

【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

一类具有通量限制的趋化模型解的 有界性与持久性

吕芹芹, 卢江涛, 蒋 敏

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要:研究了在全空间上一类具有逻辑源项和通量限制的趋化模型解的有界性和持久性。通过应用热半群的 L^p-L^q 估计、Young 不等式等,得到了当 $k>1$ 时模型解在全空间的全局有界性。进一步,当 $1<k<2, a>1$ 时,得到模型解在全空间上的持久性。

关键词:趋化模型;全局存在性;全局有界性;通量限制;持久性;逻辑源

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:**10.13486/j.issn.2097-4973.2026.04.014

0 引言

20 世纪 70 年代, Keller 和 Segel 提出了经典的 K-S 趋化模型^[1]用于描述细胞或细菌朝着化学信号浓度梯度方向做定向运动的生物现象。为更准确地描述细胞或微生物在有限空间内的生长与相互作用,反映生物体在有限资源下的增长限制,许多学者对带有逻辑源项的 K-S 模型展开进一步研究^[2-4]。文献[5]研究了具有 Neumann 边界条件和非负初值的 K-S 趋化增长模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla v) + au - bu^2, x \in \Omega, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v + \lambda u - \mu u, x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 。当 $\tau > 0, \lambda = \mu = 1$ 时, Winkler 首次证明了模型(1)具有唯一的全局有界经典解,以及当 $\tau = 1$ 时,进一步证明了模型解的渐近稳定性^[5]。当 $\tau \in \{0, 1\}, \lambda = \mu = 1$ 时,在初值满足一定的正则性条件下, Zheng 等证明了逻辑源项为 $au - bu^k (k > 1)$ 的模型(1)至少存在一个全局定义的解^[6]。当 $\tau = 1$ 时, Shen 等将模型(1)在有界域 Ω 上的研究范围推广到全空间 $\mathbf{R}^N$ ^[7-9]上,并证明了在 $b > \frac{N\chi\mu}{4}$ 的条件下,模型(1)具有唯一的非负全局经典解,且解呈现出持久性^[7]。综上所述,现有研究主要以经典的 K-S 模型为核心,聚焦于探究逻辑源项对模型解的有界性、渐近性等影响。然而,这些研究均采用经典趋化项设定,模型对真实趋化现象的刻画存在局限性。为更精准地刻画生物体的趋化现象,引入含有通量限制的趋化模型是非常有必要的。因此,文献[10]在全空间上研究了具有通量限制的 K-S 模型

收稿日期:2025-09-27

基金项目:贵州省教育厅青年人才成长项目(黔教合 KY 字[2017]133)

第一作者简介:吕芹芹(2001—),女,贵州仁怀人,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统研究。

E-mail:3311252900@qq.com

通信作者简介:蒋 敏(1981—),女,四川泸州人,副教授,博士,主要从事微分方程与动力系统研究。

E-mail:minjiang0701@163.com

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u f(|\nabla v|^2) \nabla v) + au - bu^2, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ v_t = \Delta v + u - v, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^N, \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$f(|\nabla v|^2) = \frac{1}{(1 + |\nabla v|^2)^\alpha}, \alpha \geq \frac{1}{2}.$$

该文献通过构造具有拟线性结构的辅助函数证明了模型(2)经典解的全局有界性、持久性和渐近稳定性。

在此之前, 当 $\alpha = \frac{1}{2}$, $N = 2, 3$ 时, Perthame 等证明了模型(2)解的大时间行为^[11]。值得注意的是, 对于含有通量限制的模型(2)解的性质研究, 主要考虑的是具有二次非线性组合的逻辑源项^[10], 那是否可以进一步考虑研究具有高次非线性组合的逻辑源项? 受上述模型启发, 笔者研究如下具有通量限制的趋化模型:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (u f(|\nabla v|^2) \nabla v) + au - bu^k, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v + \lambda u - \mu v, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^N. \end{cases} \quad (3)$$

其中, $f(|\nabla v|^2) = \frac{1}{(1 + |\nabla v|^2)^\alpha}, \alpha \geq \frac{1}{2}, k > 1, N \geq 1, \chi, a, b, \tau, \lambda, \mu$ 均为正常数。

