

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵模型的
稳定性和 Hopf 分支

李 璐, 张存华

(兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 探讨了一类具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵动力学模型, 研究了模型平衡点的稳定性, 并在正平衡点处确立了 Hopf 分支的存在性条件, 明确了 Hopf 分支的方向及其所产生的周期解的稳定性。为验证理论分析的正确性与可靠性, 利用 Matlab 软件进行了数值模拟。

关键词: 非单调功能反应; 稳定性; Hopf 分支; Smith 增长; 分支周期解

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2026.04.012

0 引言

为揭示自然界中捕食者和食饵之间的动态关系和生态学效应, 对捕食者-食饵模型稳定性的研究一直是一个备受关注的课题。20 世纪初, Volterra 和 Lotka 提出了著名的 Lotka-Volterra 模型^[1-2], 该模型的不足之处在于, 当食饵种群无限增长时, 其功能反应函数 $F(x) = \beta x$ 也随之无限增长, 而在实际的生态系统中, 捕食者不可能一直处于饥饿状态并持续地捕获食饵。

Beddington 和 DeAngelis 提出了经典的 Beddington-DeAngelis(B-D)功能反应函数^[3-4]

$$p_1(u, v) = \frac{mu}{k + nu + bv}.$$

其中, u, v 分别表示捕食者与食饵的种群密度, m 为捕食者对食饵的捕食强度, k 表示种群承载能力, n 和 b 为常数。文献[5]给出了具有方向性和对偶 B-D 功能反应函数的反应扩散捕食者-食饵模型的全局分支结构的精确描述, 将非线性猎物收敛系数作为分支参数的分支理论, 研究了系统的全局分支。文献[6]研究了一个满足齐次 Neumann 边界条件、具有 B-D 功能反应函数的捕食者-食饵模型, 分析了唯一正常数解的局部与全局稳定性以及非常数正解的不存在性, 通过分支定理, 得到了一维情况下非常数正稳态解存在的一个充分条件。文献[7]对一类具有 B-D 功能反应函数的扩散型一食饵-二捕食者模型进行了研究, 得到了共存状态存在的充要条件, 并探讨了共存状态的稳定性与唯一性, 给出了时变系统灭绝与永存的充分条件。文献[8]研究了一类具有 Smith 增长和 B-D 功能反应项且满足齐次 Neumann 边界条件的改进的 Leslie-Gower 捕食者-食饵扩散模型。文献[9-18]研究了一类具有 B-D 功能反应函数的捕食者-食饵模型的动力学行为。尽管相关的研究较多, 但 B-D 功能反应项仍存在一些不足。例如, 在种群密度较低

收稿日期: 2025-03-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(61563026)

第一作者简介: 李 璐(1999—), 女, 甘肃平凉人, 硕士研究生, 主要从事微分方程与动力系统研究。

E-mail: 1194507698@qq.com

通信作者简介: 张存华(1972—), 女, 甘肃兰州人, 教授, 博士, 硕士生导师, 主要从事微分方程与动力系统研究。

E-mail: chzhang72@163.com

的情况下, B-D 功能反应项可能会引发一些单一的动力学行为, 这在某些情况下可能限制模型的适用性。

目前, 针对具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵模型的研究相对有限。因此, 本文考虑具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵模型

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u(1-u)}{1+au} - \frac{mu v}{u^2+k}, \\ \frac{dv}{dt} = \delta v \left(1 - \frac{cv}{u^2+k}\right), \\ u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中, a 表示食饵的 Smith 增长率, δ 表示食饵的内禀增长率, c 表示捕食者之间的竞争强度。

1 平衡点的稳定性和 Hopf 分支

模型(1)的半平凡解满足

$$\begin{cases} f(u, v) = \frac{u(1-u)}{1+au} - \frac{mu v}{u^2+k} = 0, \\ g(u, v) = \delta v \left(1 - \frac{cv}{u^2+k}\right) = 0, \end{cases}$$

