【微分方程与动力系统研究】

具有心理因素影响的 SVIR 传染病模型的稳定性分析

陈霞霞，张　睿

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：研究了一类具有心理因素影响的传染率函数和有医疗限制的治疗函数的 SVIR 传染病模型。讨论了模型平衡点的存在性，计算了基本再生数，通过 Hurwitz 判据得到无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性，用构造 Lyapunov 函数的方法证明无病平衡点的全局稳定性，最后利用第二加性复合矩阵判断地方病平衡点的全局稳定性。

关键词：心理因素；稳定性；SVIR 传染病模型

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.02.008

1　建立模型

隔离和接种疫苗一直是非常重要且有效传染病防治措施，文献[1]研究了具有疫苗接种的传染病模型，文献[2]提出了具有心理因素影响的完整形式的非单调发病率，文献[3]研究了一类 SVIR 模型的局部稳定性。因为隔离使人与人之间的接触大大减少，且疫苗对不同身体情况的人群效果不同，不同地区的医疗水平也不同，所以需考虑易感者和感染者的接触率、接种疫苗的有效率，以及因治疗水平有限，医院对感染者有治疗影响等因素。因此在文献[3]的基础上建立一类具有心理因素影响的接触率函数和具有治疗水平限制的 Holling-Ⅱ 型治疗函数的 SVIR 传染病模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\dfrac{qkSI}{1+aI+bI^2}-(1-q)\delta S-dS+\theta V, \\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(1-q)\delta S-\dfrac{\sigma kIV}{1+aI+bI^2}-(d+\theta)V, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{qkSI}{1+aI+bI^2}+\dfrac{\sigma kIV}{1+aI+bI^2}-\dfrac{\beta I}{1+\alpha I}-(d+c)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta I}{1+\alpha I}-dR。 \end{cases} \tag{1}$$

其中，a 为发生率函数，b 为心理因素影响参数，σ 为疫苗接种失效率（$\sigma=1$ 表示疫苗完全失效），β 为疾病治愈率，α 为医疗设施对感染者治疗的影响参数，δ 为疫苗接种率，θ 为接种者的免疫失去率，q 为易感者和感染者的接触比例，$(1-q)$ 表示易感者和接种者的接触率，k 为易感者的疾病传染率，c 和 d 分别表示因病死亡率和自然死亡率，其中 $a>-2\sqrt{b}$，其余参数均为正数。因为前三个式子中不含 R，所以模型(1)可以简化成模型

收稿日期：2022-04-05

第一作者简介：陈霞霞(1997—)，女，甘肃清水人，硕士研究生，主要从事生物数学研究。
E-mail：1254193280@qq.com

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\dfrac{qkSI}{1+aI+bI^2}-(1-q)\delta S-dS+\theta V,\\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(1-q)\delta S-\dfrac{\sigma kIV}{1+aI+bI^2}-(d+\theta)V,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{qkSI}{1+aI+bI^2}+\dfrac{\sigma kIV}{1+aI+bI^2}-\dfrac{\beta I}{1+\alpha I}-(d+c)I。\end{cases}\tag{2}$$

2 平衡点和基本再生数

定理 1 区域 $D=\{(S,V,I,R)\mid S,V,I,R\geqslant 0,S+V+I+R\leqslant A/d\}$是模型(1)的正向不变集。

证明 由文献[1]可知模型(1)的解有非负性,将模型(1)的 4 个方程相加可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=A-d(S+V+I+R)-cI\leqslant A-dN。$$

所以,模型(1)的最大正向不变集[4]是 $X=\{S,V,I,R\in\mathbf{R}_+^4,S+V+I+R\leqslant\dfrac{A}{d}\}$。

定义 1[5] 模型(1)的基本再生数为 $R_0=\dfrac{kA[q(d+\theta)+\sigma\delta(1-q)]}{[d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta](\beta+d+c)}$。

(P1) $qkS^*(1-bI^2)(d+\theta)^2-\sigma kI^*\theta(1-q)\delta S^*(a+2bI)>0$。

(P2) $(d+c)(1+aI^*+bI^{*2})^2-qkS^*(1-bI^2)>0$。

(P3) $I^*<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$。

定理 2 当 $R_0\leqslant 1$ 时,模型(1)有一个无病平衡点 $D_0(S_0,V_0,0,0)$,其中,

$$S_0=\frac{(d+\theta)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta},V_0=\frac{\delta(1-q)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta},$$