1 预备知识

在本节中, 给出下文证明过程中需要用到的一些基本定义、引理等。

$$C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N) = \{u \in C(\mathbf{R}^N) \mid u(x) \text{ 在 } x \in \mathbf{R}^N \text{ 上一致连续且 } \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |u(x)| < \infty\},$$

其范数为

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |u(x)|,$$

且

$$C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N) = \{u \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N) \mid \partial_{x_i} u(x) \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N), i = 1, 2, 3, \dots, N\}.$$

当 $0 < v < 1$ 时, 有

$$C_{\text{unif}}^{b,v}(\mathbf{R}^N) = \{u \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N) \mid \sup_{x, y \in \mathbf{R}^N, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^v} < \infty\},$$

其范数为

$$\|u\|_{\infty, v} = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} |u(x)| + \sup_{x, y \in \mathbf{R}^N, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^v}.$$

当 $0 < \theta < 1, 0 < t_0 < T \leq \infty$ 时, 有

$$C^\theta([t_0, T], C_{\text{unif}}^{b,v}(\mathbf{R}^N)) = \{u(\cdot) \in C([t_0, T], C_{\text{unif}}^{b,v}(\mathbf{R}^N)) \mid \sup_{s, t \in [t_0, T], s \neq t} \frac{|u(s) - u(t)|}{|s - t|^\theta} < \infty\}.$$

令

$$C(\alpha) = \begin{cases} 1, \alpha = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2\alpha - 1} \left(\frac{2\alpha}{2\alpha - 1} \right)^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

定义 1^[12] 对于初值问题

$$\begin{cases} \tau z_t = \Delta z - kz + f, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ z(x, 0) = z_0(x), x \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

设 X 是巴拿赫空间, $z_0(x) \in X, f \in L^1(0, +\infty; X)$ 。函数 $z(x, t) \in C([0, +\infty); X)$, 有

$$z(x, t) = e^{\frac{\Delta-k}{\tau}t} z_0(x) + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{\frac{\Delta-k}{\tau}(t-s)} f(x, s) ds. \quad (5)$$

当 $0 \leq t < +\infty$ 时, 式(5)为初值问题在 $[0, +\infty)$ 上的可适解。

因为

$$e^{\frac{\Delta-k}{\tau}(t-s)} f(x, s) = \Gamma(t-s) * f(x, s),$$

其中

$$\Gamma(t) = \frac{\tau^{\frac{N}{2}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - k\frac{t}{\tau}}, \quad (6)$$

故可将式(5)改写为

$$z(x, t) = \Gamma(t) * z_0(x) + \frac{1}{\tau} \int_0^t \Gamma(t-s) * f(x, s) ds.$$

引理 1 (解的局部存在性和可延拓性)^[7] 设 $0 \leq u_0 \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)$, $0 \leq v_0 \in C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)$ 和 $k \in (1, \infty)$, 存在一个 $T_{\max} \in (0, \infty]$, 使得模型(3)有唯一的非负经典解 (u, v) , 有

$$u \in C([0, T_{\max}); C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)) \cap C^1((0, T_{\max}); C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)),$$

$$v \in C([0, T_{\max}); C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)) \cap C^1((0, T_{\max}); C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)),$$

$$u, v, \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v, \partial_{x_i x_j}^2 u, \partial_{x_i x_j}^2 v, \partial_t u, \partial_t v \in C^\theta([t_0, T_{\max}); C_{\text{unif}}^{b,v}(\mathbf{R}^N))$$

对于所有 $i, j = 1, 2, \dots, N, 0 < t_0 < T_{\max}, 0 < \theta \leq 1, 0 < v \ll 1$ 成立。因此, 当 $T_{\max} < \infty$ 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)}) = \infty.$$

证明 该引理可仿照文献[7]中的定理 1.1 的证明过程。对于 $\tau = 1$ 的特殊情形证明仍适用于 $\tau > 0$ 的情况。当初值函数 $(u_0, v_0) \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N) \times C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)$ 时, 在有界闭集上应用不动点定理得到的经典解的局部存在性、唯一性、非负性、有界性。其中, $T > 0$ 要选取得足够小。

