

## 【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

## 一类具有饱和恢复率的随机网络病毒模型

王 灿, 刘 娟

(蚌埠学院 数理学院, 安徽 蚌埠 233030)

**摘 要:**在确定型模型的基础上,引入随机因素,得到了一类具有饱和恢复率的随机网络病毒模型。通过线性增长条件及利普希茨条件证明了模型正解的唯一性,利用伊藤公式得到了感染病毒类计算机  $I(t)$ 、恢复类计算机  $R(t)$  消失的充分条件。计算结果表明,当噪声强度足够大时,  $I(t)$ 、 $R(t)$  类群体将消失,这说明外部干扰对网络病毒传播具有很大影响。

**关键词:**SIRS 模型; 网络病毒模型; 随机微分方程; 唯一性; 利普希茨条件; 伊藤公式

**中图分类号:** O 175.12 **文献标识码:** A **DOI:**10.13486/j.issn.2097-4973.2026.04.011

## 0 引言

传染病动力学模型是体现数学应用于实际的一类重要模型,近年来国内外学者建立了不同类型的模型来说明传染病的演化规律。运用动力学方法分析传染病模型有助于揭示疾病传播的内在规律特征,对制定有效的疾病防控策略具有一定的现实意义<sup>[1-6]</sup>。传染病模型通常是利用微分方程仓室理论建立的,该理论还可以拓展应用于多个研究领域,互联网中的病毒传播类似于现实生活中的疾病传播,故可以借鉴仓室理论建立网络病毒模型<sup>[7-11]</sup>。在实际环境中,网络空间往往受到多种不确定性因素的干扰,这类随机影响在数学上适合采用随机模型进行描述。部分学者已尝试构建相应的随机模型,以探讨网络病毒的传播特性<sup>[12-13]</sup>。在上述建模思路基础上,根据文献[14],得到用随机微分方程表示的网络病毒模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \delta R(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \epsilon)I(t) - \frac{cI(t)}{b + I(t)}, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \frac{cI(t)}{b + I(t)} - (\mu + \delta)R(t). \end{cases} \quad (1)$$

根据仓室理论,假设某一个区域网的计算机数量固定,在计算机可能受到网络病毒攻击的前提下,将计算机分为尚未感染病毒的计算机、已经感染病毒的计算机以及恢复正常的计算机等三类群体。模型(1)中,  $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$  分别为上述三类计算机在时刻  $t$  的数量,  $A$  表示尚未感染病毒计算机的常数输入率,  $\beta$  为尚未感染病毒的计算机与已经感染病毒的计算机之间的接触率系数,  $\mu$  表示  $S(t)$ 、 $I(t)$  和  $R(t)$  三类计算机从网络中的移出率,  $\epsilon$  为已经感染病毒计算机的病毒感染率;恢复类计算机可能再次感染网络病毒,用  $\delta$  表示恢复类群体变为易感类群体的转移率;感染类群体  $I(t)$  经过杀毒软件等方式杀毒,可以恢复为正常的

收稿日期:2025-10-26

基金项目:国家自然科学基金项目(12001001);蚌埠学院自然科学研究项目(2025ZR05)

第一作者简介:王 灿(1999—),女,安徽寿县人,讲师,硕士,主要从事微分方程数值解研究。

E-mail:1214814924@qq.com

计算机,用 $\frac{cI(t)}{b+I(t)}$ 表示  $I(t)$  和  $R(t)$  之间的饱和恢复率函数。

现实生活中外界干扰无处不在,数学模型中可以用随机扰动项表示外部环境的干扰,随机分析理论利用噪声表示外界扰动。因此在模型(1)的基础上加入随机扰动可以得到随机网络病毒模型,与确定型网络病毒模型相比,随机网络病毒模型反映了网络病毒在传播过程中的受干扰性,能更有效地说明网络病毒在互联网中的扩散特征。本文中的外部干扰因素主要体现在参数  $\beta$  上,在  $\beta dt$  中加入白噪声,则变为  $\beta dt + \sigma dB(t)$ ,其中  $\sigma^2$  代表噪声强度, $B(t)$  为标准布朗运动。根据上述思想,可建立如下具有饱和恢复率的随机网络病毒模型:

$$\begin{cases} dS(t) = [A - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \delta R(t)]dt - \sigma S(t)I(t)dB(t), \\ dI(t) = \left[ \beta S(t)I(t) - (\mu + \epsilon)I(t) - \frac{cI(t)}{b+I(t)} \right]dt + \sigma S(t)I(t)dB(t), \\ dR(t) = \left[ \frac{cI(t)}{b+I(t)} - (\mu + \delta)R(t) \right]dt. \end{cases} \quad (2)$$

