

【微分方程与动力系统研究】

带有凹-凸非线性项的平均曲率 问题正解的确切个数

李晓东, 高红亮

(兰州交通大学 数理学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 基于时间映像原理, 研究了一维 Minkowski 空间中带有凹-凸非线性项的平均曲率问题正解的确切个数及分歧图。

关键词: Minkowski 空间; 平均曲率; 时间映像; 凹-凸非线性项

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.02.009

常微分方程边值问题作为微分方程领域研究的一个基本问题, 其正解的研究受到学者广泛关注^[1-14]。本文考虑一维 Minkowski 空间中带有凹-凸非线性项的给定平均曲率问题

$$\begin{cases} -\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' = \lambda f(u), x \in (-L, L), \\ u(-L) = 0 = u(L) \end{cases} \quad (1)$$

正解的确切个数及分歧图, 其中参数 $\lambda > 0, p \geq L > 0, p$ 满足 $f(p) = pf'(p)$ 。问题(1)是 Minkowski 曲率方程 Dirichlet 问题

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right) + \lambda f(|x|, v) = 0, x \in B(R); v = 0, x \in \partial B(R) \quad (2)$$

的一维版本, 这些问题在微分几何和狭义相对论中具有重要作用^[1-4]。

近年来, 许多学者对带有凹-凸非线性项的半线性问题正解的确切个数进行了广泛研究^[5-10], 但一维 Minkowski 空间中的平均曲率问题(1)正解的确切个数研究并不是很多^[11-14]。文献[11]研究了问题(1)正解的确切个数和分歧图, 其中参数 $\lambda, L > 0$, 非线性项 $f \in C([0, \infty), [0, \infty))$ 。文献[12-13]也研究了问题(1)正解的确切个数和分歧图, 其中参数 $\lambda, L > 0$, 非线性项 $f \in C[0, \infty) \cap C^2(0, \infty)$, 当 $u > 0$ 时, $f(u) > 0$ 且 $f''(u)$ 不改变符号。文献[14]利用时间映像原理研究了问题(1)正解的确切个数及分歧图, 其中非线性项 f 满足: 对于 $0 < u < L, f''(u) > 0, uf'(u) \geq f(u) + \frac{1}{2}u^2 f''(u)$ 。

由半线性问题得到启发, 本文考虑一维 Minkowski 空间中带有凹-凸非线性项的给定平均曲率问题(1)正解的确切个数及分歧图。假设非线性项 f 满足如下条件:

(H1) $f \in C^2([0, \infty), [0, \infty))$ 且对任意的 $u > 0, f(u) > 0$ 。

收稿日期: 2022-05-25

基金项目: 国家自然科学基金项目(11801243)

第一作者简介: 李晓东(1996—), 男, 山东曲阜人, 硕士研究生, 主要从事常微分方程边值问题研究。

E-mail: LXD5775@163.com

通信作者简介: 高红亮(1985—), 男, 甘肃天水人, 副教授, 主要从事分歧理论及常微分方程边值问题研究。

E-mail: gaohongliang101@163.com

(H2) 存在 $\gamma > 0$, 使得当 $u \in (0, \gamma)$ 时 $f''(u) < 0$, 当 $u \in (\gamma, \infty)$ 时 $f''(u) > 0$.

考虑如下两种情形:

(H3) $f(0) > 0$.

(H4) $f(0) = 0, 0 < \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = A < +\infty$.

1 预备知识

设 $u(x)$ 是问题(1)的正解。可知, $(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}})' = \frac{u''}{(1-u'^2)^{3/2}}$, $u(x)$ 关于 $x=0$ 对称并且在 $x=0$ 处取得最大值, 当 $-L < x < 0$ 时 $u'(x) > 0$, 当 $0 < x < L$ 时 $u'(x) < 0$. 令 $s = \sup_{x \in (-L, L)} u(x)$, 则 $u(0) = s$. 在等式 $-\frac{u''}{(1-u'^2)^{3/2}} = \lambda f(u)$ 两端同时乘以 u' , 并且在 $[0, x]$ 上积分, 可得 $-\int_0^x \frac{u''}{(1-u'^2)^{3/2}} u' dt = \lambda \int_0^x f(u) u' dt$, 化简得 $-u' = \frac{\sqrt{\lambda(F(s) - F(u))[2 + \lambda(F(s) - F(u))]}{1 + \lambda(F(s) - F(u))}$, 即

$$-\frac{1 + \lambda(F(s) - F(u))}{\sqrt{\lambda(F(s) - F(u))[2 + \lambda(F(s) - F(u))]} du = dx.$$

对上式两端从 0 到 L 积分, 可得 $T_\lambda(s) = \int_0^s \frac{1 + \lambda(F(s) - F(u))}{\sqrt{\lambda(F(s) - F(u))[2 + \lambda(F(s) - F(u))]} du = L$, 称 $T_\lambda(s)$ 为 f 的时间映像。