引理 2^[12-13] 设 $\Gamma(t)$ 由式(6)定义, 则对所有的 $t > 0$, 有

$$\|\Gamma(t) * u(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq e^{-\frac{k}{\tau}t} \|u(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)},$$

$$\|\nabla(\Gamma(t) * u)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{\tau}t} \|u(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}$$

对所有的 $u \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ 成立。

引理 3^[14] 设 $\Gamma(t)$ 由式(6)定义, 则对所有的 $t > 0$, 有

$$\|\Gamma(t) * (\nabla \cdot u)(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{\tau}t} \|u(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}$$

对所有的 $u \in (C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N))^N$ 成立。

引理 4 (格朗沃尔不等式)^[12] 设 $b_1 \geq 0, \beta > 0$, 令 $a(t)$ 和 $g(t)$ 为 $0 \leq t < T \leq +\infty$ 上的局部可积的非负函数。若满足

$$g(t) \leq a(t) + b_1 \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s) ds, \quad 0 \leq t < T,$$

则有

$$g(t) \leq a(t) + \theta \int_0^t E'_\beta(\theta(t-s)) a(s) ds, \quad 0 \leq t < T.$$

其中,

$$\theta = (b_1 \Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}, E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}, E'_\beta(z) = \frac{d}{dz} E_\beta(z).$$

当 $z \rightarrow 0^+$ 时, $E'_\beta(z) \approx \frac{z^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$; 当 $z \rightarrow +\infty$ 时, $E'_\beta(z) \approx \frac{1}{\beta} e^z$ 。

2 主要结果及证明

定理 1 设 $0 \leq u_0 \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)$, $0 \leq v_0 \in C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)$ 和 $k \in (1, +\infty)$, 存在 $\chi^* > 0$ 依赖于 $a, b, \lambda, \mu, k, \tau, N$, $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}, \|\nabla v_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}$, 使得对所有 $\chi < \chi^* = \frac{C(\alpha)}{\rho(a(k-1))}$, 模型(3)存在唯一的非负全局经典解

$$u \in C^0([0, \infty); L^\infty(\mathbf{R}^N)) \cap C^{2,1}(\mathbf{R}^N, (0, \infty)), v \in C^0([0, \infty); W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)) \cap C^{2,1}(\mathbf{R}^N, (0, \infty)),$$

且该解是全局有界的, 即存在正常数 $C > 0$, 使得对于所有的 $t > 0$, 有

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)} \leq C.$$

定理 2 设 $0 \leq u_0 \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)$, $0 \leq v_0 \in C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)$, $a \in (1, +\infty)$, $\inf_{x \in \mathbf{R}^N} u_0(x) > 0$ 和 $k \in (1, 2)$ 。对所有的

$$\chi < \chi_* = \frac{C(\alpha)}{\rho(a-1) + \sqrt{\rho^2(a-1) + \frac{C(\alpha)}{a-1}}},$$

对于模型(3), 有

$$u(x, t) \geq \frac{1}{4} \min \left\{ \inf_{x \in \mathbf{R}^N} u_0(x), \frac{a-1}{b^{\frac{1}{k-1}}} \right\},$$

对所有的 $x \in \mathbf{R}^N, t > 0$ 都成立。

在证明主要结果之前, 先给出模型(3)经典解的全局存在性证明。将模型(3)改为

$$\begin{cases} u_t = (\Delta - a(k-1))u - \chi \nabla \cdot (uf(|\nabla v|^2) \nabla v) + kau - bu^k, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v + \lambda u - \mu v, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^N. \end{cases}$$

对所有的 $x \in \mathbf{R}^N$, 结合定义 1 知,

$$u(x, t) = \Gamma_1(t) * u_0(x) - \chi \int_0^t \Gamma_1(s) * \nabla \cdot (uf(|\nabla v|^2) \nabla v)(x, t-s) ds + \int_0^t \Gamma_1(s) * [kau(x, t-s) - bu^k(x, t-s)] ds, \quad (7)$$

$$v(x, t) = \Gamma_2(t) * v_0(x) + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \Gamma_2(s) * u(x, t-s) ds. \quad (8)$$

其中,

$$\Gamma_1(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - a(k-1)t}, \Gamma_2(t) = \frac{\tau^{\frac{N}{2}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - \frac{\mu}{\tau}t}.$$

