【微分方程与动力系统研究】

具有年龄结构的三种群捕食与被捕食系统的最优生育率控制

周子娟

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：提出一类具有年龄结构的三种群捕食与被捕食系统，研究该系统的最优生育率控制问题。通过构造极值序列和 Mazur 定理证明了最优控制的存在性，利用法锥与共轭系统推导出模型的最优生育率控制的必要条件，为三种群的生育率控制问题提供了理论依据。

关键词：年龄结构；捕食系统；最优生育率控制；最优条件；共轭系统

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.06.007

有关生物种群系统的问题自提出以来，便一直被广泛讨论，对于具有年龄结构的最优控制问题前人已做了大量研究[1-5]。种群中新生个体的出生率对整个种群的延续有着至关重要的影响，研究种群生育率能使系统种群密度尽可能接近理想分布，近年来已有许多学者对该问题做了研究[6-9]。文献[10]研究了基于时滞的单种群模型的最优生育率控制；文献[11]讨论了周期问题下单种群模型的最优生育率控制问题；文献[12]对具有竞争关系的两种群系统的最优生育率控制问题做了研究。上述研究并未深入考虑多种群间的相互作用关系（例如食物链关系等），而大型生态系统中的一个重要组成部分是三种群捕食与被捕食系统。因此，本文在上述研究基础上，考察一类具有年龄结构的多种群模型的最优生育率控制问题，该系统由三个相互作用的食物链种群构成，研究其生育率控制问题更具现实意义。

1　模型建立

考虑模型

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p_1}{\partial a}+\dfrac{\partial p_1}{\partial t}=-\mu_1(a,t)p_1(a,t)-\lambda_{12}(a,t)P_2(t)p_1(a,t),\\ \dfrac{\partial p_2}{\partial a}+\dfrac{\partial p_2}{\partial t}=-\mu_2(a,t)p_2(a,t)+\lambda_{21}(a,t)P_1(t)p_2(a,t)-\lambda_{23}(a,t)P_3(t)p_2(a,t),\\ \dfrac{\partial p_3}{\partial a}+\dfrac{\partial p_3}{\partial t}=-\mu_3(a,t)p_3(a,t)+\lambda_{32}(a,t)P_2(t)p_3(a,t),\\ p_i(0,t)=\int_0^A\beta_i(a,t)p_i(a,t)\mathrm{d}a,\ p_i(a,0)=p_i^0(a),\\ P_i(t)=\int_0^A p_i(a,t)\mathrm{d}a,\ i=1,2,3,\ (a,t)\in Q。\end{cases}\tag{1}$$

其中：$Q=(0,A)\times(0,T)$，A 和 T 作为固定常数分别表示种群中个体最大年龄和控制周期，$p_i(a,t)$ 为第 i 个种群个体年龄为 a 在 t 时刻的密度分布函数，p_i^0 为第 i 个种群的初始时刻（$t=0$）分布密度，μ_i 为第 i 个

收稿日期：2023-03-08

基金项目：国家自然科学基金项目（11561041）；甘肃省自然科学基金项目（1506RJZA071）

作者简介：周子娟（2000—），女，陕西西安人，硕士研究生，主要从事生物数学研究。E-mail：717567249@qq.com

种群的死亡率，λ_i 表示两种群间的相互影响系数，$P_i(t)$ 为第 i 个种群 t 时刻的种群总量。在系统(1)中，控制量为种群的生育率 $\beta_i(a,t)$。那么显然有 $p_i(a,t)$ 依赖于 $\beta_i(a,t)$，将其记作 $p_i(a,t)=p_i(a,t;\beta_i)$ 或 $p_i(\beta_i)$。

设所期望系统(1)的理想状态为 $z_{id}(a,t)\in L^2(Q)$，因此，通过选取适当的控制量 $\beta_i(a,t)$，使得种群的密度 $p_i(a,t;\beta_i)$ 尽可能地逼近 $z_{id}(a,t)$，同时 $\beta_i(a,t)$ 也尽可能小，来达到目的。考虑最优控制问题

$$\min J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\sum_{i=1}^{3}\int_Q |p_i(\beta_i)-z_{id}|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中，$p_i(\beta_i)$ 是系统(1)相应于 $\beta_i=\beta_i(a,t)$ 的解。允许控制集为

$$U_i=\{\beta_i\in L^\infty(Q):0<\beta_i(a,t)<1,\forall a\in(0,A)\},i=1,2,3;U=U_1\times U_2\times U_3。$$

