delta w =: h_1(t) + h_2(t) + h_3(t) + h_4(t)。 \quad (23)$$

应用 Young 不等式，结合$\nabla|\nabla u|^2=2D^2u\cdot\nabla u$和式(12)(19)，得

$$h_1(t)=\chi(p-1)\int_\Omega(|\nabla u|^{2(p-2)}\nabla|\nabla u|^2\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nabla w)\leqslant$$

$$\chi(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|\nabla w||\nabla|\nabla u|^2|=2\chi(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|\nabla w||D^2u\cdot\nabla u|\leqslant$$

$$2\chi(p-1)\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|\nabla w||D^2u|\leqslant\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+8\chi^2(p-1)^2\int_\Omega|\nabla u|^{2p}|\nabla w|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+\frac{1}{8k}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p+1)}+8^{2p+1}k^p[\chi(p-1)]^{2(p+1)}\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+8^{2p+1}k^p[\chi(p-1)]^{2(p+1)}\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)},\tag{24}$$

$$h_2(t)=\chi(p-1)\int_\Omega u|\nabla u|^{2(p-2)}\Delta w(\nabla|\nabla u|^2\cdot\nabla u)\leqslant2\chi(p-1)\int_\Omega u|\nabla u|^{2(p-1)}|\Delta w||D^2u|\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+8[\chi^2M_1(p-1)]^2\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|\Delta w|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+\frac{1}{8k}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p+1)}+8^pk^{\frac{p-1}{2}}[\chi M_1(p-1)]^{p+1}\int_\Omega|\nabla w|^{p+1}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+8^pk^{\frac{p-1}{2}}[\chi M_1(p-1)]^{p+1}\int_\Omega|\nabla w|^{p+1}。\tag{25}$$

根据不等式$|\Delta u|\leqslant\sqrt{n}|D^2u|$、Young 不等式及式(19)，有

$$h_3(t)\leqslant\chi\sqrt{n}\int_\Omega|\nabla u|^{2p-1}|\nabla w||D^2u|\leqslant\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|+2n\chi^2\int_\Omega|\nabla u|^{2p}|\nabla w|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+\frac{1}{8k}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p+1)}+(8k)^p(2n\chi^2)^{p+1}\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}\leqslant$$

$$\frac{1}{4}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+(8k)^p(2n\chi^2)^{p+1}\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)},\tag{26}$$

$$h_4(t)\leqslant\sqrt{n}M_1\chi\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u||\Delta w|\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+2n\chi^2M_1^2\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|\Delta w|^2\leqslant$$

$$\frac{1}{8}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+\frac{1}{16k}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p+1)}+(16k)^{\frac{p-1}{2}}(2n\chi^2M_1^2)^{\frac{p+1}{2}}\int_\Omega|\nabla w|^{p+1}\leqslant$$

$$\frac{3}{16}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+(16k)^{\frac{p-1}{2}}(2n\chi^2M_1^2)^{\frac{p+1}{2}}\int_\Omega|\nabla w|^{p+1}。\tag{27}$$

将式(24)～(27)代入式(23)，对任意的$t\in(0,T_{\max})$，存在$C_8,C_9>0$使得

$$I_2(t)\leqslant\frac{15}{16}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+C_8\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}+C_9\int_\Omega|\Delta w|^{p+1}。\tag{28}$$

将式(22)(28)代入式(20)得

$$\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^{2p}+\int_\Omega|\nabla u|^{2p}+\frac{1}{16}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|\leqslant$$

$$C_8\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}+C_9\int_\Omega|\Delta w|^{p+1}+(\frac{C_7}{2}+a+1)\int_\Omega|\nabla u|^{2p}。\tag{29}$$

记$C_*=\frac{C_7}{2}+a+1$，结合式(19)，并应用 Young 不等式，有

$$C_*\int_\Omega|\nabla u|^{2p}\leqslant\frac{1}{32k}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p+1)}+(32k)^p(C_*)^{p+1}|\Omega|\leqslant$$

$$\frac{1}{32}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2+(32k)^p(C_*)^{p+1}|\Omega|。\tag{30}$$

将式(30)代入式(29),对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,有

$$\frac{1}{2p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega|\nabla u|^{2p}+\int_\Omega|\nabla u|^{2p}+\frac{1}{32}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2\leqslant$$

$$C_8\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}+C_9\int_\Omega|\nabla w|^{p+1}+(32k)^p(C_*)^{p+1}|\Omega|=:f(x)。\tag{31}$$

