

【微分方程与动力系统研究】

# 一类考虑无症状感染者的时滞甲型流感模型

张子振, 张伟诗

(安徽财经大学 管理科学与工程学院, 安徽 蚌埠 233030)

**摘要:** 研究一类考虑无症状感染者的时滞甲型流感模型, 以无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期时滞为分岔参数, 推导出模型产生 Hopf 分岔的充分条件, 并通过计算机数值模拟验证了所得结果的正确性。

**关键词:** 甲型流感模型; 时滞; Hopf 分岔

**中图分类号:** O 175      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.02.006

## 0 引言

相比于普通感冒, 流感的传染性更强, 症状更加严重。目前, 全球范围来看, 流感病毒以甲型为主, 甲型流感对人类的健康威胁以及整个社会公共卫生体系的威胁最为严重<sup>[1-2]</sup>。近年来, 学者提出了不同形式的流感模型, 通过分析其动力学性质, 探索流感传播规律。文献[3]研究了一类 H1N1 流感模型, 讨论了 H1N1 流感传播的时间节点。文献[1, 4]分别研究了一类考虑疫苗接种的流感模型, 并分析了疫苗接种对流感传播控制的有效性。文献[5]提出了一类随机甲型流感模型, 并推导出流感灭绝的充分条件。

以上流感模型均未考虑无症状感染者对流感传播的影响。在 2009 年 H1N1 流感爆发期间, 有 75% 的感染者是无症状感染者<sup>[6]</sup>, 并且无症状感染者的出现会严重影响药物预防等措施的有效性。因此, 最近, 文献[7]提出了考虑无症状感染者的甲型流感模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (1-p)\Lambda - \mu S(t) - \varphi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \delta A(t)) + \gamma_1 A(t) + \gamma_2 I(t) + \gamma_3 V(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \delta \beta S(t) A(t) - \mu A(t) - \nu A(t) - \gamma_1 A(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) + \nu A(t) - \mu I(t) - \gamma_2 I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = p\Lambda + \varphi S(t) - \mu V(t) - \gamma_3 V(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $S(t)$ 、 $A(t)$ 、 $I(t)$  和  $V(t)$  分别表示易感者、无症状感染者、有症状感染者和免疫者在时刻  $t$  的数量,  $\Lambda$  表示易感者的常数输入率,  $p$  表示新增易感者中的免疫率,  $\mu$  表示所有群体的自然死亡率,  $\beta$  表示有症状感染者对易感者的感染率,  $\delta\beta$  表示无症状感染者对易感者的感染率,  $\varphi$ 、 $\nu$ 、 $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  和  $\gamma_3$  均表示状态转移率。Guan 等<sup>[7]</sup>研究了模型(1)的局部和全局渐近稳定性。显然, 模型(1)假设无症状感染者向有症状感染者的转变是瞬时的, 这与现实世界中的实际情况不符。因此, 在模型(1)的基础上, 引入无症状感染者向有症状

收稿日期: 2022-10-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(12061033)

第一作者简介: 张子振(1982-), 男, 山东聊城人, 教授, 博士, 主要从事系统动力学研究。E-mail: zzzhaida@163.com

感染者转变所经历的时间周期时滞,研究时滞甲型流感模型

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = (1-p)\Lambda - \mu S(t) - \varphi S(t) - \beta S(t)(I(t) + \delta A(t)) + \gamma_1 A(t) + \gamma_2 I(t) + \gamma_3 V(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = \delta \beta S(t) A(t) - \mu A(t) - \nu A(t - \zeta) - \gamma_1 A(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t) I(t) + \nu A(t - \zeta) - \mu I(t) - \gamma_2 I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = p\Lambda + \varphi S(t) - \mu V(t) - \gamma_3 V(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\zeta$  为无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期时滞。

### 1 局部稳定性和 Hopf 分岔存在性

根据 Guan 等<sup>[7]</sup>的计算结果可知,如果基本再生数  $R_0 = \frac{\Lambda \beta \delta [\mu(1-p) + \gamma_3]}{\mu(\mu + \nu + \gamma_1)(\mu + \varphi + \gamma_3)} > 1$  且  $\delta > \frac{\mu + \nu + \gamma_1}{\mu + \gamma_2}$ , 则模型(2)存在唯一疾病平衡点  $D_*(S_*, A_*, I_*, V_*)$ , 其中,

$$S_* = \frac{\mu + \nu + \gamma_1}{\beta \delta}, I_* = \frac{\delta \nu A_*}{\delta(\mu + \gamma_2) - (\mu + \nu + \gamma_1)},$$

$$A_* = \frac{(R_0 - 1)\Lambda[\mu(1-p) + \gamma_3][\delta(\mu + \gamma_2) - (\mu + \nu + \gamma_1)]}{\mu(\mu + \gamma_3)[\delta(\mu + \nu + \gamma_2) - (\mu + \nu + \gamma_1)]}, V_* = \frac{\Lambda p \beta \delta + \varphi(\mu + \nu + \gamma_1)}{\beta \delta(\mu + \gamma_3)}.$$