引理 5(解的全局存在性) 设 $0 \leq u_0 \in C_{\text{unif}}^b(\mathbf{R}^N)$, $0 \leq v_0 \in C_{\text{unif}}^{b,1}(\mathbf{R}^N)$, $k \in (1, \infty)$, 对所有的 $T > 0$, 使得模型(3)有唯一的非负经典解 (u, v) , 其中,

$$u \in C^0([0, \infty); L^\infty(\mathbf{R}^N)) \cap C^{2,1}(\mathbf{R}^N, (0, \infty)), v \in C^0([0, \infty); W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)) \cap C^{2,1}(\mathbf{R}^N, (0, \infty)).$$

证明 根据文献[9]的不等式

$$kau - bu^k \leq a(k-1) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{k-1}}, k > 1,$$

结合式(7)知,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Gamma_1(t) * u_0(x) - \chi \int_0^t \Gamma_1(t-s) * \nabla \cdot (uf(|\nabla v|^2) \nabla v)(x, s) ds + \\ &\quad \int_0^t \Gamma_1(t-s) * [kau(x, s) - bu^k(x, s)] ds \leq \\ &\quad \Gamma_1(t) * u_0(x) - \chi \int_0^t \Gamma_1(t-s) * \nabla \cdot (uf(|\nabla v|^2) \nabla v)(x, s) ds + \int_0^t \Gamma_1(t-s) * \left[a(k-1) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] ds. \end{aligned}$$

由引理 2、引理 3 及文献[10]的不等式

$$f(|\nabla v|^2)|\nabla v| \leq \max_{\xi>0} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^a} \leq \frac{1}{C(\alpha)}, \alpha \geq \frac{1}{2}$$

知,

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\Gamma_1(t) * u_0(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \int_0^t \|\Gamma_1(t-s) * [a(k-1) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}}]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds + \\ &\quad \chi \int_0^t \|\Gamma_1(t-s) * \nabla \cdot (uf(|\nabla v|^2) \nabla v(x, s))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \leq \\ &\quad e^{-a(k-1)t} \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + a(k-1) \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} \int_0^t e^{-a(k-1)(t-s)} ds + \\ &\quad \frac{\chi N}{\sqrt{\pi}} \max_{\xi>0} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^a} \int_0^t e^{-a(k-1)(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \leq \\ &\quad e^{-a(k-1)t} \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} + \frac{\chi N}{\sqrt{\pi} C(\alpha)} \int_0^t e^{-a(k-1)(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $C(\alpha)$ 由式(4)所定义。

在不等式(9)两边乘以 $e^{a(k-1)t}$ 得

$$\begin{aligned} e^{a(k-1)t} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} e^{a(k-1)t} + \\ &\quad \frac{\chi N}{\sqrt{\pi} C(\alpha)} \int_0^t e^{a(k-1)s} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds. \end{aligned}$$

由引理 4 知

$$\begin{aligned} e^{a(k-1)t} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} e^{a(k-1)t} + \\ &\quad \theta \int_0^t E'_{1/2}(\theta(t-s)) [\|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} e^{a(k-1)s}] ds. \end{aligned}$$

其中,

$$\theta = \left(\frac{\chi N}{\sqrt{\pi} C(\alpha)} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2.$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq e^{-a(k-1)t} \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} + \\ &\quad \theta \int_0^t E'_{1/2}(\theta(t-s)) e^{-a(k-1)(t-s)} [e^{-a(k-1)s} \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}}] ds. \end{aligned}$$

即对所有的 $T>0, t \in (0, T)$, 有 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq +\infty$ 。因此, 由引理 1 知, 当 $T_{\max} = +\infty$ 时, 引理 5 成立。

定理 1 的证明 对所有的 $T>0, t \in [0, T]$, 由式(9)得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{-a(k-1)t} \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}} + \frac{\chi N(a(k-1))}{C(\alpha)} \sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

其中,

$$\rho(a(k-1)) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (t-s)^{-\frac{1}{2}} e^{-a(k-1)(t-s)} ds < +\infty.$$

