

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性

王 奇¹, 徐新然², 陈施展²

(1. 安徽大学 数学科学学院, 安徽 合肥 230601;

2. 安徽大学 纽约石溪学院, 安徽 合肥 230039)

摘 要: 考虑一类具无穷时滞的 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程。首先, 利用 Banach 不动点定理及无穷时滞的相空间理论给出方程解存在的充分条件; 然后, 利用 Gronwal 不等式给出该方程的 Hyers-Ulam 稳定性; 最后, 通过实例验证了所得结果。

关键词: Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程; 无穷时滞; Banach 不动点定理; Gronwall 不等式; Hyers-Ulam 稳定性

中图分类号: O 175.12

文献标识码: A

DOI:10.13486/j.issn.2097-4973.2026.04.013

0 引言

Caputo-Fabrizio 分数阶导数^[1]作为 Caputo、Riemann-Liouville 等分数阶导数的一种推广^[2-5], 因为具有非奇异核, 其理论及应用问题受到研究人员广泛关注。文献[6]给出了 Caputo-Fabrizio 分数阶导数的一些结论及其在非线性 Fisher 反应扩散方程中解的存在性及数值模拟等应用。文献[7-9]分别讨论了三类 Caputo-Fabrizio 分数阶生态模型的动力学行为。文献[10]研究了 Caputo-Fabrizio 分数阶冠状病毒大流行模型的最优控制设计与分析的数值解问题。文献[11]研究了 Caputo-Fabrizio 分数阶胶质母细胞瘤多形性解的稳定性、存在性和唯一性问题。Hyers-Ulam 稳定性作为一种特殊类型的数据依赖关系, 由 Ulam 提出^[12-13], Hyers、Aoki、Rassias 及 Obloza 为这一领域的发展做出了贡献^[14-18]。其他关于各种分数阶微分方程的 Ulam 稳定性研究工作见文献[19-26]。

已有的 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程的渐近性质研究多针对有限时滞情形开展, 对具无穷时滞情形的相关问题考虑较少。考虑到无穷时滞的存在性及其对微分方程的渐近性质的影响, 开展具无穷时滞的 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程的解的渐近性研究具有重要的理论意义和应用价值。本文研究如下具无穷时滞的 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程解存在性和 Hyers-Ulam 稳定性

$$\begin{cases} {}^{CF}D_{\alpha}^{\alpha}x(t) = f(t, x_t), t \in [0, T] = J, \\ x(t) = \varphi(t), t \in (-\infty, 0] = I. \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\alpha \in (0, 1)$ 表示函数 $x(t)$ 的 α -阶 Caputo-Fabrizio 分数阶导数, $f \in C(J \times D, \mathbf{R})$, $\varphi \in D$ (D 表示相空

收稿日期: 2026-02-05

基金项目: 安徽省教育厅自然科学研究重点项目(2022AH050108); 安徽大学纽约石溪学院 2026 年大学生学术训练项目(Y010440001)

第一作者简介: 王 奇(1974—), 男, 安徽灵璧人, 副教授, 博士, 主要从事泛函微分方程及生物数学研究。

E-mail: wq200219971974@163.com

间), $x_t \in D$ 表示 $x_t(s) = x(t+s), s \in I, t \in J$ 。

1 预备知识

定义 1^[1] 函数 $f \in H^1(0, b), b > 0, 0 < \alpha < 1$ 的 α -阶 Caputo-Fabrizio 导数定义为

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(1-\alpha)} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right] f'(s) ds, 0 < \alpha < 1.$$

其中, $M(\alpha)$ 是依赖于 α 的正归化函数并且 $M(0) = M(1) = 1$ 。

定义 2^[27] 函数 $f \in H^1(0, b), b > 0$ 的 α -阶 Caputo-Fabrizio 导数表示为

$${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{2(1-\alpha)f(t)}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s) ds, 0 < \alpha < 1,$$

并且当 $f(t)$ 是常数时, ${}^{CF}D_t^\alpha f(t) = 0$ 成立。

引理 1^[28] 设 $x(t), h(t), k(t)$ 都是定义在区间 $[t_0, T], T \leq +\infty$ 上的连续函数, 并且 $k(t) \geq 0$, 则

$$x(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t k(s)x(s) ds, t \in [t_0, T];$$

若 $h(t)$ 是非递减的连续函数, 则

$$x(t) \leq h(t) \exp\left(\int_{t_0}^t k(s) ds\right), t \in [t_0, T]。$$

定义 3^[29] 若存在正实数 c , 使得对任意的 $\epsilon > 0$ 和满足以下不等式的函数 $y(t)$,

$$\begin{cases} \| {}^{CF}D_t^\alpha y(t) - f(t, y_t) \| \leq \epsilon, t \in J, \\ y(t) = \varphi(t), t \in I, \end{cases}$$