当 $R_0>1$ 与条件(P1)(P2)(P3)同时成立时,模型(1)还存在一个地方病平衡点 $D^*(S^*,V^*,I^*,R^*)$。

证明 将地方病平衡点带入模型(1)中,可得系统

$$\begin{cases}A-\dfrac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(1-q)\delta S^*-dS^*+\theta V^*=0,\\ (1-q)\delta S^*+\dfrac{\sigma kI^*V^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(d+\theta)V^*=0,\\ \dfrac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\dfrac{\sigma kI^*V^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-\dfrac{\beta I^*}{1+\alpha I^*}-(d+c)I^*=0,\\ \dfrac{\beta I^*}{1+\alpha I^*}-dR^*=0。\end{cases}\tag{3}$$

由系统(3)的前三个方程可得

$$V^*=\frac{(1-q)\delta S^*(1+aI^*+bI^{*2})}{\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})},$$

$$\Phi(S^*,I^*)=A-\frac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(1-q)\delta S^*-dS^*+\frac{\theta(1-q)\delta S^*(1+aI^*+bI^{*2})}{\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})},\tag{4}$$

$$\Psi(S^*,I^*)=\frac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{\sigma kI^*(1-q)\delta S^*}{\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})}-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*}-(d+c)I^*,\tag{5}$$

在式(4)中,可得 $\Phi(S_0,0)$,其中 $S_0=\dfrac{(d+\theta)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta}$。因此,当 $I^*\neq 0$ 时,由式(4)可得

$$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}I^*}=-\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial I^*}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial S^*}}=-\frac{-\dfrac{qkS^*(q-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\dfrac{\sigma kI^*\theta(1-q)\delta S^*(a+2bI^*)}{[\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})]^2}}{-\dfrac{qkI^*+((1-q)\delta+d)(1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}+\dfrac{(1-q)\delta\theta(1+aI^*+bI^{*2})}{\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})}}。$$

当 $I^*<\frac{1}{\sqrt{b}}$ 且

$$qkS^*(1-bI^{*2})(d+\theta)^2-\sigma kI^*\theta(1-q)\delta S^*(a+2bI^*)>0 \tag{6}$$

成立时，$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}I^*}<0$。

同理，由式(5)可得

$$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}I^*}=-\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial I^*}}{\frac{\partial\Psi}{\partial S^*}}=-\left[\frac{qkS^*(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\frac{(1-q)\delta\sigma k(d+\theta)(1-bI^2)}{[\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})]^2}-\right.$$
$$\left.\frac{\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}\right]\frac{1+aI^*+bI^{*2}}{qkI^*},$$

当 $I^*<\frac{1}{\sqrt{b}}$ 且

$$(d+c)(1+aI^*+bI^{*2})^2-qkS^*(1-bI^{*2})>0 \tag{7}$$

成立时，$\frac{\mathrm{d}S^*}{\mathrm{d}I^*}>0$。因此，若式(6)(7)以及 $I^*<\frac{1}{\sqrt{b}}$ 同时成立，则 $\Phi(S^*,I^*)$ 是 I 的单调递减函数，$\Psi(S^*,I^*)$ 是 I 的单调递增函数，所以式(4)(5)只有一个交点，故地方病平衡点是存在的，且只有一个。

3　各类平衡点的局部稳定性

3.1　无病平衡点的局部稳定性

定理 3　当 $R_0\leqslant 1$ 时，模型(1)的无病平衡 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 是局部渐近稳定的。

证明　首先求出模型(1)在 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 的雅可比矩阵，得

$$\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{bmatrix}\frac{kA[q(d+\theta)+\sigma\delta(1-q)]}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta}-\beta-d-c & 0 & 0 & 0\\ \frac{-qk(d+\theta)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta} & -d-\delta & \theta & 0\\ \frac{-\sigma k(1-q)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta} & -\delta(1-q) & -d-\theta & 0\\ -\beta & 0 & 0 & -d\end{bmatrix}。\tag{8}$$

由式(8)得出模型(1)在 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 的特征值为

$$\gamma_1=-d,\gamma_2=-\frac{kA[q(d+\theta)+\sigma\delta(1-q)]+(\beta+d+c)[d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta]}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta},$$

$$\gamma_3=-d-\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{(\delta-\theta)^2-4\delta\theta(1-q)}}{2},\gamma_4=-d-\frac{\delta}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\sqrt{(\delta-\theta)^2-4\delta\theta(1-q)}}{2}。$$