模型(2)在疾病平衡点  $D_*(S_*, A_*, I_*, V_*)$  处的特征方程为

$$\lambda^4 + \gamma_{03}\lambda^3 + \gamma_{02}\lambda^2 + \gamma_{01}\lambda + \gamma_{00} + (\nu\lambda^3 + \gamma_{12}\lambda^2 + \gamma_{11}\lambda + \gamma_{10})e^{-\lambda\zeta} = 0, \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \beta_{22}\beta_{33}(\beta_{11}\beta_{44} - \varphi\gamma_3) - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33}\beta_{44} + \beta_{13}\beta_{31}\beta_{33}\beta_{44}, \\ \gamma_{01} &= (\beta_{33} + \beta_{44})(\beta_{12}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{22}) - \beta_{33}\beta_{44}(\beta_{11} + \beta_{22}) + \varphi\gamma_3(\beta_{22} + \beta_{33}) - \beta_{13}\beta_{31}(\beta_{22} + \beta_{44}), \\ \gamma_{02} &= \beta_{13}\beta_{31} - \beta_{12}\beta_{21} - \varphi\gamma_3 + \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{33}\beta_{44} + (\beta_{11} + \beta_{22})(\beta_{33} + \beta_{44}), \\ \gamma_{03} &= -(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \beta_{44}), \gamma_{10} = \nu\beta_{13}\beta_{44}(\beta_{21} + \beta_{31}) + \nu\beta_{33}(\varphi\gamma_3 - \beta_{11}\beta_{44}), \\ \gamma_{11} &= \nu(\beta_{11}\beta_{33} + \beta_{11}\beta_{44} + \beta_{33}\beta_{44} - \varphi\gamma_3 - \beta_{13}\beta_{21} - \beta_{13}\beta_{31}), \gamma_{12} = -\nu(\beta_{11} + \beta_{33} + \beta_{44}). \end{aligned}$$

当  $\zeta=0$  时,方程(3)变为

$$\lambda^4 + \gamma_{23}\lambda^3 + \gamma_{22}\lambda^2 + \gamma_{21}\lambda + \gamma_{20} = 0, \quad (4)$$

其中,  $\gamma_{20} = \gamma_{00} + \gamma_{10}, \gamma_{21} = \gamma_{01} + \gamma_{11}, \gamma_{22} = \gamma_{02} + \gamma_{12}, \gamma_{23} = \gamma_{03} + \nu$ .

**引理 1<sup>[7]</sup>** 当  $R_0 > 1$  时,方程(4)的根均具有负实部,即,当  $\zeta=0$  时,模型(2)局部渐近稳定。

当  $\zeta > 0$  时,假设  $\lambda = i\alpha (\alpha > 0)$  为方程(3)的根,则有

$$\begin{cases} (\gamma_{11}\alpha - \nu\alpha^3)\sin(\zeta\alpha) + (\gamma_{10} - \gamma_{12}\alpha^2)\cos(\zeta\alpha) = \gamma_{02}\alpha^2 - \alpha^4 - \gamma_{00}, \\ (\gamma_{11}\alpha - \nu\alpha^3)\cos(\zeta\alpha) - (\gamma_{10} - \gamma_{12}\alpha^2)\sin(\zeta\alpha) = \gamma_{03}\alpha^3 - \gamma_{01}\alpha. \end{cases} \quad (5)$$

进而,得到关于  $\alpha$  的代数方程

$$\alpha^8 + \gamma_{33}\alpha^6 + \gamma_{32}\alpha^4 + \gamma_{31}\alpha^2 + \gamma_{30} = 0, \quad (6)$$

其中,

$$\gamma_{30} = \gamma_{00}^2 - \gamma_{10}^2, \gamma_{31} = \gamma_{01}^2 - 2\gamma_{00}\gamma_{02} + 2\gamma_{10}\gamma_{12} - \gamma_{11}^2, \gamma_{32} = \gamma_{02}^2 - 2\gamma_{01}\gamma_{03} + 2\gamma_{00} - \gamma_{12}^2 + 2\nu\gamma_{11}, \gamma_{33} = \gamma_{03}^2 - 2\gamma_{02} - \nu^2.$$

令  $\alpha^2 = \chi$ . 则方程(6)变为

$$\chi^4 + \gamma_{33}\chi^3 + \gamma_{32}\chi^2 + \gamma_{31}\chi + \gamma_{30} = 0. \quad (7)$$