存在方程(1)的解 $x(t)$ 使得不等式 $\| x(t) - y(t) \| \leq c\epsilon, t \in J$ 成立, 则称方程(1)是 Hyers-Ulam 稳定的。

关于无穷时滞的相空间 $(D, \| \cdot \|_D)$ 理论, 见文献[30]。

由 $x: (-\infty, 0] \rightarrow X$ 的全部函数构成线性拓扑空间 D , 具半范数 $\| \cdot \|_D$, 若以下条件成立, 则称为可容许相空间 D 。

(A₁) 若 $x: (-\infty, T] \rightarrow X, x_0 \in D$, 则对 $\forall t \in [0, T]$, 以下结论成立:

(a) $x_t \in D$; (b) 存在常数 $H > 0$ 使得 $\| x(t) \| \leq H \| x_t \|_D$; (c) 存在连续函数 $K(t)$, 局部有界函数 $M(t): [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ 使得

$$\| x_t \|_D \leq K(t) \sup\{ \| x(s) \| : s \in [0, t] \} + M(t) \| x_0 \|_D, \quad (2)$$

并且 $K(t), M(t)$ 与 x 无关, $K_T = \sup\{ K(t) : t \in [0, T] \}, M_T = \sup\{ M(t) : t \in [0, T] \}$ 。

(A₂) (A₁) 中的函数 $x(t)$ 使得函数 $x_t \in D$ 在区间 $[0, T]$ 上连续。

(A₃) D 是 Banach 空间。

2 主要结果

(H₁) 若函数 $f \in C(J \times D, \mathbf{R})$, 则存在函数 $c_i(t) \in C(J, \mathbf{R}^+), i = 1, 2$, 满足

$$\| f(t, u) - f(t, v) \| \leq c_1(t) \| u - v \|_D, f(t, 0) = 0, \| f(t, u) \| \leq c_1(t) \| u \|_D + c_2(t)。$$

(H₁') 若函数 $f \in C(J \times D, \mathbf{R})$, 则存在连续函数 $c_1(t)$ 和正常数 c_2 , 满足

$$\| f(t, u) - f(t, v) \| \leq c_1(t) \| u - v \|_D, f(t, 0) = 0,$$

且

$$\| f(t, u) \| \leq c_1(t) \| u \|_D + c_2。$$

(H₂) $\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \hat{c}_1 + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds < 1, t \in J$, 其中 $\hat{c}_1 = \sup\{ c_1(t), t \in J \}$ 。

定理 1 若条件(H₁)、(H₂)成立, 则方程(1)的解在区间 J 上存在并且唯一。

证明 易得函数 $x(t)$ 是方程(1)的解,等价于积分方程

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, x_t) - f(0, x_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s, x_s) ds, & t \in J, \\ \varphi(t), & t \in I. \end{cases}$$

成立。取函数

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(0), & t \in J; \\ \varphi(t), & t \in I. \end{cases}$$

对 $\forall x \in C(J, \mathbf{R})$, 定义

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} x(t) - \varphi(0), & t \in J; \\ 0, & t \in I. \end{cases}$$

由

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, x_t) - f(0, x_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s, x_s) ds, \\ x(t) &= \tilde{z}(t) + \tilde{\varphi}(t), x_t = \tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t, t \in J, \end{aligned}$$

及 $\tilde{z}(t)$ 定义式得积分方程

$$\tilde{z}(t) = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, \tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t) - f(0, \tilde{z}_0 + \tilde{\varphi}_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s, \tilde{z}_s + \tilde{\varphi}_s) ds, t \in J.$$

与方程(1)是等价的。

取完备闭集 $\mathbf{r} = \{\tilde{z} \in C(J, \mathbf{R}) : \tilde{z}_0 = 0\}$ 。考虑有界集 $\Omega = \{x \in \mathbf{r} : \|x\| \leq r\}$, 定义算子 $N : \Omega \rightarrow \Omega$:

$$(N\tilde{z})(t) = \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, \tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t) - f(0, \tilde{z}_0 + \tilde{\varphi}_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s, \tilde{z}_s + \tilde{\varphi}_s) ds, & t \in J, \\ \varphi(t), & t \in I. \end{cases}$$