当 $\chi < \chi^* = \frac{C(\alpha)}{\rho(a(k-1))}, t \in [0, T]$ 时, 对上式取最大值使得

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{\rho_0 C(\alpha)}{C(\alpha) - \chi \rho(a(k-1))}.$$

其中, $\rho_0 = \|u_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ 。由 T 的任意性可知, 函数 $u(x, t)$ 是全局有界的, 即

$$\sup_{t \in [0, +\infty]} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \frac{\rho_0 C(\alpha)}{C(\alpha) - \chi \rho(a(k-1))}. \quad (10)$$

由引理 2 及式(8)得

$$\begin{aligned} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} &\leq \|\Gamma_2(t) * v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \|\Gamma_2(t-s) * u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} ds \leq \\ &e^{-\frac{\mu}{\tau}t} \|v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{\mu}{\tau}(t-s)} \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} ds \leq \\ &\|v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\rho_0 C(\alpha)}{C(\alpha) - \chi \rho(a(k-1))}. \end{aligned}$$

因为

$$\nabla v(x, t) = \nabla(\Gamma_2(t) * v_0(x)) + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \nabla(\Gamma_2(t-s) * u(x, s)) ds,$$

且 $\nabla(\Gamma_2(t) * v_0(x)) = \Gamma_2(t) * \nabla v_0(x)$ 对所有的 $t \in (0, T)$ 都成立, 结合式(10)得

$$\begin{aligned} \|\nabla v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} &\leq \|\Gamma_2(t) * \nabla v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t \|\nabla \Gamma_2(t-s) * u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} ds \leq \\ &e^{-\frac{\mu}{\tau}t} \|\nabla v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda N}{\tau \sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\mu}{\tau}(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} ds \leq \\ &\|\nabla v_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{\lambda}{\tau} \frac{\rho(\frac{\mu}{\tau}) \rho_0 C(\alpha)}{C(\alpha) - \chi \rho(a(k-1))}. \end{aligned}$$

其中,

$$\rho(\frac{\mu}{\tau}) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mu}{\tau}(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds < +\infty.$$

定理 1 得证。

定理 2 的证明 令 $h = \frac{1}{u}$, 考虑以下模型:

$$\begin{cases} h_t = \Delta h - 2 \frac{|\nabla h|^2}{h} + \chi \nabla \cdot (h f(|\nabla v|^2) \nabla v) - 2\chi \nabla h \cdot f(|\nabla v|^2) \nabla v - h(a - b \frac{1}{h^{k-1}}), x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ \tau v_t = \Delta v + \frac{\lambda}{h} - \mu v, x \in \mathbf{R}^N, t > 0, \\ h(x, 0) = \frac{1}{u_0(x)}, v(x, 0) = v_0(x), x \in \mathbf{R}^N, t > 0. \end{cases}$$

对上式第 1 个方程利用 Young 不等式, 得

$$\begin{aligned} h_t &= \Delta h - 2 \frac{|\nabla h|^2}{h} + \chi \nabla \cdot (h f(|\nabla v|^2) \nabla v) - 2\chi \nabla h \cdot f(|\nabla v|^2) \nabla v - h(a - b h^{1-k}) \leq \\ &\Delta h - 2 \frac{|\nabla h|^2}{h} + \chi \nabla \cdot (h f(|\nabla v|^2) \nabla v) + 2 \frac{|\nabla h|^2}{h} + \frac{\chi^2}{2} h (f(|\nabla v|^2) \nabla v)^2 - ah + b h^{2-k} \leq \\ &\Delta h + \chi \nabla \cdot (h f(|\nabla v|^2) \nabla v) + \frac{\chi^2}{2} h (f(|\nabla v|^2) \nabla v)^2 - ah + (k-1) b \frac{1}{h^{k-1}} + (2-k)h \leq \\ &\Delta h + \chi \nabla \cdot (h f(|\nabla v|^2) \nabla v) + \frac{\chi^2}{2} h (f(|\nabla v|^2) \nabla v)^2 - (a-1)h + b \frac{1}{h^{k-1}}. \end{aligned}$$