为了方便, 通常定义 $\bar{A} = \bar{A}(s, u) = sf(s) - uf(u)$, $B = B(s, u) = F(s) - F(u)$, 则

$$T_\lambda(s) = \int_0^s \frac{1 + \lambda B}{\sqrt{2\lambda B + \lambda^2 B^2}} du = s \int_0^1 \frac{\lambda B(s, st) + 1}{\sqrt{\lambda^2 B^2(s, st) + 2\lambda B(s, st)}} dt.$$

2 引理

引理 1^[11] 若非线性项 f 满足(H1), 则

$$T'_\lambda(s) = \int_0^1 \frac{\lambda^3 B^3(s, st) + 3\lambda^2 B^2(s, st) + \lambda[2B(s, st) - \bar{A}(s, st)]}{[\lambda^2 B^2(s, st) + 2\lambda B(s, st)]^{3/2}} dt.$$

引理 2^[11] 若非线性项 f 满足(H1), 则对任意的 $s \in (0, L)$, $T_\lambda(s)$ 关于 λ 严格递减。

引理 3^[11] 若非线性项 f 满足(H1), 那么: 若 $f(0) > 0$, 则 $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = 0$; 若 $f(0) = 0, 0 < \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} =$

$A < +\infty$, 则当 $0 < \alpha < 1$ 时 $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = 0$, 当 $\alpha = 1$ 时 $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda A}}$, 当 $\alpha > 1$ 时 $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = +\infty$.

引理 4 若非线性项 f 满足(H1)(H2)(H3) 或(H4), 则对任意的 $s \in (0, L)$, $T'_\lambda(s) > 0$.

证明 令 $\theta(u) = 2F(u) - uf(u)$, 由条件(H2) 可知,

$$\theta'(u) = f(u) - uf'(u), \theta''(u) = -uf''(u) \begin{cases} > 0, u \in (0, \gamma), \\ = 0, u = \gamma, \\ < 0, u \in (\gamma, +\infty). \end{cases}$$

再根据条件(H3) 或(H4) 可得 $\theta'(0) = f(0) \geq 0$.

因为 $2B(s, u) - \bar{A}(s, u) = \theta(s) - \theta(u)$, 易得对任意的 $s \in (0, L)$,

$$T'_\lambda(s) = \int_0^1 \frac{\lambda^3 B^3(s, st) + 3\lambda^2 B^2(s, st) + \lambda[2B(s, st) - \bar{A}(s, st)]}{[\lambda^2 B^2(s, st) + 2\lambda B(s, st)]^{3/2}} dt = \frac{1}{s} \int_0^s \frac{\lambda^3 B^3(s, u) + 3\lambda^2 B^2(s, u) + \lambda(\theta(s) - \theta(u))}{(\lambda^2 B^2(s, u) + 2\lambda B(s, u))^{3/2}} du > 0.$$

引理 5^[11] 若非线性项 f 满足(H1), 则 $\lim_{s \rightarrow +\infty} T_\lambda(s) = +\infty$ 。

3 主要结果及证明

定理 1 若非线性项 f 满足(H1)(H2)和(H3), 则对任意的 $\lambda > 0$, 问题(1)恰有一个正解。

证明 根据时间映像的定义可知, 问题(1)等价于在区间 $(0, L)$ 上找到一个 s , 使得 $T_\lambda(s) = L$, 则问题(1)解的个数等价于上式解的个数。

由引理 3 可知, $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = 0$ 。通过计算得 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(s) = s, s \in (0, L)$ 。再结合引理 2、引理 4、引理 5, 可以得到当 $\lambda > 0$ 时 $T_\lambda(s)$ 的图像, 见图 1。从分歧图(图 2)可知, 对任意的 $\lambda > 0$, 问题(1)恰有一个正解。

定理 2 若非线性项 f 满足(H1)(H2)和(H4), 则存在 $\bar{\lambda} = \frac{\pi^2}{4L^2A}$, 使得: 当 $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ 时, 问题(1)没有正解; 当 $\lambda \geq \bar{\lambda}$ 时, 问题(1)恰有一个正解。

证明 根据时间映像的定义可知, 问题(1)等价于在区间 $(0, L)$ 上找到一个 s , 使得 $T_\lambda(s) = L$, 则问题(1)解的个数等价于上式解的个数。

根据引理 3 可知, $\lim_{s \rightarrow 0^+} T_\lambda(s) = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda A}}$ 。由 $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda A}} = L$ 可得 $\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2A} \triangleq \bar{\lambda}$ 。通过计算得 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} T_\lambda(s) = s, s \in (0, L)$ 。再结合引理 2、引理 4、引理 5, 可以得到当 $\lambda \geq \bar{\lambda}$ 时 $T_\lambda(s)$ 的图像, 见图 3。由分歧图(图 4)可知, 存在 $\bar{\lambda} = \frac{\pi^2}{4L^2A}$, 使得: 当 $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ 时, 问题(1)没有正解; 当 $\lambda \geq \bar{\lambda}$ 时, 问题(1)恰有一个正解。