本文主要研究随机网络病毒模型(2)正解的存在性、感染病毒类计算机的消失条件。

## 1 模型(2)正解的存在唯一性

在随机微分方程理论中,方程解的唯一性是通过线性增长条件以及利普希茨条件来验证的;对于动力系统,证明其具有唯一的解是研究其动力学性质的基本条件。利用上述两条件验证解是否存在,设模型(2)的初始条件为  $X(0) = (S(0), I(0), R(0))$ ,则有下述定理。

**定理 1** 当  $t \geq 0$  时,模型(2)存在唯一的全局正解。

**证明** 容易看出,对于任意的初始条件,模型(2)存在唯一的局部解  $X(t) (t \in [0, \tau_e])$ ,其中  $\tau_e$  是系统的爆破时间,这说明模型(2)满足局部利普希茨条件。以下证明正解  $X(t) (t \in [0, \tau_e])$  具有全局性,要证全局性只要证明  $\tau_e = \infty$  a. s. 即可。

假设存在  $k_0 \geq 1$ ,能使  $(S(0), I(0), R(0)) \in (\frac{1}{k}, k_0)$ ,即初值位于区间  $(\frac{1}{k}, k_0)$  内,再设  $k \geq k_0$ ,停时为

$$\tau_k = \inf \{ t \in [0, \tau_e] : \min(S(t), I(t), R(t)) \leq \frac{1}{k} \text{ 或 } \max(S(t), I(t), R(t)) \geq k \},$$

并规定  $\inf \emptyset = \infty$ ,则  $\tau_k$  为  $k$  的单调增函数,令  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ ,则  $\tau_\infty = \tau_e$  a. s.,如果能得到  $\tau_\infty = \infty$ ,则必有  $\tau_e = \infty$  且  $X(t) \in \mathbf{R}_+^3 (t \geq 0)$ 。为此利用反证法证明  $\tau_\infty = \infty$ 。若  $\tau_\infty \neq \infty$ ,则必有正数  $T$  及  $\epsilon \in (0, 1)$ ,满足

$$P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon。$$

故存在正数  $k_1 \geq k_0$ ,当  $k \geq k_1$  时,有

$$P\{\tau_k \leq T\} > \epsilon。$$

由模型(2)可得

$$d(S+I+R) = [A - \mu(S+I+R) - \epsilon I]dt \leq [A - \mu(S+I+R)]dt。$$

利用方程初值  $X(0) = (S(0), I(0), R(0))$ ,计算可得

$$S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu} + e^{-\mu t} \left( S(0) + I(0) + R(0) - \frac{A}{\mu} \right)。$$

由上式可知,若

$$S(0) + I(0) + R(0) \leq \frac{A}{\mu},$$

则有

$$S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu},$$

将

$$\Gamma^* = \{(S(t), I(t), R(t)) \in \mathbf{R}_+^3; S > 0, I > 0, R > 0, S(t) + I(t) + R(t) \leq \frac{A}{\mu}\} \quad (3)$$

记为模型(2)的正不变集。

定义

$$V(S, I, R) = (S - 1 - \ln S) + (I - 1 - \ln I) + (R - 1 - \ln R)。$$

令  $T > 0$ , 则当  $0 \leq t \leq \tau_k \wedge T$  时, 通过伊藤公式可得

$$\begin{aligned} dV = & (1 - \frac{1}{S})dS + \frac{1}{2S^2}(dS)^2 + (1 - \frac{1}{I})dI + \frac{1}{2I^2}(dI)^2 + (1 - \frac{1}{R})dR = \\ & [A - \mu(S + I + R) - \epsilon I]dt - \left[\frac{A}{S} - \mu - \beta I + \frac{\delta R}{S}\right]dt + \sigma I dB(t) + \frac{\sigma^2 I^2}{2}dt - \\ & \left[\beta S - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + I}\right]dt - \sigma S dB(t) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}dt - \left[\frac{cI}{(b + I)R} - (\mu + \delta)\right]dt = \\ & [A - \mu(S + I + R) - \epsilon I - \frac{A}{S} + \beta(I - S) + 3\mu + \epsilon + \delta - \frac{\delta R}{S} + \frac{c}{b + I} - \\ & \frac{cI}{(b + I)R} + \frac{\sigma^2(S^2 + I^2)}{2}]dt + \sigma(I - S)dB(t)。 \end{aligned} \quad (4)$$

若令

$$LV = A - \mu(S + I + R) - \epsilon I - \frac{A}{S} + \beta(I - S) + 3\mu + \epsilon + \delta - \frac{\delta R}{S} + \frac{c}{b + I} - \frac{cI}{(b + I)R} + \frac{\sigma^2(S^2 + I^2)}{2},$$