步骤1 证明算子 N 是到上的。对 $x \in \Omega$ 由 (H'_1) 和式(2)得

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t\| &\leq K(t) [\sup_{t \in J} \{\|\tilde{z}(s)\| : s \in [0, t]\} + \sup_{t \in J} \{\|\tilde{\varphi}(s)\| : s \in [0, t]\}] + M(t) [\|z_0\|_D + \|\tilde{\varphi}_t\|_D] \leq \\ &K_T \sup_{t \in J} \{\|z(s) - \varphi(0)\| : s \in [0, t]\} + K_T \sup_{t \in J} \{\|\varphi(0)\| : s \in [0, t]\} + M_T \|\varphi\|_D \leq \\ &K_T \sup_{t \in J} \{\|z(s)\| + \|\varphi(0)\| : s \in [0, t]\} + K_T \sup_{t \in J} \{\|\varphi(0)\| : s \in [0, t]\} + M_T \|\varphi\|_D \leq \\ &K_T r + K_T \|\varphi(0)\| + K_T \|\varphi(0)\| + M_T \|\varphi\|_D \leq K_T r + 2K_T H \|\varphi\|_D + M_T \|\varphi\|_D = : A', t \in J. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|N\tilde{z}\| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \|f(t, \tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t) - f(0, \tilde{z}_0 + \tilde{\varphi}_0)\| + \\ &\frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t (c_3(s) \|\tilde{x}_s + \tilde{\varphi}_s\|_D + c_4(s)) ds \leq \\ &\frac{2(1-\alpha)c_1(t) \|\tilde{z}_t + \tilde{\varphi}_t\|_D}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha \|\tilde{z}_s + \tilde{\varphi}_s\|_D}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_2(s) ds \leq \\ &\frac{2(1-\alpha)\hat{c}_1 A'}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \frac{2\alpha A'}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_2(s) ds \leq C, t \in J, \end{aligned}$$

则

$$\|N\tilde{z}\| = \sup_{t \in J} \{\|N\tilde{z}(t)\|\} \leq C, \|N\tilde{z}\| \leq \|\varphi\| + C = C' \leq r,$$

即算子 N 是到上的。

步骤2 证明算子 N 的压缩性。任选 $x, y \in \Omega$ 且 $x_0 = y_0 = 0, t \in I$ 。由条件 (H'_1) 和式(2)得

$$\|Nx - Ny\| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \|x_t - y_t\| + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds \|x_t - y_t\| \leq$$

$$\begin{aligned} & \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}c_1(t) \|x_t - y_t\| + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds \|x_t - y_t\| \leq \\ & \left[\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}c_1(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds \right] \times \\ & [K(t) \sup\{\|x(s) - y(s)\| : s \in [0, t]\} + M(t) \|x_0 - y_0\|_D] \leq \\ & \left[\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}c_1(t) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds \right] \|x - y\| \leq \\ & \left[\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}\hat{c}_1 + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_1(s) ds \right] \|x - y\| < \|x - y\|, \end{aligned}$$

则算子 N 是压缩的,有唯一的不动点,从而方程(1)在区间 J 上存在唯一解。

定理 2 若条件 (H'_1) 、 (H_2) 成立,则方程(1)在区间 J 上的解具有存在唯一性。

定理 3 若条件 (H_1) 、 (H_2) 成立,函数 $c_1(t)$ 连续非减,则方程(1)在 J 上具有 Hyers-Ulam 稳定性。

证明 对使得不等式

$$\|{}^c D^\alpha x(t) - f(t, x_t)\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, t \in J,$$

成立的函数 x ,存在函数 $k(t)$ 使得

$${}^c D^\alpha x(t) - f(t, x_t) = k(t), t \in J,$$

且

$$x(t) = \varphi_x(0) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, x_t) - f(0, x_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t [f(s, x_s) + k(s)] ds, t \in J.$$

由定理 1 知,方程(1)的解 $y(t)$ 满足

$$y(t) = \varphi_y(0) + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}(f(t, y_t) - f(0, y_0)) + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t f(s, y_s) ds, t \in J,$$