所以

$$h(x, t) \leq \Gamma_3(t) * h_0(x) + \chi \int_0^t \Gamma_3(s) * \nabla \cdot (hf(|\nabla v|^2) \nabla v)(x, t-s) ds +$$

$$\frac{\chi^2}{2} \int_0^t \Gamma_3(s) * (hf(|\nabla v|^2) \nabla v(x, t-s))^2 ds + \int_0^t \Gamma_3(s) * b^{\frac{1}{k-1}} ds,$$

其中,

$$\Gamma_3(t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - (a-1)t}, a \in (1, +\infty).$$

假设存在 $T_* \in (0, +\infty)$, 则有 $\lim_{t \rightarrow T_*^-} \|h(x, t)\| = +\infty$ 对所有的 $T < T_*, t \in [0, T]$ 成立。根据引理 2、引理 3 知

$$\|h(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\Gamma_3(t) * h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \chi \int_0^t \|\Gamma_3(s) * \nabla \cdot (hf(|\nabla v|^2) \nabla v)(\cdot, t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds +$$

$$\frac{\chi^2}{2} \int_0^t \|\Gamma_3(s) * (hf(|\nabla v|^2) \nabla v(\cdot, t-s))^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds + \int_0^t \|\Gamma_3(s) * b^{\frac{1}{k-1}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds \leq$$

$$e^{-(a-1)t} \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + b^{\frac{1}{k-1}} \int_0^t e^{-(a-1)s} ds +$$

$$\frac{\chi N}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-(a-1)s} s^{-\frac{1}{2}} \|h(\cdot, t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f(|\nabla v|^2) \nabla v(\cdot, t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds +$$

$$\frac{\chi^2}{2} \int_0^t e^{-(a-1)s} s^{-\frac{1}{2}} \|h(\cdot, t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f(|\nabla v|^2) \nabla v(\cdot, t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^2 ds \leq$$

$$e^{-(a-1)t} \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1} + \left[\frac{\chi N}{\sqrt{\pi}} \max_{\xi > 0} \frac{\xi}{(1+\xi^2)^a} \int_0^t s^{-\frac{1}{2}} e^{-(a-1)s} \|h(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} ds + \right.$$

$$\left. \frac{\chi^2}{2} \max_{\xi > 0} \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{2a}} \int_0^t e^{-(a-1)s} ds \right] \cdot \sup_{t \in [0, T]} \|h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq$$

$$e^{-(a-1)t} \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1} + \left(\frac{\chi \rho(a-1)}{C(\alpha)} + \frac{\chi^2}{2(a-1)C^2(\alpha)} \right) \sup_{t \in [0, T]} \|h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

对所有的 $t \in [0, T]$ 成立。其中,

$$\rho(a-1) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} s^{-\frac{1}{2}} e^{-(a-1)s} ds < +\infty,$$

$C(\alpha)$ 由式(4) 所定义。所以, 当

$$\chi < \chi_* = \frac{C(\alpha)}{\rho(a-1) + \sqrt{\rho^2(a-1) + \frac{C(\alpha)}{a-1}}}$$

时,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1};$$

当 $T \rightarrow T_*$ 时,

$$\sup_{t \in [0, T_*]} \|h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1}.$$

因此, 由反证法可得 $T_* = +\infty$ 。又因为 $h = \frac{1}{u}$, 即

$$\frac{1}{2 \|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{2b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1}} \geq \frac{1}{4 \max\left\{\|h_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} + \frac{b^{\frac{1}{k-1}}}{a-1}\right\}} \geq \frac{1}{4} \min\left\{\inf_{x \in \mathbf{R}^N} u_0(x), \frac{a-1}{b^{\frac{1}{k-1}}}\right\},$$

则对所有的 $(x, t) \in \mathbf{R}^N \times (0, +\infty)$ 有

$$u(x, t) \geq \frac{1}{4} \min\left\{\inf_{x \in \mathbf{R}^N} u_0(x), \frac{a-1}{b^{\frac{1}{k-1}}}\right\}.$$