则有

$$LV \leq A + \beta \frac{A}{\mu} + 3\mu + \epsilon + \delta + \frac{c}{b} + \sigma^2 \left(\frac{A}{\mu}\right)^2 := K。$$

将上式代入式(4)中可得

$$dV \leq Kdt + \sigma(I - S)dB(t)。$$

再对上式两边取 0 到  $\tau_k \wedge T$  的积分, 并求数学期望  $E$  得

$$\begin{aligned} EV(S(\tau_k \wedge T), I(\tau_k \wedge T), R(\tau_k \wedge T)) & \leq \\ V(S(0), I(0), R(0)) + KE(\tau_k \wedge T) & \leq V(S(0), I(0), R(0)) + KT。 \end{aligned} \quad (5)$$

由于当  $k \geq k_1$  时, 有  $P\{\tau_k \leq T\} > \epsilon$ , 故对于  $\omega \in \{\tau_k \leq T\}$ ,  $S(\tau_k, \omega)$ ,  $I(\tau_k, \omega)$ ,  $R(\tau_k, \omega)$  这三个表达式中至少有一个等于  $k$  或  $\frac{1}{k}$ , 即得

$$V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega)) \geq (k - 1 - \ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 + \ln k\right)。$$

代入式(5)可得

$$\begin{aligned} V(S(0), I(0), R(0)) + KT & \geq E[1_{\Omega_k}(\omega)V(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega), R(\tau_k, \omega))] \geq \\ \epsilon \left[ (k - 1 - \ln k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 + \ln k\right) \right]。 \end{aligned}$$

其中,  $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$ ,  $1_{\Omega_k}(\omega)$  为  $\Omega_k$  的示性函数, 若令  $k \rightarrow \infty$ , 则有

$$V(S(0), I(0), R(0)) + KT = \infty。$$

故上述假设不成立, 即得  $\tau_e = \infty$  a. s., 说明模型(2)存在唯一的全局正解。

定理 1 表明, 不论初始条件取何值, 在具有随机扰动、不确定因素的前提下, 尚未感染病毒的计算机、已经感染病毒的计算机与恢复正常的计算机等三类群体都是持续存在的。

## 2 感染病毒类计算机及恢复类计算机的消失性

下面讨论模型(2)中感染病毒类计算机与恢复类计算机何时消失, 假设模型存在任意的初始条件。

**定理 2** 设模型(2)的解为  $X(t) = (S(t), I(t), R(t))$ , 则对任给的初始条件  $X(0) \in \Gamma^*$ , 当

$$\frac{\beta^2}{2\sigma^2} - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} < 0$$

即

$$\sigma^2 > \frac{(\mu b + A)\beta^2}{2(\mu + \epsilon)(\mu b + A) + 2\mu c}$$

时, 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} < 0,$$

即  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ , 此时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu}.$$

**证明** 在模型(2)中利用伊藤公式计算  $I(t)$ , 得

$$\begin{aligned} d(\ln I) &= \frac{1}{I} dI - \frac{1}{2I^2} (dI)^2 = \left[ \beta S - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + I} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \right] dt + \sigma S dB(t) \leq \\ & \left[ \beta S - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} - \frac{\sigma^2 S^2}{2} \right] dt + \sigma S dB(t). \end{aligned}$$

约定符号

$$\langle f(t) \rangle = \frac{\int_0^t f(s) ds}{t},$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} &\leq \beta \langle S(t) \rangle - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} - \frac{\sigma^2 \langle S^2(t) \rangle}{2} + \frac{M(t)}{t} \leq \\ & \beta \langle S(t) \rangle - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} - \frac{\sigma^2 \langle S(t) \rangle^2}{2} + \frac{M(t)}{t} = \\ & -\frac{\sigma^2}{2} \left( \langle S(t) \rangle - \frac{\beta}{\sigma^2} \right)^2 - (\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2} + \frac{M(t)}{t} \leq \\ & -(\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2} + \frac{M(t)}{t}, \end{aligned}$$

移项得

$$\frac{\ln I(t)}{t} \leq -(\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2} + \frac{M(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t}. \quad (6)$$

其中,  $M(t) = \int_0^t \sigma S(r) dB(r)$  为一个连续的局部鞅并有  $M(0) = 0$ . 而

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle M, M \rangle_t}{t} \leq \frac{\sigma^2 A^2}{\mu^2} < \infty,$$

利用强大数定律得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} = 0. \quad (7)$$

对式(6)两边取上极限,并利用式(7)得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq -(\mu + \epsilon) - \frac{c}{b + \frac{A}{\mu}} + \frac{\beta^2}{2\sigma^2} < 0.$$