当 $R_0\leqslant 1$ 时，模型(1)在 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 的根都具有负实部，因此 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 是局部渐近稳定的。

3.2　地方病平衡点的局部稳定性

定理 4　当 $R_0>1$ 时，模型(2)的地方病平衡点 $D^*(S^*,V^*,I^*,R^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明　先计算模型(2)在 $D^*(S^*,V^*,I^*,R^*)$ 的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{J}(D^*)=\begin{pmatrix}a_{11} & \theta & -\frac{qkS(1-bI^2)}{(1+aI+bI^2)^2}\\ \delta(1-q) & -\frac{\sigma kI+(d+\theta)(1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2} & -\frac{\sigma kV(1-bI^2)}{(1+aI+bI^2)^2}\\ \frac{qkI}{1+aI+bI^2} & \frac{\sigma kI}{1+aI+bI^2} & a_{33}\end{pmatrix},\tag{9}$$

其中，

$$a_{11}=-\frac{qkI+[\delta(1-q)+d](1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2},$$

$$a_{33}=\frac{(qkS+\sigma kV)(1-bI^2)(1+\alpha I^2)-[\beta+(d+c)(1+\alpha I^2)](1+aI+bI^2)^2}{(1+aI+bI^2)^2(1+\alpha I)^2}<0。$$

又因为矩阵 $\boldsymbol{J}(D^*)$ 在 $D^*(S^*,V^*,I^*,R^*)$ 的特征值方程为

$$|\boldsymbol{J}(D^*)-\lambda D|=\lambda^3-\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(D^*))\lambda^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda-\det(\boldsymbol{J}(D^*)),$$

其中，

$$-\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(D^*))=-(a_{11}+a_{22}+a_{33})=\frac{qkI+\sigma kI+[\delta(1-q)+2d+\theta](1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2}+$$

$$\frac{[(\beta+d+c)(1+\alpha I)^2(1+aI+bI^2)^2]-(qkS+\sigma kV)(1-bI^2)(1+\alpha I)^2}{(1+aI+bI^2)^2(1+\alpha I)^2}>0,$$

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=$$

$$\frac{\sigma kI+(d+\theta)(1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2}\frac{(qkS+\sigma kV)(1-bI^2)(1+\alpha I)^2-[\beta+(d+c)(1+\alpha I)^2](1+aI+bI^2)^2}{(1+aI+bI^2)^2(1+\alpha I)^2}+$$

$$\frac{\sigma kI}{1+aI+bI^2}\frac{\sigma kV(1-bI^2)}{1+aI+bI^2}+\frac{qkI+[\delta(1-q)+d](1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2}\times$$

$$\frac{[\beta+(d+c)(1+\alpha I)^2](1+aI+bI^2)^2-(qkS+\sigma kV)(1-bI^2)(1+\alpha I)^2}{(1+aI+bI^2)^2(1+\alpha I)^2}+$$

$$\frac{qkI}{1+aI+bI^2}\frac{qkS(1-bI^2)}{1+aI+bI^2}-\delta(1-q)\theta+\frac{qkI+[\delta(1-q)+d](1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2}\frac{\sigma kI+(d+\theta)(1+aI+bI^2)}{1+aI+bI^2}>0,$$

$$-\det(\boldsymbol{J}(D^*))>0。$$

综上，根据 Routh-Hurwitz 判据[6]可得，地方病平衡点 $D^*(S^*,V^*,I^*,R^*)$ 是局部渐近稳定的。

4 无病平衡点的全局稳定性

定理 5 当 $R_0\leqslant 1$ 时，模型(2)的无病平衡点 $D_0(S_0,V_0,0,0)$ 是全局渐近稳定的。

证明 构造 Lyapunov 函数 $V=\frac{1}{\beta+d+c}I$，显然有 $V(S_0,V_0,0,0)=0$，并且 $V(S,V,I,R)>0$ 也成立，因此若 $R_0\leqslant 1$，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\frac{1}{\beta+d+c}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\beta+d+c}\left[\frac{qkSI}{1+aI+bI^2}+\frac{\sigma kIV}{1+aI+bI^2}-\frac{\beta I}{1+\alpha I}-(d+c)I\right]\leqslant$$

$$\frac{1}{\beta+d+c}(qkSI+\sigma kIV)(1+\alpha I)-[\beta I+(d+c)I(1+\alpha I)](1+aI+bI^2)]\leqslant$$