故由条件 (H_2) 、 $(A_1)(c)$ 及初始函数条件 $\varphi_x(s) = \varphi_y(s), s \in I$,得

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| & \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} \|f(t, x_t) - f(t, y_t)\| + \\ & \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t \|f(s, x_s) - f(s, y_s)\| ds + \int_0^t \|k(s)\| ds \leq \\ & \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \|x_t - y_t\|_D + \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t [c_3(s) \|x_s - y_s\|_D + \|k(s)\|] ds \leq \\ & \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, t]\} + \\ & \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_3(s) \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, s]\} ds + \int_0^t \varepsilon ds, t \in J. \end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned} \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, t]\} & \leq \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, t]\} + \\ & \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)} \int_0^t c_3(s) \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, s]\} ds + \varepsilon t, \\ \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, t]\} & \left[1 - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \right] \leq \\ & \frac{2\alpha \int_0^t c_3(s) \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, s]\} ds}{(2-\alpha)M(\alpha)} + \varepsilon t; \\ \sup\{\|x(\theta) - y(\theta)\| : \theta \in [0, t]\} & \leq \frac{\varepsilon t}{\left[1 - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)} c_1(t) \right]} + \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}\int_0^t c_3(s)\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\|:\theta\in[0,s]\}ds}{\left[1-\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}c_1(t)\right]},$$

再由引理 1 得

$$\sup\{\|x(\theta)-y(\theta)\|:\theta\in[0,t]\}\leq\frac{\frac{\varepsilon t}{(2-\alpha)M(\alpha)}}{\left[1-\frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}c_1(t)\right]}\exp\left(\int_0^t c_3(s)ds\right)=$$

$$\frac{\frac{\varepsilon t}{[(2-\alpha)M(\alpha)-2(1-\alpha)c_1(t)]}}{\exp\left(\int_0^t c_3(s)ds\right)}\leq\frac{T}{[(2-\alpha)M(\alpha)-2(1-\alpha)c_1(T)]}\exp\left(\int_0^T c_3(s)ds\right)\varepsilon,$$

即在 J 上, 方程(1)具有 Hyers-Ulam 稳定性。

定理 4 若条件 (H_1) 、 (H_2) 成立, $c_{11}(t)$ 和 $c_3(t)$ 均为正常数, 则方程(1)具有 Hyers-Ulam 稳定性。

3 例题

例 1 取相空间 $D=\{y\in C((-\infty,0],\mathbf{R}):\lim_{t\rightarrow-\infty}\exp(\lambda t)y(t)\text{存在},\lambda\text{是正常数}\}$, 空间范数为 $\|y\|_D=\sup_{t\leq 0}[\exp(\lambda t)y(t)]$, 式(2)中函数 $K(t)=M(t)=H=1$ 。

考虑 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^{0.8}x(t)=0.01{}^CD_t^{0.6}x(t)+\frac{\exp(t)\|x\|_D}{(\exp(-2t)+\exp(2t))(200+\|x\|_D)}, t\in[0,1]=J, \\ x(t)=\varphi(t), t\in(-\infty,0]=I, \end{cases}$$

其中, $f(t,x)=\frac{\exp(t)\|x\|_D}{(\exp(-t)+\exp(3t))(100+20\|x\|_D)}$, 则 $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leq\frac{1}{200}\|x-y\|_D$, 故定理

1、定理 3 中的假设条件均成立, 则方程(1)在区间 J 上的解存在唯一并具有 Hyers-Ulam 稳定性。

4 结论

本文综合利用不动点方法、无穷时滞的相空间理论、Gronwall 不等式得到 Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程解的存在唯一性和 Hyers-Ulam 稳定性, 补充了该类微分方程在有限时滞情形下解的存在性和稳定性的已有结论。鉴于 Gronwall 不等式的重要作用, 今后笔者将深入研究 Gronwall 不等式的改进和拓展, 并将相关理论成果充分利用到微分方程解的渐近行为研究中。

参考文献:

- [1] Caputo M, Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel[J]. Progress in Fractional Differentiation & Applications, 2015, 1(2): 73-85.
- [2] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations [M]. Amsterdam: Elsevier Science B V, 2006.
- [3] Lakshmikantham V, Leela S, Devi J V. Theory of fractional dynamic systems[M]. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009.
- [4] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. New York: Wiley, 1993.
- [5] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [6] Atangana A. On the new fractional derivative and application to nonlinear Fisher's reaction-diffusion equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 273: 948-956.