假设方程(7)存在正实根  $\chi_0$ , 则对于方程(6)存在正实根  $\alpha_0 = \sqrt{\chi_0}$ . 对于  $\alpha_0$ , 利用方程(5), 有

$$\zeta_0 = \frac{1}{\alpha_0} \times \arccos\left\{\frac{\Delta_1(\alpha_0)}{\Delta_0(\alpha_0)}\right\}, \quad (8)$$

其中,

$$\Delta_0(\alpha_0) = \nu^2 \alpha_0^6 + (\gamma_{12}^2 - 2\nu\gamma_{11})\alpha_0^4 + (\gamma_{11}^2 - 2\gamma_{10}\gamma_{12})\alpha_0^2 + \gamma_{10}^2,$$

$$\Delta_1(\alpha_0) = (\gamma_{12} - \nu\gamma_{03})\alpha_0^6 + (\gamma_{11}\gamma_{03} + \nu\gamma_{01} - \gamma_{10} - \gamma_{12}\gamma_{02})\alpha_0^4 + (\gamma_{10}\gamma_{02} - \gamma_{11}\gamma_{01} + \gamma_{12}\gamma_{00})\alpha_0^2 - \gamma_{10}\gamma_{00}.$$

对方程(3)左右两边求  $\lambda$  关于  $\zeta$  的导数, 有

$$\left[ \frac{d\lambda}{d\zeta} \right]^{-1} = -\frac{4\lambda^3 + 3\gamma_{03}\lambda^2 + 2\gamma_{02}\lambda + \gamma_{01}}{\lambda(\lambda^4 + \gamma_{03}\lambda^3 + \gamma_{02}\lambda^2 + \gamma_{01}\lambda + \gamma_{00})} + \frac{3\nu\lambda^2 + 2\gamma_{12}\lambda + \gamma_{11}}{\lambda(\nu\lambda^3 + \gamma_{12}\lambda^2 + \gamma_{11}\lambda + \gamma_{10})} - \frac{\zeta}{\lambda},$$

所以  $\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\zeta} \right]^{-1}_{\zeta=\zeta_0} = \frac{L'(\chi_0)}{\Delta_0(\alpha_0)}$ , 其中,  $L(\chi) = \chi^4 + \gamma_{33}\chi^3 + \gamma_{32}\chi^2 + \gamma_{31}\chi + \gamma_{30}$ ,  $\alpha_0^2 = \chi_0$ 。显然, 如果  $L'(\chi_0) \neq 0$ , 则

$\operatorname{Re} \left[ \frac{d\lambda}{d\zeta} \right]^{-1}_{\zeta=\zeta_0} \neq 0$ 。根据文献[8]中关于动力系统 Hopf 分岔存在性定理, 得到下列结果。

**定理 1** 如果  $R_0 > 1$ , 当  $\zeta \in [0, \zeta_0)$  时, 模型(2)局部渐近稳定; 当  $\zeta = \zeta_0$  时, 模型(2)产生 Hopf 分岔, 并在  $D_*(S_*, A_*, I_*, V_*)$  附近产生一簇分岔周期解。其中,  $\zeta_0$  如方程(8)中的定义。

## 2 数值模拟

选取  $p=0.25, \Lambda=1, \mu=0.1, \varphi=0.02, \beta=0.4, \delta=0.75, \gamma_1=0.1, \gamma_2=0.25, \gamma_3=0.03, \nu=0.03$ , 模型(2)变为

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = 0.75 - 0.12S(t) - 0.4S(t)(I(t) + 0.75A(t)) + 0.1A(t) + 0.25I(t) + 0.03V(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} = 0.3S(t)A(t) - 0.2A(t) - 0.03A(t-\zeta), \\ \frac{dI(t)}{dt} = 0.4S(t)I(t) + 0.03A(t-\zeta) - 0.35I(t), \\ \frac{dV(t)}{dt} = 0.25 + 0.02S(t) - 0.13V(t). \end{cases} \quad (9)$$

经过计算得到  $R_0 = 9.1304 > 1$  且  $\delta > \frac{\mu + \nu + \gamma_1}{\mu + \gamma_2} = 0.6571$ 。因此, 模型(9)存在唯一疾病平衡点  $D_*(0.7667, 4.2500, 2.9423, 2.0410)$ 。进而,  $\alpha_0 = 3.2158, \zeta_0 = 56.0355$ 。选取  $\zeta = 52.6879$  和  $\zeta = 59.8529$  进行仿真, 效果图如图 1、图 2 所示。