故模型(1)有 4 个平衡点: $E_0 = (0, 0)$, 表明捕食者和食饵都灭绝了, $E_1 = (1, 0)$ 表明食饵灭绝, $E_2 = (0, \frac{k}{c})$ 表明捕食者灭绝了, $E_3 = (u^*, v^*)$ 表明捕食者和食饵共存。其中, $E_3 = (u^*, v^*)$ 是模型(1)的正平衡点且

$$u^* = \frac{c-m}{ma+c}, c > m, v^* = \frac{u^{*2}+k}{c}.$$

模型(1)的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1-2u-au^2}{(1+au)^2} - \frac{mvk-mu^2v}{(u^2+k)^2} & -\frac{mu}{u^2+k} \\ \frac{2\delta u}{c} & -\delta \end{pmatrix}.$$

J 在 $E_0 = (0, 0)$ 处的特征值为 1 和 $-\delta$, 因此平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 是一个鞍点, 所以模型(1)在平衡点 $E_0 = (0, 0)$ 处是不稳定的。 J 在 $E_1 = (1, 0)$ 处的特征值为

$$\mu_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}, B = \frac{1}{1+a} + \delta, C = \frac{\delta}{1+a} - \frac{2m\delta}{c(1+k)},$$

此处特征值实部为负, 因此模型(1)在平衡点 $E_1 = (1, 0)$ 处是局部渐近稳定的。 J 在 $E_2 = (0, \frac{k}{c})$ 处的特征

值为 $\mu_3 = \frac{c-m}{c}$ 和 $\mu_4 = -\delta$, 因为 $c > m$, 所以 $\mu_3 > 0$, 因此模型(1)在平衡点 $E_2 = (0, \frac{k}{c})$ 处是不稳定的。

下面主要讨论模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处的稳定性。由 Hopf 分支理论及相应的计算, 得到如下定理。

定理 1 假设参数 c, a, m, k, δ 都是正的, 则对模型(1)有: 若 $\delta > \delta_0$, 则模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处是局部渐近稳定的; 若 $\delta < \delta_0$, 则模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处是不稳定的; 若 $\delta = \delta_0$, 则模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处发生 Hopf 分支。

证明 通过计算, 得到模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J^* = \begin{pmatrix} \frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} & -\frac{mu^*}{u^{*2}+k} \\ \frac{2\delta u^*}{c} & -\delta \end{pmatrix}.$$

定义 δ_0 为

$$\delta_0 = \frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2},$$

将 δ 作为分支参数, 分析模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处 Hopf 分支的存在性。 δ_0 为模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处发生 Hopf 分支的一个临界值。

定义条件(H) $2u^* > 1-au^{*2}$, 则模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处的特征方程是

$$\mu^2 - \text{tr } J^* \mu + \det J^* = 0, \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} \text{tr } J^* &= \frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \delta = \delta_0 - \delta, \\ \det J^* &= \frac{mk\delta v^* - m\delta u^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \frac{\delta - 2\delta u^* - a\delta u^{*2}}{(1+au^*)^2}, \end{aligned}$$

则特征方程(2)有以下解:

$$\mu_{5,6} = \frac{\text{tr } J^* \pm \sqrt{(\text{tr } J^*)^2 - 4\det J^*}}{2}.$$

如果方程(2)的根的实部都为负值, 即 $\delta > \delta_0$ ($\text{tr } J^* < 0$), 则模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处是局部渐近稳定的; 如果方程(2)的根的实部至少有一个为正值, 即 $\delta < \delta_0$ ($\text{tr } J^* > 0$), 则模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处是不稳定的。