定理 2 得证。

3 结论

本文在已有的 K-S 趋化模型基础上, 对含有逻辑源项 $(au - bu^k, k > 1)$ 和通量限制 $(f(|\nabla v|^2) = \frac{1}{(1 + |\nabla v|^2)^a})$ 的 K-S 趋化模型展开研究。当初始值 (u_0, v_0) 和相关参数 $\chi, a, b, k, \tau, \lambda, \mu$ 都为正且满足一定的限制条件时, 利用热半群的 L^p - L^q 估计、Young 不等式、格朗沃尔不等式、卷积等, 证明了在全空间上模型解的全局存在性、全局有界性和持久性。但目前仍存在问题值得进一步研究, 例如, 在证明解的全局存在性、全局有界性时, 是否可以优化参数范围; 能否在当前参数范围下, 证明解的渐近行为和 Hair-Trigger Effect; 引入非局部扩散项, 是否改变解的有界性与持久性特征, 为该类趋化模型的理论研究与实际应用提供更全面的支撑。

参考文献:

- [1] Keller E F, Segel L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability[J]. Journal of Theoretical Biology, 1970, 26(3): 399-415.
- [2] Xiang Tian. How strong a logistic damping can prevent blow-up for the minimal Keller-Segel chemotaxis system? [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 459(2): 1172-1200.
- [3] He Xiao, Zheng Sining. Convergence rate estimates of solutions in a higher dimensional chemotaxis system with logistic source[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 436(2): 970-982.
- [4] Lin Ke, Mu Chunlai. Global dynamics in a fully parabolic chemotaxis system with logistic source [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2016, 36(9): 5025-5046.
- [5] Winkler M. Global asymptotic stability of constant equilibria in a fully parabolic chemotaxis system with strong logistic dampening[J]. Journal of Differential Equations, 2014, 257(4): 1056-1077.
- [6] Zheng Jiashan, Ke Yuanyuan. Global existence and eventual smoothness for a 2-dimensional Keller-Segel system with nonlinear logistic source[J]. Journal of Differential Equations, 2025, 437. DOI: 10.1016/j.jde.2025.113293.
- [7] Shen Wenxian, Xue Shuwen. Persistence and convergence in parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source on $\mathbf{R}^N$ [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2022, 42(6): 2893-2925.
- [8] De Ji Xiang Mao, Li Jing, Wang Yifu. Asymptotic stability and the hair-trigger effect in Cauchy problem of the parabolic-parabolic Keller-Segel system with logistic source [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series S, 2024, 17(2): 762-780.
- [9] Li Qingchun, Chen Haomeng. Global boundedness and asymptotic stability of the Keller-Segel system with growth source in the whole space[EB/OL]. Nonlinear Differential Equations and

Applications NoDEA, 2025, 32(6). DOI:10.1007/s00030-025-01134-7.

- [10] De Ji Xiang Mao, Li Jing, Wang Yifu. Asymptotic stability and the hair-trigger effect in Cauchy problem of the flux-limited Keller-Segel system with logistic source[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B, 2025, 30(5):1517-1532.
- [11] Perthame B, Vauchelet N, Wang Zhian. The flux limited Keller-Segel system; properties and derivation from kinetic equations[J]. Revista Matematica Iberoamericana, 2020, 36(2):357-386.
- [12] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [13] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [14] Salako R B, Shen Wenxian. Global existence and asymptotic behavior of classical solutions to a parabolic-elliptic chemotaxis system with logistic source on $\mathbf{R}^N$ [J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(11):5635-5690.

Boundedness and persistence of solutions for a chemotaxis model with flux limitation

LÜ Qinqin, LU Jiangtao, JIANG Min

(School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University,
Guiyang 550025, China)

Abstract: The boundedness and persistence of solutions for a class of chemotaxis model with a logistic source term and flux limitation in the whole space is studied. The global boundedness of the model solutions in the whole space is obtained when $k > 1$ by applying heat semi-group estimates and Young's inequality. Furthermore, when $1 < k < 2$ and $a > 1$, the persistence of the solutions in the whole space is established.

Keywords: chemotaxis model; global existence; global boundedness; flux limitation; persistence; logical sources

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 吕芹芹, 卢江涛, 蒋敏. 一类具有通量限制的趋化模型解的有界性与持久性[J]. 山东航空学院学报, 2026, 43(4):116-124.

Lü Qinqin, Lu Jiangtao, Jiang Min. Boundedness and persistence of solutions for a chemotaxis model with flux limitation[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2026, 43(4):116-124.