基本假设如下：

(H1) 对 $(a,t)\in Q$，$\mu_i\in L^1_{loc}(Q)$，$\int_0^A\mu_i(a,t)\mathrm{d}a=+\infty$；$\mu_i$ 是 $(0,A)\times L^\infty(Q)$ 上的非负有界函数，且对第二个偏量的偏导函数有界；$|\mu_i(a,\omega)|\leqslant C_1$，$C_1$ 是正常数。

(H2) $\lambda_i\in L^\infty(Q)$，$0\leqslant\lambda_i\leqslant C_2$，这里 C_2 是正常数。

(H3) $p_i^0(a)\in L^\infty(0,A)$，$0\leqslant p_i^0(a)\leqslant C_3(i=1,2,3)$。

(H4) $0\leqslant\beta_0\leqslant\beta_i(t)\leqslant\beta^0$，对 $\forall t>0$，β_0 和 β^0 都是正常数。

定理 1[13] 若(H1)～(H4)成立，则对任意给定的 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in U_1\times U_2\times U_3$，系统(1)存在唯一非负解 $p^\beta=(p_1^{\beta_1},p_2^{\beta_2},p_3^{\beta_3})\in L^\infty(Q,R^3)$，且 $0\leqslant p_i^\beta\leqslant M$，$\forall(a,t)\in Q$，$i=1,2,3$。

2 最优生育率控制的存在性

构造极值化序列并利用 Mazur 定理给出最优控制问题(1)的存在性结论。

定理 2 设 $p_i(\beta_i)$ 是系统(1)的解，容许控制集 $U_1\times U_2\times U_3$ 给定，若(H1)～(H4)成立，则在 $U_1\times U_2\times U_3$ 中，问题(2)至少存在一个最优控制对 $\beta^*=(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*)$。

证明 设

$$J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\int_Q|p_1(\beta)-z_{1d}|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_Q|p_2(\beta)-z_{2d}|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}t+\int_Q|p_3(\beta)-z_{3d}|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

令 $d=\min\limits_{\beta_i=U_i}J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由 $0<J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<+\infty$，得 $d\in[0,+\infty)$。取

$$\{\beta_n\}_{n\in\mathbf{N}}:\{\beta_n\}=\{(\beta_{1n},\beta_{2n},\beta_{3n})\in U_1\times U_2\times U_3\},d\leqslant J(\beta_{1n},\beta_{2n},\beta_{3n})<d+\frac{1}{n}。\tag{3}$$

由定理 1 知 $0\leqslant p_i^\beta\leqslant M$，其中 $M>0$，于是存在一个子序列，仍记为 $\{(p_1^{\beta_n},p_2^{\beta_n},p_3^{\beta_n},)\}$，使得

$$(p_1^{\beta_n},p_2^{\beta_n},p_3^{\beta_n},)\xrightarrow{w}(p_1^*,p_2^*,p_3^*) \tag{4}$$

在 $L^\infty(Q,R^3)$ 中成立。由 Mazur 定理知，存在 $\{(p_1^{\beta_n},p_2^{\beta_n},p_3^{\beta_n})\}$ 的子列 $\{(\tilde{p}_{1n},\tilde{p}_{2n},\tilde{p}_{3n})\}$，这里，$\tilde{p}_{in}=\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n p_i^{\beta_j}$，$\delta_j^n\geqslant0$，$\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n=1$，$i=1,2,3$，$\{\beta_j\}\subset\{\beta_n\}$ 且当 $n\to+\infty$ 时，

$$\tilde{p}_{in}\to p_i^* \tag{5}$$

在 $L^\infty(Q)$ 上成立。由文献[14]中引理 5.1.1 有

$$P_i^{\beta_n}\to P_i^* \tag{6}$$

在 $(0,T)$ 内成立 $(i=1,2,3)$。其中 $P_i^{\beta_n}=\int_0^A p_i^{\beta_n}(a,t)\mathrm{d}a$，由式(4)得

$$\int_0^A p_i^{\beta_n}(a,\cdot)\mathrm{d}a \text{ 弱收敛于} \int_0^A p_i^*(a,\cdot)\mathrm{d}a。\tag{7}$$