下面分析当 $\delta = \delta_0$ 时模型(1)是否发生 Hopf 分支。用

$$\mu = x + iy (x, y \in \mathbf{R})$$

表示特征方程(2)的任一根。当 $|\delta - \delta_0| < \epsilon$ (ϵ 是一个很小的正数) 时, 可以得到 $\mu = i\rho$, $\rho = \sqrt{\det J^*}$, 将 μ 代入方程(2)并分离实部和虚部, 得到

$$2xy - y \text{tr } J^* = 0, \quad (3)$$

通过分析式(3)中 x 关于 δ 的变化率可得, 当 $x=0, \delta=\delta_0$ 时 $\left. \frac{dx}{d\delta} \right|_{\delta=\delta_0} = -\frac{1}{2} < 0$, 由此可知, 横截条件是满足的。因此, 当 $\delta = \delta_0$ 时, 模型(1)在正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 处发生 Hopf 分支。证毕。

2 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性

取变换

$$\tilde{u} = u - u^*, \tilde{v} = v - v^*,$$

将正平衡点 $E_3=(u^*, v^*)$ 平移到原点。为表示方便, 本文仍用 u 和 v 去代替 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$, 则模型(1)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{(u+u^*)(1-(u+u^*))}{1+a(u+u^*)} - \frac{m(u+u^*)(v+v^*)}{(u+u^*)^2+k}, \\ \frac{dv}{dt} = \delta v \left(1 - \frac{c(v+v^*)}{(u+u^*)^2+k} \right), \\ u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0. \end{cases} \quad (4)$$

通过计算模型(4)的雅可比矩阵并研究该矩阵的特征值和特征方程, 就能判断周期解的稳定性。现对模型(4)进行泰勒展开, 有

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u, v, \delta) \\ g(u, v, \delta) \end{pmatrix},$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} & -\frac{mu^*}{u^{*2}+k} \\ \frac{2\delta u^*}{c} & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ f(u, v, \delta) &= \left(\frac{-(1+a)}{(1+au^*)^3} - \frac{mu^*v^*(u^{*2}-3k)}{(u^{*2}+k)^3} \right) u^2 + \frac{m(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} uv + \\ &\left(\frac{a(1+a)}{(1+au^*)^4} - \frac{6mu^{*2}v^*k-mk^2v^*-mu^{*4}v^*}{(u^{*2}+k)^4} \right) u^3 + \frac{-mu^{*3}+3mu^*k}{(u^{*2}+k)^3} u^2v + \dots, \\ g(u, v, \delta) &= \left(\frac{c\delta kv^{*2}-c\delta u^{*2}v^{*2}}{(u^{*2}+k)^3} \right) u^2 - \left(\frac{4c\delta u^*v^*}{(u^{*2}+k)^2} \right) uv - \frac{c\delta}{u^{*2}+k} v^2 + \\ &\left(\frac{4c\delta u^{*3}v^{*2}-8c\delta ku^*v^{*2}}{3(u^{*2}+k)^4} \right) u^3 + \frac{2c\delta kv^*-2c\delta u^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^3} u^2v + \dots. \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)中雅可比矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \text{tr } \mathbf{J}^* \lambda + \det \mathbf{J}^* = 0, \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} \text{tr } \mathbf{J}^* &= \frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \delta, \\ \det \mathbf{J}^* &= \frac{mk\delta v^*-m\delta u^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \frac{\delta-2\delta u^*-a\delta u^{*2}}{(1+au^*)^2}. \end{aligned}$$

特征方程(6)的特征根是 $\lambda = M(\delta) \pm iN(\delta)$, 其中

$$\begin{aligned} M(\delta) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*u^{*2}+mv^*k-2mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \delta \right), \\ N(\delta) &= \left[4 \left(\frac{mk\delta v^*-m\delta u^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \frac{\delta-2\delta u^*-a\delta u^{*2}}{(1+au^*)^2} \right) - \right. \\ &\left. \left(\frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*u^{*2}+mv^*k-2mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \delta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

若 $N(\delta)$ 满足

$$4 \left(\frac{mk\delta v^*-m\delta u^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \frac{\delta-2\delta u^*-a\delta u^{*2}}{(1+au^*)^2} \right) - \left(\frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*u^{*2}+mv^*k-2mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - \delta \right)^2 > 0,$$