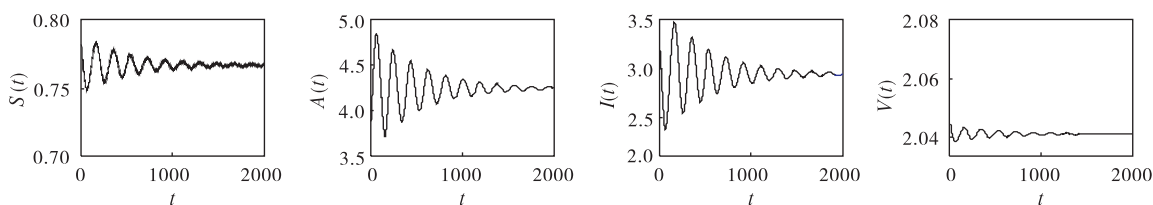


图 1 当  $\zeta = 52.6879 \in [0, \zeta_0)$  时, 模型(9)局部渐近稳定

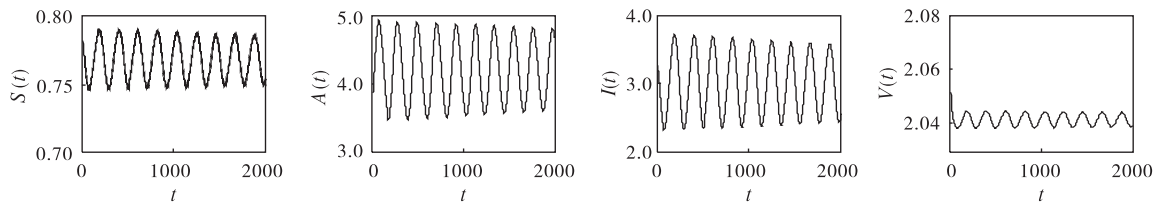


图 2 当  $\zeta = 59.8529 > \zeta_0$  时, 模型(9)失去稳定

当  $\zeta = 52.6879 \in [0, \zeta_0 = 56.0355)$ , 根据定理 1 可知, 此时模型(9)局部渐近稳定, 见图 1。当  $\zeta = 59.8529 > \zeta_0$  时, 模型(9)失去稳定并在  $\zeta_0 = 56.0355$  附近产生 Hopf 分岔, 在有疾病平衡点处  $D_*(0.7667, 4.2500, 2.9423, 2.0410)$  产生分岔周期解, 见图 2。

## 3 小结

本文在文献[7]提出的甲型流感模型中,进一步引入无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期时滞,提出了一类时滞甲型流感模型。利用特征值法,以无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期时滞为分岔参数,讨论了模型 Hopf 分岔的存在性。研究表明,无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期足够小时(低于临界值  $\zeta_0$ ),模型局部渐近稳定,模型中易感者、无症状感染者、有症状感染者和免疫者的数量逐渐趋近于疾病平衡点。此时,甲型流感的传播易于预测和控制。一旦无症状感染者向有症状感染者转变所经历的时间周期高于临界值  $\zeta_0$ ,那么模型失去稳定,在  $\zeta_0$  附近产生 Hopf 分岔。此时,模型中易感者、无症状感染者、有症状感染者和免疫者的数量在疾病平衡点附近呈现出周期震荡,不利于甲型流感的传播控制。

## 参 考 文 献:

- [1] 王晓静,白玉珍,王丹,等. 一类具有疫苗接种和有限医疗资源的流感模型的动力学研究[J]. 数学的实践与认识,2020,50(3):235-240.
- [2] 李焱,梁丁元,穆云松,等. 甲型流感的流行与防控分析及其对新冠肺炎疫情的启示[J]. 环境科学研究,2020,33(7):1562-1570.
- [3] 张珍. 一类 H1N1 流感模型性态研究[J]. 太原师范学院学报(自然科学版),2017,16(1):9-11.
- [4] 吴荣杰,冯光庭,张兴安,等. 流感模型的数据模拟和动力学分析[J]. 数学的实践与认识,2018,48(8):143-152.
- [5] ZHANG T Q, DING T T, GAO N, et al. Dynamical behavior of a stochastic SIRC model for influenza A[J]. Symmetry, 2020, 12(5): 1-18.
- [6] HAYWARD A C, FRAGASZY E B, BERMINGHAM A, et al. Comparative community burden and severity of seasonal and pandemic influenza; results of the flu watch cohort study[J]. The lancet respiratory medicine, 2014, 2(6): 445-454.
- [7] GUAN X Z, YANG F, CAI Y L, et al. Global stability of an influenza A model with vaccination[J]. Applied mathematics letters, 2022, 134(7): 1-6.
- [8] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

## A Delayed Influenza A Model for Incorporating Asymptomatic Patients

ZHANG Zi-zhen, ZHANG Wei-shi

(School of Management Science and Engineering,  
Anhui University of Finance and Economics, Bengbu 233030, China)

**Abstract:** A delayed influenza A model for incorporating asymptomatic patients is studied. Taking the time delay due to the period that the asymptomatic patients become symptomatic patients as the bifurcation parameter, sufficient conditions for the occurrence of the Hopf bifurcation are derived. The correctness of the results is verified by computer numerical simulations.

**Keywords:** influenza A model; delay; Hopf bifurcation

(责任编辑:贾晶晶)