由式(6)(7)及极限唯一性得 $P_i^*(t)=\int_0^A p_i^*(a,t)\mathrm{d}a$ 在 $(0,T)$ 内成立。

因 $U_i(i=1,2,3)$ 有界，则 $U_1\times U_2\times U_3$ 中存在子序列，仍记为 $\{(\beta_{1n},\beta_{2n},\beta_{3n})\}$，当 $n\to+\infty$ 时

$$\beta_{in}\xrightarrow{w}\beta_i^* \tag{8}$$

在 $L^2(0,T)$ 中成立。由 Mazur 定理，存在一个序列 $\{(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})\}=\in U_1\times U_2\times U_2$ 满足 $\tilde{\beta}_{in}=\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n\beta_{ij}$。这里 $\delta_j^n\geqslant 0$，$\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n=1$，$i=1,2,3$，且

$$\tilde{\beta}_{in}\to\beta_i^* \tag{9}$$

在 $L^2(0,T)$ 上成立，$J(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})=\sum\limits_{i=1}^{3}\int_Q|p_1^{\tilde{\beta}_n}(\tilde{\beta}_{in})-z_{id}|^2\mathrm{d}a\mathrm{d}t$。由 J 的凸性知

$$J(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})\leqslant\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^nJ(\beta_{1j},\beta_{2j},\beta_{3j})。\tag{10}$$

令式(10)中 $n\to+\infty$，再由式(3)得到

$$\lim_{n\to+\infty}J(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})\leqslant\lim_{n\to+\infty}J(\beta_{1n},\beta_{2n},\beta_{3n})=d, \tag{11}$$

故显然有

$$d=\min J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\leqslant\lim_{n\to+\infty}J(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})。\tag{12}$$

由式(9)(11)(12)得 $d=\lim\limits_{n\to+\infty}J(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})=\min J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=J(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*)$。由式(5)(6)及(H1)知

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_i^{\beta_j}(a,t;\beta_i^j)\mu_i(a,t)\to p_i^*(a,t;\beta_i^*)\mu_i(a,t),i=1,2,3; \tag{13}$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_1^{\beta_j}(a,t;\beta_1^j)P_2^{\beta_j}(t)\to p_1^*(a,t;\beta_1^*)P_2^*(t); \tag{14}$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_2^{\beta_j}(a,t;\beta_2^j)P_1^{\beta_j}(t)\to p_2^*(a,t;\beta_2^*)P_1^*(t); \tag{15}$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_2^{\beta_j}(a,t;\beta_2^j)P_3^{\beta_j}(t)\to p_2^*(a,t;\beta_2^*)P_3^*(t); \tag{16}$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_3^{\beta_j}(a,t;\beta_3^j)P_2^{\beta_j}(t)\to p_3^*(a,t;\beta_3^*)P_2^*(t); \tag{17}$$

$$\sum_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n\int_0^A\beta_i^j(a,t)p_i^{\beta_j}(a,t;\beta_i^j)\mathrm{d}a\to\int_0^A\beta_i^*(a,t)p_i^*(a,t;\beta_3^*)\mathrm{d}a。\tag{18}$$

与式(8)中 $(\tilde{\beta}_{1n},\tilde{\beta}_{2n},\tilde{\beta}_{3n})$，$(\tilde{p}_{1n},\tilde{p}_{2n},\tilde{p}_{3n})$ 对应的是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{p}_{1n}}{\partial a}+\dfrac{\partial\tilde{p}_{1n}}{\partial t}=-\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_1^{\beta_j}(a,t;\beta_1^j)\mu_1(a,t)-\lambda_{12}(a,t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_1^{\beta_j}(a,t;\beta_1^j)P_2^{\beta_j}(t),\\ \dfrac{\partial\tilde{p}_{2n}}{\partial a}+\dfrac{\partial\tilde{p}_{2n}}{\partial t}=-\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_2^{\beta_j}(a,t;\beta_2^j)\mu_2(a,t)-\lambda_{21}(a,t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_2^{\beta_j}(a,t;\beta_2^j)P_1^{\beta_j}(t)-\\ \qquad\lambda_{23}(a,t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_2^{\beta_j}(a,t;\beta_2^j)P_3^{\beta_j}(t),\\ \dfrac{\partial\tilde{p}_{3n}}{\partial a}+\dfrac{\partial\tilde{p}_{3n}}{\partial t}=-\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_3^{\beta_j}(a,t;\beta_3^j)\mu_3(a,t)+\lambda_{32}(a,t)\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^np_3^{\beta_j}(a,t;\beta_3^j)P_2^{\beta_j}(t),\\ \tilde{p}_{in}(0,t)=\sum\limits_{j=n+1}^{k_n}\delta_j^n\int_0^A\beta_i^j(a,t)p_i^{\beta_j}(a,t;\beta_i^j)\mathrm{d}a,\tilde{p}_{in}(a,0)=p_i^0(a),\\ P_i^{\beta_j}(t)=\int_0^Ap_i^{\beta_j}(a,t)\mathrm{d}a,i=1,2,3,(a,t)\in Q\end{cases} \tag{19}$$

的解。令式(19)中$n\to+\infty$,并利用式(6)(9)及(13)～(18)得到(p_1^*,p_2^*,p_3^*)是系统(1)相应于$(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*)$的解。