则特征值 λ 是一对共轭复根。当 $\delta = \delta_0$ 时, λ 是纯虚根且 $M(\delta_0) = 0$ 。在这种情况下, 特征值 $\lambda = \pm iN(\delta_0)$ 。

根据 Poincare-Andronov-Hopf 分支定理, 可得到以下定理。

定理 2 假定参数 δ 为正, 则有以下结果成立: 当 $c(\delta_0) < 0$ 时, 模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处的 Hopf 分支方向是超临界的, 且分支周期解是稳定的; 当 $c(\delta_0) > 0$ 时, 模型(1)在正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*)$ 处的 Hopf 分支方向是次临界的, 且分支周期解是不稳定的。

证明 定义矩阵 $\mathbf{B}$ 为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & Q \end{pmatrix},$$

特征值 $\lambda = M(\delta) \pm iN(\delta)$ 所对应的特征向量是 $\begin{pmatrix} 1 \\ P - iQ \end{pmatrix}$, 其中

$$P = \frac{\left(\frac{1-2u^*-au^{*2}}{(1+au^*)^2} - \frac{mv^*k-mu^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^2} - M(\delta) \right)}{\left(\frac{mu^*}{u^{*2}+k} \right)},$$

$$Q = \left(N(\delta) / \left(\frac{mu^*}{u^{*2}+k} \right) \right),$$

则可获得矩阵 B 的逆矩阵

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{P}{Q} & \frac{1}{Q} \end{bmatrix}.$$

接下来, 做一个变换, 用 (x, y) 代替 (u, v) , 有

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ Px + Qy \end{bmatrix},$$

则式(5)变为

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = J^*(\delta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(x, y, \delta) \\ G(x, y, \delta) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} F(x, y, \delta) &= \left(\frac{-(1+a)}{(1+au^*)^3} - \frac{mu^{*3}v^* - 3mku^*v^*}{(u^{*2}+k)^3} + \frac{Pm(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} \right) x^2 + \frac{Qm(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} xy + \\ &\quad \left(\frac{a(1+a)}{(1+au^*)^4} - \frac{mk^2v^* - mu^{*4}v^* + 6mku^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^4} + \frac{p(3mu^*k - mu^{*3})}{(u^{*2}+k)^3} \right) x^3 + \dots, \\ G(x, y, \delta) &= -\frac{P}{Q}(F(x, y, \delta)) + \frac{1}{Q}g(x, y, \delta), \\ g(x, y, \delta) &= \left(\frac{\delta k - \delta u^{*2}}{c(u^{*2}+k)} + P \left(\frac{4\delta u^*}{u^{*2}+k} \right) - P^2 \left(\frac{c\delta}{u^{*2}+k} \right) \right) x^2 + \\ &\quad \left(Q \left(\frac{4\delta u^*}{u^{*2}+k} \right) - PQ \left(\frac{2c\delta}{u^{*2}+k} \right) \right) xy - Q^2 \frac{c\delta}{u^{*2}+k} y^2 + \dots. \end{aligned}$$

将式(7)改写为极坐标的形式, 可得

$$\begin{cases} R' = M(\delta)R + c(\delta)R^3 + \dots, \\ \theta' = N(\delta) + a(\delta)R^2 + \dots, \end{cases} \quad (8)$$

再将式(8)在 $\delta = \delta_0$ 处泰勒展开, 得到

$$\begin{cases} R' = M'(\delta_0)(\delta - \delta_0)R + c(\delta_0)R^3 + \dots, \\ \theta' = N(\delta_0) + N'(\delta_0)(\delta - \delta_0) + a(\delta_0)R^2 + \dots. \end{cases}$$