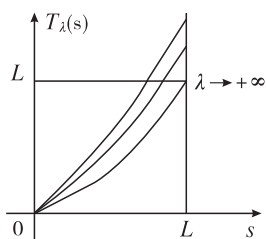


图 1 $T_\lambda(s)$ 的图像(1)

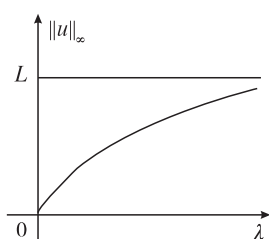


图 2 $f(u)$ 的分歧图(1)

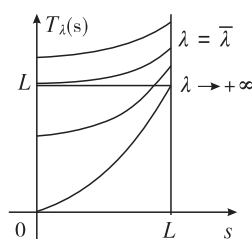


图 3 $T_\lambda(s)$ 的图像(2)

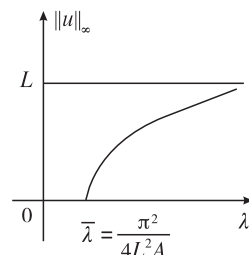


图 4 $f(u)$ 的分歧图(2)

4 应用举例

例 1 $f(u) = u^3 - u^2 + 2u + 1$ 。

经过计算, $f(0) = 1, f''(u) = 6u - 2, f(u) - uf'(u) = -2u^3 + u^2 + 1$, 因此存在 $\gamma = \frac{1}{3}, p = 1$, 满足条件(H1)(H2)和(H3), 由定理 1 可知, 对任意的 $\lambda > 0$, 该问题恰有一个正解。

例 2 $f(u) = u^3 - u^2 + u$ 。

经过计算, $f(0) = 0, f''(u) = 6u - 2, f(u) - uf'(u) = -2u^3 + u^2, \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$, 因此存在 $\gamma = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, A = 1$, 满足条件(H1)(H2)和(H4), 由定理 2 可知, 存在 $\bar{\lambda} = \frac{\pi^2}{4L^2}$, 使得: 当 $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$ 时, 该问题没有正解; 当 $\lambda \geq \bar{\lambda}$ 时, 该问题恰有一个正解。

参 考 文 献:

[1] BRATU G. Sur les equation integrals non linéaires[J]. Bulletin de la société mathématique de France, 1914, 42: 113 - 142.

- [2] GELFAND I M. Some problems in the theory of quasilinear equations[J]. American mathematical society translations,1963,29:295 - 381.
- [3] WALTER G. Classical mechanics:point particles and relativity[M]. New York:Springer,2004.
- [4] HUTTEN E H. Relativistic(non-linear) oscillator[J]. Nature,1965,205(4974):892.
- [5] HUNG K C. Exact multiplicity of positive solutions of a semipositone problem with concave-convex nonlinearity[J]. Journal of differential equations,2013,255(11):3811 - 3831.
- [6] GADAM S,JAIA J. Exact multiplicity of positive solutions in semipositone problems with concave-convex type nonlinearities[J]. Electronic journal of qualitative theory of differential equations, 2001,2001(4):1 - 9.
- [7] HUNG K C,WANG S H. A complete classification of bifurcation diagrams of classes of a multiparameter Dirichlet problem with concave-convex nonlinearities[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2009,349(1):113 - 134.
- [8] SHI J,SHIVAJI R. Exact multiplicity of solutions for classes of semipositone problems with concave-convex nonlinearity[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2001,7(3):559 - 571.
- [9] TZENG C C,HUNG K C. Global bifurcation and exact multiplicity of positive solutions for a positone problem with cubic nonlinearity[J]. Journal of differential equations,2012,252(12):6250 - 6274.
- [10] WANG S H,YEH T S. A complete classification of bifurcation diagrams of a Dirichlet problem with concave-convex nonlinearities[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2004,291(1):128 - 153.
- [11] ZHANG X M,FENG M Q. Bifurcation diagrams and exact multiplicity of positive solutions of one-dimensional prescribed mean curvature equation in Minkowski space[J]. Communications in contemporary mathematics,2019,21(3):111 - 137.
- [12] HUANG S Y. Exact multiplicity and bifurcation curves of positive solutions of a one-dimensional Minkowski-curvature problem and its application[J]. Communications on pure & applied analysis,2018,17(3):1271 - 1294.
- [13] HUANG S Y. Classification and evolution of bifurcation curves for the one-dimensional Minkowski-curvature problem and its applications[J]. Journal of differential equations,2018,264(9):5977 - 6011.
- [14] GAO H L,XU J. Bifurcation curves and exact multiplicity of positive solutions for Dirichlet problems with the Minkowski-curvature equation[J]. Boundary value problems,2021,2021(1):1 - 10.

Exact Multiplicity of Positive Solutions for Mean Curvature Problem with Concave-convex Non-linearity

LI Xiao-dong,GAO Hong-liang

(School of Mathematics and Physics,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract: The exact multiplicity and bifurcation diagram of positive solutions for the one-dimensional Minkowski-curvature equation with concave-convex non-linearity are studied by using time map.

Keywords: Minkowski space;mean curvature equation;time map;concave-convex non-linearity

(责任编辑:贾晶晶)