根据式(9)(10),存在常数 $C_{10}>0$,对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,有$\int_t^{t+\tau}f(s)\mathrm{d}s\leqslant C_{10}$。根据引理 2,取

$$a=1,b=C_{10},y(t)=\frac{1}{2p}\int_\Omega|\nabla u|^{2p},h(t)=f(t),$$

则存在 $C_{11},C_{12}>0$ 使得$\int_\Omega|\nabla u|^{2p}<C_{11}$。式(17)得以证明。对式(31)在$(t,t+\tau)$,$\tau\in(0,T_{\max}-t)$上积分,结合式(9)(10)及式(19)有

$$\int_t^{t+\tau}\int_\Omega|\nabla u|^{2(p-1)}|D^2u|^2\leqslant C_{12}。$$

式(18)证毕。

引理 9 假设条件(3)成立,则存在 $m_{11}>0$ 使得对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,有

$$\int_\Omega|\nabla w|^{2p}\leqslant m_{11}。\tag{32}$$

证明 根据式(9),应用 Young 不等式,存在常数 $C_{13}>0$ 使得

$$\int_\Omega|\nabla w|^{2p}\leqslant\int_\Omega|\nabla w|^{2(p+1)}+C_{13}\leqslant m_3+C_{13}。$$

因此,式(32)得证。

引理 10 假设条件(3)成立,则存在 $M_2>0$,满足

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant M_2。\tag{33}$$

证明 设 $p>\frac{n}{2}$,取 $n<q<2p$,$\eta=\frac{2pq}{2p-q}>n$,对任意的 $T\in(0,T_{\max})$,令

$$M(T)=\sup_{t\in(0,T_{\max})}\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}<\infty。$$

根据常数变易法和 Neumann 热半群理论[15]知,存在常数 $\lambda_1,\gamma_1,\gamma_2>0$ 使得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}=\|e^{t\Delta}v_0+\int_0^te^{(t-s)\Delta}[-\xi\nabla\cdot(v\nabla(uw))+b(v-v^2)]\mathrm{d}s\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant$$

$$\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\xi\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}v\nabla(uw)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s+\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}b(v-v^2)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\xi\gamma_1\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})e^{-\lambda_1(t-s)}\|v\nabla(uw)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}b(v-v^2)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s。\tag{34}$$

对任意的 $t\in(0,T_{\max})$,用 Minkowski 不等式和 Hölder 不等式,得

$$\|v\nabla(wu)\|_{L^q(\Omega)}\leqslant\|vw\nabla u\|_{L^q(\Omega)}+\|vu\nabla w\|_{L^q(\Omega)}\leqslant\|vw\|_{L^\eta(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^{2q}(\Omega)}+\|vu\|_{L^\eta(\Omega)}\|\nabla w\|_{L^{2q}(\Omega)}\leqslant$$

$$Mm_7M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)(\int_\Omega v)^{\frac{1}{\eta}}+M_1m_9M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)(\int_\Omega v)^{\frac{1}{\eta}}\leqslant Mm_7M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)m_2^{\frac{1}{\eta}}+M_1m_9M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)m_2^{\frac{1}{\eta}},\tag{35}$$

假设 $m(v)=bv-bv^2$,有

$$bv-bv^2\leqslant m(\frac{1}{2})\leqslant b。\tag{36}$$

根据 Neumann 热半群理论[15]、式(34)~(36),得

$$\int_0^t\|e^{(t-s)\Delta}b(v-v^2)\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}s\leqslant\gamma_2\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})e^{-\lambda_1(t-s)}\|b(v-v^2)\|_{L^q(\Omega)}\mathrm{d}s\leqslant C_{13}。\tag{37}$$

结合式(7)～(11),可以得到

$$M(T)\leqslant \|v_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\xi\gamma_1(Mm_7+M_1m_9M)M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)m_2^{\frac{1}{\eta}}\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}\mathrm{d}s+C_{13}\leqslant C_{14}+C_{15}M^{\frac{\eta-1}{\eta}}(T)。\tag{38}$$

其中,$C_{15}=\xi\gamma_1(Mm_7+M_1m_9M)m_2^{\frac{1}{\eta}}\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})})\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)}$。根据 Young 不等式,结合式(34)～(38)得,存在常数 $C_{16}>0$ 使得 $\|v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}\leqslant C_{16}$。因此,引理 10 得证。

定理 1 的**证明**　综上,通过式(4)(12)(17)(32)(33)可以得出

$$\|u(\cdot,t)\|_{W^{1,2q}(\Omega)}+\|v(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\Omega)}+\|w(\cdot,t)\|_{W^{1,2q}(\Omega)}\leqslant C。$$

结合引理 1 可以得到 $T_{\max}=\infty$ 时模型(2)的有界性的证明。定理 1 得证。

3　结论

本文在诸多觅食者-掠食者模型的基础上,结合模型(1),进一步考虑预警机制项的意义,研究了具有预警机制的觅食者-掠食者模型的有界解。通过利用 L^p 估计、Young 不等式、Hölder 不等式、Minkowski 不等式、内插不等式和 Neumann 热半群理论等,对 u、v、w 进行了不同的正则性估计,证明了当初始值 (u_0,v_0,w_0)、营养物质的生产率函数 $r(x,t)$ 和参数 χ、ξ、a、b、μ,满足一定的限制条件时,模型(2)解的全局存在性和有界性。

参考文献:

[1]　TAO Y S, WINKLER M. Large time behavior in a forager-exploiter model with different taxis strategies for two groups in search of food[J]. Mathematical models and methods in applied sciences, 2019, 29(11): 2151-2182.