- [7] Singh J, Kumar D, Hammouch Z, et al. A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 316: 504-515.
- [8] Khan M A, Hammouch Z, Baleanu D. Modelling the dynamics of hepatitis E via the Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2019, 14(3). DOI: 10. 1051/mmnp/2018074.
- [9] Baleanu D, Jajarmi A, Mohammadi H, et al. A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo-Fabrizio fractional derivative[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, 134. DOI: 10. 1016/j. chaos. 2020. 109705.
- [10] Hani F A, Butt A I K, Ahmad W. Numerical approach to solve Caputo-Fabrizio-fractional model of corona pandemic with optimal control design and analysis[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2023, 46(8): 9751-9782.
- [11] Mahd A M S. Stability, existence, and uniqueness for solving fractional glioblastoma multiforme using a Caputo-Fabrizio derivative[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025, 48(7): 7360-7377.
- [12] Ulam S M. *Problems in modern mathematics*[M]. New York: Wiley, 1960.
- [13] Ulam S M. *A collection of mathematical problems*[M]. New York: Interscience, 1960.
- [14] Hyers D H. On the stability of the linear functional equations[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1941, 27(4). DOI: 10. 1073/PNAS. 27. 4. 222.
- [15] Aoki T. On the stability of linear transformation in Banach spaces[J]. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 1950, 2(1/2): 64-66. DOI: 10. 2969/JMSJ/00210064.
- [16] Rassias T M. On the stability of linear mapping in Banach spaces[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1978, 72: 297-300.
- [17] Rassias T M. On a modified Hyers-Ulam sequence[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1991, 158(1): 106-113.
- [18] Oblaza M. Hyers stability of linear differential equation[J]. *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny. Prace Matematyczne (Annales Mathematicae Silesianae)*, 1993(13): 259-270.
- [19] Benchohra M, Lazreg J E. On stability for nonlinear implicit fractional differential equations[J]. *Le Matematiche*, 2015, 70(2): 49-61.
- [20] Benchohra M, LAZREG J E. Existence and Ulam stability for non-linear implicit fractional differential equations with Hadamard derivative[J]. *Studia Universitatis Babe-Bolyai Mathematica*, 2017, 62(1): 27-38.
- [21] Wang Jinrong, Lv Linli, Zhou Yong. Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative[J]. *Electronic journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011(63): 1-10.
- [22] Khan H, Tunc C, Chen W, et al. Existence theorems and Hyers-Ulam stability for a class of hybrid fractional differential equations with p -Laplacian operator[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2018, 8(4): 1211-1226.
- [23] Guo Yuchen, Chen Mengqi, Shu Xiaobao, et al. The existence and Hyers-Ulam stability of solution for almost periodical fractional stochastic differential equation with fBm[J]. *Stochastic Analysis*

- and Applications, 2021, 39(4): 643-666.
- [24] Shah R H, Irshad N, Lassoued D, et al. Stability of hybrid differential equations in the sense of Hyers-Ulam using Gronwall lemma[J]. Filomat, 2025, 39(4): 1407-1417.
- [25] Althubayani M, Saber S. Hyers-Ulam stability of fractal-fractional computer virus models with the Atangana-Baleanu operator[J]. Fractal and Fractional, 2025, 9(3). DOI: 10.3390/fractalfract9030158.
- [26] 王奇, 邓茜茜, 解晨曦, 等. 中立型 Caputo 分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 山东航空学院学报, 2024, 41(1): 139-144.
- [27] Bashiri T, Vaezpour S M, Neito J J. Approximating solution of Caputo-Fabrizio Volterra's model for population growth in a closed system by Homotopy analysis method[J]. Journal of Function Spaces, 2018. DOI: 10.1155/2018/3152502.
- [28] Corduneanu C. Principles of differential and integral equations[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1971.
- [29] Rus I A. Ulam stabilities of ordinary differential equations in a Banach space[J]. Carpathian Journal of Mathematics, 2010, 26(1): 103-107.
- [30] Hino Y, Murakami S, Naito T. Functional differential equations with infinite delay[M]. Berlin/Heidelberg: Springer, 1991.

On the existence result and Hyers-Ulam stability of Caputo-Fabrizio fractional functional differential equations

WANG Qi¹, XU Xinran², CHEN Shizhan²

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;

2. Stony Brook Institute, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: A class of Caputo-Fabrizio fractional functional differential equations with infinite delay is considered. Firstly, sufficient conditions for the existence of solutions to the equation are obtained by utilizing the Banach fixed point theorem and the theory of infinite delay phase space. Then, the conclusion of Hyers-Ulam stability for the equation is derived by using the Gronwall inequality. Finally, the obtained results are validated through examples.

Keywords: Caputo-Fabrizio fractional functional differential equations; infinite delay; Banach fixed point theorem; Gronwall inequality; Hyers-Ulam stability

(责任编辑: 贾晶晶)

引用格式 王奇, 徐新然, 陈施展. Caputo-Fabrizio 分数阶泛函微分方程解的存在性和 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 山东航空学院学报, 2026, 43(4): 109-115.

Wang Qi, Xu Xinran, Chen Shizhan. On the existence result and Hyers-Ulam stability of Caputo-Fabrizio fractional functional differential equations[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2026, 43(4): 109-115.