上式说明

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0. \quad (8)$$

对方程

$$d(S + I + R) = [A - \mu(S + I + R) - \epsilon I]dt$$

求通解得

$$S(t) + I(t) + R(t) = e^{-\mu t} [S(0) + I(0) + R(0) + \int_0^t (A - \epsilon I(r)) e^{\mu r} dr].$$

两边求极限,利用洛必达法则及式(8),得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) + R(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(0) + I(0) + R(0) + \int_0^t (A - \epsilon I(r)) e^{\mu r} dr}{e^{\mu t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A - \epsilon I(t)}{\mu} = \frac{A}{\mu}. \quad (9)$$

对模型(2)的第三项两边取极限得  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ ,代入式(9)得  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu}$ . 故定理2得证. 定理2的结果表明,当白噪声足够大时,感染病毒类计算机及恢复类计算机将消失。

### 3 结论

本文建立了一类具有饱和恢复率的随机网络病毒模型,利用线性增长条件以及利普希茨条件研究了该模型正解的唯一性,并使用伊藤公式得到了模型中感染类计算机消失的充分性条件. 计算结果表明,当外部干扰因素很大时,感染病毒的计算机将趋于0,这充分说明网络世界中的干扰因素对网络病毒的传播具有很大影响。

### 参考文献:

- [1] Alexander M E, Moghadas S M. Bifurcation analysis of an SIRS epidemic model with generalized incidence[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2005, 65(5): 1794-1816.
- [2] Wen Luosheng, Yang Xiaofang. Global stability of a delayed SIRS model with temporary immunity [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(1): 221-226.
- [3] Acedo L, Gonzalez-parra G, Arenas A J. An exact global solution for the classical SIRS epidemic model[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3): 1819-1825.
- [4] Zhang Tailei, Liu Junli, Teng Zhidong. Stability of Hopf bifurcation of a delayed SIRS epidemic model with stage structure[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(1): 293-306.
- [5] 张子振, 张怡雪. 一类考虑先天免疫和非线性治愈率的时滞传染病模型 Hopf 分岔[J]. 山东航空学院学报, 2024, 41(1): 115-120.
- [6] 刘娟, 吴延敏. 一类具有饱和恢复率的随机 SIR 传染病模型的持久性[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2024, 24(3): 5-8.
- [7] 陈维, 何剑, 刘毅. 具有免疫效力的计算机病毒传播模型的动力学分析和优化控制研究[J]. 浙江大学学报(理学版), 2024, 51(3): 336-346.
- [8] 刘超, 任禹琦, 刘小洋, 等. 具有切换特性和免疫控制的计算机病毒传播模型[J]. 计算机应用与软件, 2024, 41(4): 313-320.

- [9] 高燕鑫,石剑平.一类时滞分数阶计算机病毒模型的 Hopf 分岔控制研究[J].工程数学学报,2023,40(4):647-660.
- [10] 王俊岭,罗智荣,郭翠芳,等.基于博弈策略的动态网络病毒传播模型和控制[J].计算机仿真,2023,40(4):407-412.
- [11] 曹春.两类具有免疫策略的时滞网络病毒传播模型研究[D].蚌埠:安徽财经大学,2021.
- [12] 刘兰,任光明,林军.SDN 环境下的动态随机网络病毒传播模型及特性研究[J].计算机工程,2018,44(8):179-183.
- [13] 王彬,王晓云.具有非线性传染率和时滞的随机 SIQR 计算机病毒模型的渐近行为[J].数学的实践与认识,2020,50(6):171-181.
- [14] Elbaz I M, Sohaly M A, EL-Metwally H. Random dynamics of an SIV epidemic model[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2024, 131: 107779. DOI: 10.1016/j.cnsns.2023.107779.

## A stochastic network virus model with saturation recovery rate

WANG Can, LIU Juan

(School of Mathematics and Physics, Bengbu University, Bengbu 233030, China)

**Abstract:** On the basis of deterministic models, a stochastic network virus models with saturation recovery rates is obtained by introducing random factor. The uniqueness of the positive solution for the model is proved by the linear growth condition and Lipschitz condition, and the sufficiency conditions for the disappearance of infected and recovered computers are obtained by using the Itô formula. The results indicate that when the noise intensity is high enough, the  $I(t)$  and  $R(t)$  groups will disappear, and external interference has significant impact on the spread of network viruses.

**Keywords:** SIRS model; network virus model; stochastic differential equation; uniqueness; Lipschitz condition; Itô formula

(责任编辑:贾晶晶)

**引用格式** 王灿,刘娟.一类具有饱和恢复率的随机网络病毒模型[J].山东航空学院学报,2026,43(4):95-100.

Wang Can,Liu Juan. A stochastic network virus model with saturation recovery rate[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2026,43(4):95-100.