为判断 Hopf 分支周期解的稳定性及 Hopf 分支方向, 需要算出系数 $c(\delta_0)$ 的值. $c(\delta_0)$ 定义为

$$\begin{aligned} c(\delta_0) &= \frac{1}{16} [F_{xxx} + F_{xyy} + G_{xxy} + G_{yyx}] \Big|_{(0,0,\delta_0)} + \frac{1}{16N(\delta_0)} \times \\ &\quad [F_{xy}(F_{xx} + F_{yy}) - G_{xy}(G_{xx} + G_{yy}) - F_{xx}G_{xx} + F_{yy}G_{yy}] \Big|_{(0,0,\delta_0)}, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} F_{xxx} &= 6 \left(\frac{a(1+a)}{(1+au^*)^4} - \frac{mk^2v^* - mu^{*4}v^* + 6mku^{*2}v^*}{(u^{*2}+k)^4} + \frac{p(3mu^*k - mu^{*3})}{(u^{*2}+k)^3} \right), \\ F_{xx} &= 2 \left(\frac{-(1+a)}{(1+au^*)^3} - \frac{mu^{*3}v^* - 3mku^*v^*}{(u^{*2}+k)^3} + \frac{Pm(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{xx} &= -2 \frac{P}{Q} \left(\frac{-(1+a)}{(1+au^*)^3} - \frac{mu^{*3}v^* - 3mku^*v^*}{(u^{*2}+k)^3} + \frac{Pm(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} \right) + \\
 &\quad 2 \frac{1}{Q} \left(\frac{\delta k - \delta u^{*2}}{c(u^{*2}+k)} + P \left(\frac{4\delta u^*}{u^{*2}+k} \right) - P^2 \left(\frac{c\delta}{u^{*2}+k} \right) \right), \\
 G_{xy} &= -P \frac{m(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2} + \left(\frac{4\delta u^*}{u^{*2}+k} \right) - P \left(\frac{2c\delta}{u^{*2}+k} \right), \\
 F_{xy} &= \frac{Qm(u^{*2}-k)}{(u^{*2}+k)^2}, G_{yy} = \frac{Qc\delta}{u^{*2}+k}, F_{xyy} = G_{xxy} = G_{yyy} = 0, \mu^* = -\frac{c(\delta_0)}{M'(\delta_0)}.
 \end{aligned}$$

因为 $M'(\delta) \Big|_{\delta=\delta_0} = -0.5 < 0$, 所以根据 Poincare-Andronov-Hopf 分支理论知: 若 $c(\delta_0) < 0$, 则分支周期解是稳定的, 且 Hopf 分支方向是超临界的; 若 $c(\delta_0) > 0$, 则分支周期解是不稳定的, 且 Hopf 分支方向是次临界的。证毕。

3 数值模拟

利用 Matlab 软件对理论分析进行相应的数值模拟。选取参数 $a=0.08, m=0.28, k=0.13, c=0.39$, 则模型(1)变为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{u(1-u)}{1+0.08u} - \frac{0.28uv}{u^2+0.13}, \\ \frac{dv}{dt} = \delta v \left(1 - \frac{0.39v}{u^2+0.13} \right), \\ u(0) = u_0 > 0, v(0) = v_0 > 0. \end{cases} \quad (9)$$

模型(9)有正平衡点 $E_3 = (u^*, v^*) = (0.2667, 0.5158)$, Hopf 分支的临界值 $\delta_0 = 0.2317$ 。 $\delta > \delta_0$ 与 $\delta < \delta_0$ 时的模拟结果分别如图 1、图 2 所示。