[2]　WANG J P, WANG M X. Global solution of a diffusive predator-prey model with prey-taxis[J]. Computers & mathematics with applications, 2019, 77(10): 2676-2694.

[3]　CAO X, TAO Y. Boundedness and stabilization enforced by mild saturation of taxis in a producer-scrounger model[J]. Nonlinear analysis: real world applications, 2021, 57: 103189.

[4]　CAO X. Global radial renormalized solution to a producer: scrounger model with singular sensitivities [J]. Mathematical models and methods in applied sciences, 2020, 30(6): 1119-1165.

[5]　LI J, WANG Y. Asymptotic behavior in a doubly tactic resource consumption model with proliferation [J]. Zeitschrift für angewandte mathematical und physik, 2021, 72(1). DOI: 10.1007/s00033-020-01448-9.

[6]　LIU Y, ZHHUANG Y. Boundedness in a high-dimensional forager-exploiter model with nonlinear resource consumption by two species[J]. Zeitschrift für angewandte mathematical und physik, 2020, 71(5). DOI: 10.1007/s00033-020-01376-8.

[7]　ZHAO M, LV S. Chaos in a three-species food chain model with a Beddington-DeAngelis functional response[J]. Chaos, solitons & fractals, 2009, 40(5): 2305-2316.

[8]　PATTANAVAK D, MIISHHRA A, DANA S K. Bistability in a tri-trophic food chain model: Basin stability perspective[J]. Chaos, 2021, 31(7). DOI: 10.1063/5.0054347.

[9]　LI S, WANG K. Global boundedness of a three-species predator-prey model with prey-taxis and competition[J]. Discrete and continuous dynamical systems, 2023, 43(10): 3644-3666.

[10]　LI S, WANG K. Global dynamics of a predator-prey model with alarm-taxis[EB/OL]. [2024-06-

05]. https://arxiv. org/abs/2306. 12828.

[11] ZHANG Y,XU L,XIN Q. Global dynamics of a three-species spatial food chain model with alarm-taxis and logistic source[J]. Nonlinear analysis:real world applications,2024,76:104017.

[12] FUEST M,LANKEIT J. Classical and generalized solutions of an alarm-taxis model[J]. Nonlinear differential equations and applications,2024,31(6). DOI:10. 1007/s00030-024-00989-6.

[13] WANG J P,WANG M X. Global bounded solution of the higher-dimensional forager-exploiter model with/without growth sources[J]. Mathematical models and methods in applied sciences, 2020,30(7):1297-1323.

[14] CHEN Y,LI Z P. Asymptotic behavior in a forager-exploiter model with nonlinear resource consumption with/without general logistic sources[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2023, 519(1):126793.

[15] WINKLER M. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model[J]. Journal of differential equations,2010,248(12):2889-2905.

[16] LANKEIT J,WANG Y L. Global existence,boundedness and stabilization in a high-dimensional chemotaxis system with consumption[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2017,37 (12):6099-6121.

The bounded solution of a forager-exploiter model with alarm-taxis

LIU Dan, MA Rui, LIU Dandan, JIANG Min

(*School of Date Science and Information Engineering*,

Guizhou Minzu University, *Guiyang* 550025, *China*)

Abstract: The biological early warning mechanism is one of the important ways for organisms to maintain survival and adapt to new environments. Organisms maintain their survival by increasing vigilance to deal with threats from within or between populations. Therefore, the global bounded solutions of the forager-predator model with an early warning mechanism in a smooth bounded domain were studied. It was found that under the condition of spatial dimension $n\geqslant 2$, when the initial values and related parameters meet certain conditions, the regularity of the model solution can be proved by applying some classical inequalities and Neumann heat semigroup theory. Thus, the global existence and boundedness of the model solution in high-dimensional space were obtained.

Keywords: global boundedness; global existence; forager; predator; logical source

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 刘丹,马蕊,刘丹丹,等.具有预警机制的觅食者-掠食者模型的有界解[J].山东航空学院学报,2025,42(4):117-124.

LIU D,MA R,LIU D D,et al. The bounded solution of a forager-exploiter model with alarm-taxis[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2025,42(4):117-124.