$$\frac{1}{\beta+d+c}[(qkSI+akIV)(1+\alpha I)-\beta I-\alpha a\beta I^2-b\beta I^3-(d+c)I(1+\alpha I)](1+\alpha I+bI^2)=$$

$$\frac{1}{\beta+d+c}\left[\frac{qk(d+\theta)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta}+\frac{\sigma k\delta(1-q)A}{d(d+\theta+\delta)+q\delta\theta}-(\beta+d+c)\right](1+\alpha I^2)-$$

$$\frac{\alpha(d+c)}{(\beta+d+c)^2}I-\frac{b(\beta+d+c+\alpha d+\alpha c)}{(\beta+d+c)^2}I^3=(R_0-1)(I+\alpha I^2)-\frac{\alpha(d+c)}{(\beta+d+c)^2}(I+I^3)-bI^3<0。$$

故当 $R_0\leqslant 1$ 时 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，并且等号成立的充要条件是 $I=0$。因此当 $I=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-dR$，当 $t\to+\infty$ 时有 $R\to 0$，故使 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 成立的最大正向不变集[7]为 $(S_0,V_0,0,0)$。故由 Lyapunov-LaSalle 不变集定理[8]可知，模型(2)的无病平衡点是全局渐近稳定的。

5　地方病平衡点的全局稳定性

定理 6　当 $R_0>1$ 时，模型(2)的地方病平衡点是全局渐近稳定的。

证明　由(9)式变分矩阵 $\boldsymbol{J}(D^*)$ 计算可得模型(2)的二阶加性复合矩阵[4]为

$$\boldsymbol{J}^{[2]}=\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} Q_{11} & -\dfrac{\sigma kV(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2} & \dfrac{qkS^*(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2} \\ \dfrac{\sigma kI^*}{1+aI^*+bI^{*2}} & Q_{22} & \theta \\ -\dfrac{qkI^*}{1+aI^*+bI^{*2}} & \delta(1-q) & Q_{33} \end{pmatrix},$$

其中，

$$Q_{11}=-\frac{qkI^*+\sigma kI^*+[\delta(1-q)+2d+\theta](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}},$$

$$Q_{22}=-\frac{qkI^*+[\delta(1-q)+d](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^*}+$$
$$\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})(1+\alpha I^*)^2-[\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2](1+aI^*+bI^{*2})^2}{(1+aI^*+bI^{*2})^2(1+\alpha I^*)^2}$$

$$Q_{33}=-\frac{\sigma kI^*+(d+\theta)(1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}+$$
$$\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})(1+\alpha I^*)^2-[\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2](1+aI^*+bI^{*2})^2}{(1+aI^*+bI^{*2})^2(1+\alpha I^*)^2}。$$

矩阵值函数 $\boldsymbol{W}$ 的定义为 $\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix} I^* & 0 & 0 \\ 0 & V^* & 0 \\ 0 & 0 & S^* \end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{W}_g=\nabla_{qij}h(x)$，可以得出 $\boldsymbol{W}_g=\begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{33} \end{pmatrix}$，其中，

$$\omega_{11}=\frac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{\sigma kI^*V^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*}-(d+c)I^*,$$

$$\omega_{22}=(1-q)\delta S^*-\frac{\sigma kI^*V^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(d+\theta)V^*,\omega_{33}=A-\frac{qkS^*I^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(1-q)\delta S^*+dS^*+\theta V^*。$$

最终，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的结果为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{W}_g\boldsymbol{W}^{-1}+\boldsymbol{WQW}^{-1}=\begin{pmatrix} m_{11} & -\dfrac{\sigma kI(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2} & \dfrac{qkI^*(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2} \\ \dfrac{\sigma kV^*}{1+aI^*+bI^{*2}} & m_{22} & \dfrac{\theta V^*}{S^*} \\ -\dfrac{qkS^*}{1+aI^*+bI^{*2}} & \dfrac{\delta(1-q)S^*}{V^*} & m_{33} \end{pmatrix},$$