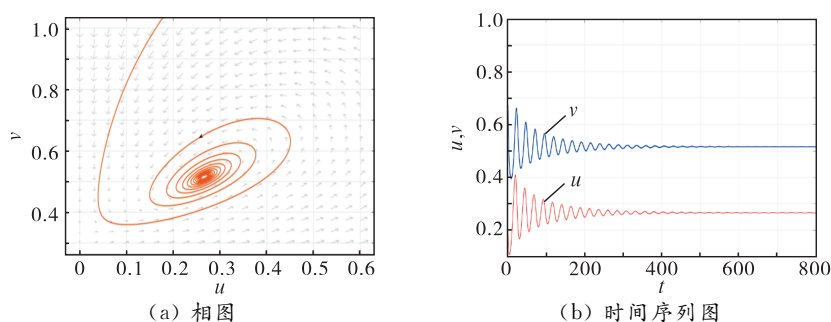


图 1 当 $\delta=0.25 > \delta_0=0.2317$ 时, 模型(9)在 E_3 处局部渐近稳定

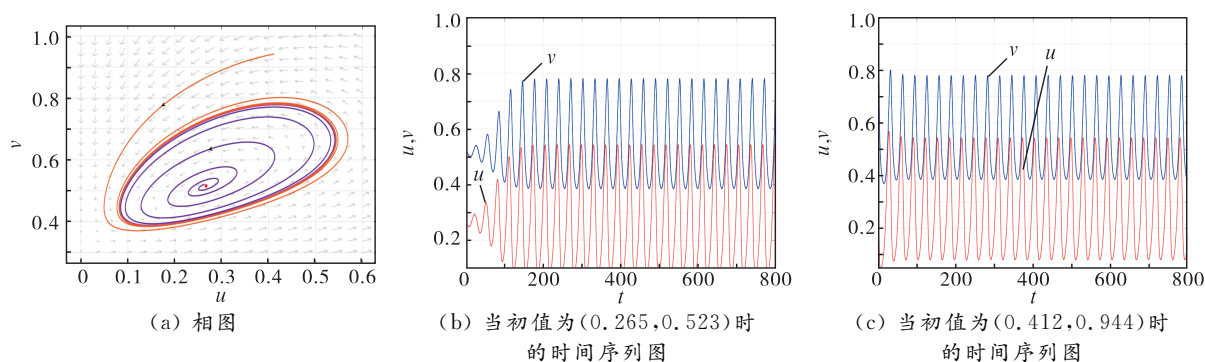


图 2 当 $\delta=0.17 < \delta_0$ 时, 模型(9)在 E_3 处不稳定, 并产生稳定的分支周期解

由定理 1 得, 当 $\delta > \delta_0$ 时, 模型(9)在正平衡点 E_3 处是局部渐近稳定的, 如图 1 所示。当 $\delta < \delta_0$ 时, 模

型(9)在正平衡点 E_3 处是不稳定的。通过计算得到 $c(\delta_0) = -16.1172 < 0$, 所以由定理 2 得, 模型(9)在正平衡点 E_3 处产生稳定的分支周期解, 如图 2 所示。

4 结语

本文考虑了一类具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵模型的稳定性与 Hopf 分支。当分支参数 δ 等于临界值 δ_0 时, 模型发生 Hopf 分支。通过计算系数 $c(\delta_0)$ 确定分支周期解的稳定性和 Hopf 分支方向, 即当 $c(\delta_0) < 0$ 时, Hopf 分支方向是超临界的, 且分支周期解是稳定的, 而当 $c(\delta_0) > 0$ 时, Hopf 分支方向是次临界的, 且分支周期解是不稳定的。利用 Matlab 软件进行数值模拟, 验证了理论分析的正确性。

参考文献:

- [1] Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi[M]. Rome: Società Anonima Tipografica Leonardo da Vinci, 1926.
- [2] Lotka A J. Elements of physical biology[M]. Philadelphia: Williams & Wilkins, 1925.
- [3] Beddington J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency[J]. Journal of Animal Ecology, 1975; 331-340.
- [4] Deangelis D L, Goldstein R A, Oneill R V. A model for trophic interaction[J]. Ecology, 1975, 56(4): 881-892.
- [5] Luo Demou, Wang Qiru. Global bifurcation for a Beddington-DeAngelis and Tanner predator-prey reaction-diffusion system with prey-taxis[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2024, 47(3): 1711-1727.
- [6] Jiang Hongling, Wang Lijuan, Yao Ruofei. Numerical simulation and qualitative analysis for a predator-prey model with B-D functional response[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2015, 117: 39-53.
- [7] Zhang Guohong, Wang Wendi, Wang Xiaoli. Coexistence states for a diffusive one-prey and two-predators model with B-D functional response [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 387(2): 931-948.
- [8] Feng Xiaozhou, Liu Xia, Sun Cong, et al. Stability and Hopf bifurcation of a modified Leslie-Gower predator-prey model with Smith growth rate and B-D functional response[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 174. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113794.
- [9] Zhang Kexin, Zhang Yi, Liu Lu. Event-triggered sliding mode control of biological systems with Beddington-DeAngelis functional response[C]//2024 43rd Chinese Control Conference (CCC). [s. l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2024: 561-566.
- [10] Abbasi M A, Niaz R, Albalawi O, et al. Dynamical analysis of an ecological model with prey refuge and Beddington-DeAngelis functional response[J]. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 2025, 39(9): 3827-3852.
- [11] Wu Sanxing, Wang Zhicheng, Ruan Shigui. Hopf bifurcation in an age-structured predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response and constant harvesting[J]. Journal of Mathematical Biology, 2024, 88(5). DOI: 10.1007/s00285-024-02070-3.
- [12] Zhu Qun, Chen Fengde, Li Zhong, et al. Global dynamics of two-species amensalism model with Beddington-DeAngelis functional response and fear effect[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2024, 34(6). DOI: 10.1142/S0218127424500755.

- [13] Wu Sanxing, Zhang Liang. Hopf bifurcation in an age-structured predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response and double time delays[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025, 48(18): 16868-16887.
- [14] Xue Yalong. Impact of both-density-dependent fear effect in a Leslie-Gower predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, 185. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.115055.
- [15] 黄开娇, 肖飞雁. 具有 Beddington-DeAngelis 型功能性反应的随机时滞捕食-被捕食系统[J]. *广西师范大学学报(自然科学版)*, 2024, 42(3): 141-150.
- [16] 肖嘉庆, 冯孝周, 历东平, 等. 具有 B-D 功能反应项和不连续收获的分段阶捕食-食饵模型动力学分析[J]. *西安工业大学学报*, 2023, 43(5): 440-446.
- [17] 卢晔, 李敏. 具有 Beddington-DeAngelis 型功能反应函数的阶段结构捕食-食饵模型[J]. *数学的实践与认识*, 2022, 52(11): 263-275.
- [18] 黄开娇. 两类具有 Beddington-DeAngelis 型功能性反应的随机捕食-被捕食系统[D]. 桂林: 广西师范大学, 2017.

Stability and Hopf bifurcation of predator-prey models with non-monotonic functional response functions

LI Lu, ZHANG Cunhua

(School of Mathematics and Physics,
Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A class of predator-prey dynamical models with non-monotonic functional response functions are explored, the stability of the model's equilibrium points are investigated, and the existence conditions for Hopf bifurcation at the positive equilibrium are established. The direction of Hopf bifurcation and the stability of the resulting periodic solutions are clarified. To verify the correctness and reliability of the theoretical analysis, numerical simulations are conducted using the Matlab software.

Keywords: non-monotonic functional response term; stability; Hopf bifurcation; Smith growth; branching of periodic solutions

(责任编辑: 贾晶晶)

引用格式 李璐, 张存华. 具有非单调功能反应函数的捕食者-食饵模型的稳定性和 Hopf 分支[J]. *山东航空学院学报*, 2026, 43(4): 101-108.

Li Lu, Zhang Cunhua. Stability and Hopf bifurcation of predator-prey models with non-monotonic functional response functions[J]. *Journal of Shandong University of Aeronautics*, 2026, 43(4): 101-108.