其中，

$$m_{11}=\frac{qkS^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{\sigma kV^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-\frac{\beta}{1+\alpha I^*}-(d+c)+$$
$$\frac{qkI^*+\sigma kI^*+[\delta(1-q)+2d+\theta](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}},$$

$$m_{22}=\frac{(1-q)\delta S^*}{V^*}-\frac{\sigma kI^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-(d+\theta)+\frac{qkI^*+[\delta(1-q)+d](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}+$$
$$\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})(1+\alpha I^*)^2-[\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2](1+aI^*+bI^{*2})^2}{(1+aI^*+bI^{*2})^2(1+\alpha I^*)^2},$$

$$m_{33}=-(1-q)\delta-d+\frac{\theta V^*+A}{S^*}-\frac{qkI^*+\sigma kI^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+$$

$$\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})(1+\alpha I^*)^2-[\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2](1+aI^*+bI^{*2})^2}{(1+aI^*+bI^{*2})^2(1+\alpha I^*)^2}。$$

假设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_2)^{\mathrm{T}}$,讨论 $\boldsymbol{\omega}$ 的范数

$$\begin{cases}\max\{|\omega_1|+|\omega_2|,|\omega_3|+|\omega_2|\},0\leqslant\omega_2\omega_3,\\ \max\{|\omega_1|+|\omega_3|,|\omega_2|\},\omega_1\omega_3\leqslant 0。\end{cases} \tag{10}$$

由上述讨论,考虑 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ 的右导数,即 $D_+\|\boldsymbol{\omega}\|$,等式可表示为

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}。$$

情形 1 若 $|\omega_1|<|\omega_2|$,则有 $\|\boldsymbol{\omega}\|=|\omega_3|+|\omega_2|$,且 $D_+\|\boldsymbol{\omega}\|$ 为

$$\begin{gathered}D_+\|\boldsymbol{\omega}\|=m_{21}\omega_1+m_{22}\omega_2+m_{23}\omega_3+m_{31}\omega_1+m_{32}\omega_2+m_{33}\omega_3\leqslant\\(m_{21}+m_{31})\omega_1+(m_{22}+m_{23}+m_{32}+m_{33})(\omega_2+\omega_3)\leqslant\\(\frac{\sigma kV^*-qkS^*}{1+aI^*+bI^{*2}})\omega_1+[\frac{(1-q)\delta S^*}{V^*}-(d+\theta)+\frac{[\delta(1-q)+d](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}-(1-q)\delta-d+\\\frac{\theta V^*+A}{S^*}+\frac{\theta V^*}{S^*}+\frac{\delta(1-q)S^*}{V^*}+\frac{2(qkS^*+\sigma kV^*)(1+bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}-\frac{\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}](\omega_2+\omega_3)\leqslant\\ [\frac{2(1-q)\delta S^*}{V^*}+\frac{\sigma kV^*-qkS^*+[\delta(1-q)+2d+\theta](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}+\\\frac{2(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}-\frac{\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}-(1-q)\delta-2d-\theta+\frac{\theta V^*+A}{S^*}](\omega_2+\omega_3),\end{gathered}$$

因此,

$$D_+\|\boldsymbol{\omega}\|\leqslant-[(1-q)\delta+2d+\theta-l_1]\|\boldsymbol{\omega}\|。 \tag{11}$$

其中

$$\begin{gathered}l=\frac{2(1-q)\delta S^*}{V^*}+\frac{\sigma kV^*-qkS^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{2(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})}+\frac{\theta V^*+A}{S^*}-\\\frac{\beta+(\delta(1-q)+3d+\theta+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}。\end{gathered}$$

情形 2 若 $|\omega_1|>|\omega_3|$,则有 $|\boldsymbol{\omega}|=|\omega_3|+|\omega_1|$,且 $D_+\|\boldsymbol{\omega}\|$ 可表示为

$$\begin{gathered}D_+\|\boldsymbol{\omega}\|=m_{11}\omega_1+m_{12}\omega_2+m_{13}\omega_3+m_{31}\omega_1+m_{32}\omega_2+m_{33}\omega_3\leqslant\\(m_{12}+m_{32})\omega_2+(m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33})(\omega_1+\omega_3)\leqslant[-\frac{\sigma kI^*(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\frac{\delta(1-q)S^*}{V^*}]\omega_2+\\ [\frac{\sigma kV^*}{1+aI^*+bI^{*2}}-\frac{\beta}{1+\alpha I^*}-(d+c)+\frac{[\delta(1-q)+d](1+aI^*+bI^{*2})}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{qkI^*(q-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}-\\(1-q)\delta-d+\frac{\theta V^*+A}{S^*}+\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\frac{\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}](\omega_1+\omega_3)\leqslant\\ [-(1-q)\delta-2d-c-\frac{\beta}{1+\alpha I^*}+\frac{[\delta(1-q)+d](1+aI^*+bI^{*2})+\sigma kV^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{(qkI^*-\sigma kI^*)(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\\\frac{\theta V^*+A}{S^*}+\frac{\delta(1-q)S^*}{V^*}+\frac{(qkS^*+\sigma kV^*)(1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}+\frac{\beta+(d+c)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}](\omega_1+\omega_3),\end{gathered}$$

因此,

$$D_+\|\boldsymbol{\omega}\|\leqslant-[(1-q)\delta+2d+c-l_2]\|\boldsymbol{\omega}\|, \tag{12}$$

其中

$$l_2=-\frac{\beta}{1+\alpha I^*}+\frac{\sigma kV^*}{1+aI^*+bI^{*2}}+\frac{\theta V^*+A}{S^*}+\frac{\delta(1-q)S^*}{V^*}-\frac{\beta+(2d+c+1-q)(1+\alpha I^*)^2}{(1+\alpha I^*)^2}+$$

$$\frac{[qk(S^*+I^*)+\sigma k(V^*-I^*)](1-bI^{*2})}{(1+aI^*+bI^{*2})^2}。$$

同理可证其他情况。根据不等式(11)(12)可以得出$[(1-q)\delta+2d+\theta-l_1]$和$[(1-q)\delta+2d+c-l_2]$有界。设 H 为正数，假设 $-H$ 和 H 都有界，即有 $-H\leqslant\min\{(1-q)\delta+2d+\theta-l_1,[(1-q)\delta+2d+c-l_2]\}$和 $\max\{(1-q)\delta+2d+\theta-l_1,[(1-q)\delta+2d+c-l_2]\}\leqslant H$。故如果(10)(11)(12)与条件$(1-q)\delta+2d+\theta>l_1$ 以及$(1-q)\delta+2d+c>l_2$ 同时成立，则模型(2)的地方病平衡点是全局稳定的。

6　结论

考虑到传染病传播受多种因素影响，研究了一类存在心理因素影响的传染率函数、因隔离降低的接触率函数、有医疗限制的治疗函数以及有疫苗接种有效率等因素的 SVIR 传染病模型。对比文献[3]，本文考虑情况更为复杂，考虑因素更为全面。结果表明，当 $R_0\leqslant1$ 时，模型(2)的无病平衡点是全局渐近稳定的，传染病会逐渐消失；当 $R_0>1$ 且(P1)(P2)(P3)同时成立时，模型(2)的地方病平衡点全局渐近稳定。

参　考　文　献：

[1]　LIU X，TAKEUCHI Y，IWAMI S. SVIR epidemic models with vaccination strategies[J]. Journal of theoretical biology，2008，253(1)：1 - 11.

[2]　XIAO D，ZHOU Y. Qualitative analysis of an epidemic model[J]. Canadian applied mathematics quarterly，2006，14(4)：480 - 484.

[3]　廖书，杨炜明. 一类含有预防接种的 SVIR 最优控制模型[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(1)：72 - 78. DOI：10. 13718/j. cnki. xdzk. 2015. 01. 011.

[4]　ZHANG T L，TENG Z D. On a nonautonomous SEIRS model in epidemiology[J]. Bulletin of mathematical Biology，2007，69(8)：2537 - 2559.

[5]　马知恩，周义仓，王稳地. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社，2004.

[6]　魏俊杰，王洪滨，蒋卫华. 时滞微分方程的分支理论及应用[M]. 北京：科学出版社，2012.

[7]　张腾，樊永红，王琳琳. 一类含有一般传染率的 SEIR 传染病模型的定性分析[J]. 鲁东大学学报(自然科学版)，2021，37(4)：303 - 309.

[8]　MILLER R K，MICHEL A N. Ordinary differential equations[M]. New York：Academic Press，1982.

Stability Analysis of an Infectious Model of SVIR with Psychological Influence

CHEN Xia-xia，ZHANG Rui

(*School of Mathematics and Physics，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou* 730070，*China*)

Abstract：A model of SVIR infectious disease with a psychological infection rate function and a medical treatment function is studied. Firstly，the existence of the model equilibrium point is discussed，and the basic regeneration number is calculated. Then，the local stability of disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point is obtained by Hurwitz criterion. The global stability of disease-free equilibrium point is proved by constructing Lyapunov function.

Keywords：psychological factors；stability；SVIR infectious disease model

(责任编辑：贾晶晶)