3 必要性条件

利用非线性泛函分析中的法锥技术及共轭方程来推导$\beta_i^*\in U_i(i=1,2,3)$是最优的必要条件。首先给出下述微分概念:

设$\beta_i\in U_i$,$p_i(a,t;\beta_i)$为系统(1)的解,$p_i(\beta_i)$在β_i^*处沿方向$(\beta_i-\beta_i^*)$的G-微分记为

$$z_i(a,t)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{p_i(\beta_i^*+\varepsilon(\beta_i-\beta_i^*))-p_i(\beta_i^*)}{\varepsilon}。$$

引理1 假设$(\beta_1^*,\beta_2^*,\beta_3^*)$是问题(2)的最优控制,并定义$(p_1^*,p_2^*,p_3^*)$是系统(1)依赖于$\beta^*$的解,那么对任意$(\beta_i-\beta_i^*)\in L^\infty(Q)$有$\beta_i^*+\varepsilon(\beta_i-\beta_i^*)\in U(i=1,2,3)$,并且当$\varepsilon>0$足够小时,极限$\frac{1}{\varepsilon}(p_i^\varepsilon-p_i^*)\to z_i$(其中$\varepsilon\to0^+,i=1,2,3$)在$L^2(Q)$中成立。其中,$p_i^\varepsilon$是系统(1)依赖于$\beta_i^*+\varepsilon(\beta_i-\beta_i^*)$的解,并且$z=(z_1,z_2,z_3)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_1}{\partial a}+\dfrac{\partial z_1}{\partial t}=-\mu_1(a,t)z_1(a,t)-\lambda_{12}(a,t)\left[P_2^*(t)z_1(a,t)+p_1^*\displaystyle\int_0^A z_2(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial a}+\dfrac{\partial z_2}{\partial t}=-\mu_2(a,t)z_2(a,t)+\lambda_{21}(a,t)\left[P_1^*(t)z_2(a,t)+p_2^*\displaystyle\int_0^A z_1(a,t)\mathrm{d}a\right]-\\ \qquad\lambda_{23}(a,t)\left[P_3^*(t)z_2(a,t)+p_2^*\displaystyle\int_0^A z_3(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial z_3}{\partial a}+\dfrac{\partial z_3}{\partial t}=-\mu_3(a,t)z_3(a,t)+\lambda_{32}\left[P_2^*(t)z_3(a,t)+p_3^*\displaystyle\int_0^A z_2(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ z_i(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta_i^*(a,t)z_i(a,t;\beta_i^*)\mathrm{d}a+\int_0^A(\beta_i-\beta_i^*)(a,t)p_i^*(a,t;\beta_1^*)\mathrm{d}a,\\ z_i(a,0)=0,\\ P_i^*(t)=\displaystyle\int_0^A p_i^*(a,t)\mathrm{d}a,i=1,2,3,(a,t)\in Q。\end{cases}\tag{20}$$

证明 记$\beta_i^\varepsilon(a,t)=\beta_i^*(a,t)+\varepsilon(\beta_i(a,t)-\beta_i^*(a,t))$,其中$0<\varepsilon<1$,并用$p_i^\varepsilon$和$p_i^*$分别表示系统(1)中当$\beta=\beta_i^\varepsilon(a,t)$,$\beta=\beta_i^*(a,t)$时在$L^2(Q)$中的解,再将所得两个方程相减,并将相减后所得方程两端同时除以$\varepsilon>0$,令$\varepsilon\to0^+$取极限,即可推得方程(20)。

定义$w_{i\varepsilon}(a,t)=\dfrac{1}{\varepsilon}[p_i^\varepsilon(a,t)-p_i^*(a,t)]\to z_i(a,t)$,其中,$(a,t)\in Q$,$i=1,2,3$。显然有$w_\varepsilon=(w_{1\varepsilon},w_{2\varepsilon},w_{3\varepsilon})$是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial a}+\dfrac{\partial w_{1\varepsilon}}{\partial t}=-\mu_1(a,t)w_{1\varepsilon}(a,t)-\lambda_{12}(a,t)\left[P_2^\varepsilon(t)w_{1\varepsilon}(a,t)+p_1^*\displaystyle\int_0^A w_{2\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial w_{2\varepsilon}}{\partial a}+\dfrac{\partial w_{2\varepsilon}}{\partial t}=-\mu_2(a,t)w_{2\varepsilon}(a,t)+\lambda_{21}(a,t)\left[P_1^\varepsilon(t)w_{2\varepsilon}(a,t)+p_2^*\displaystyle\int_0^A w_{1\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a\right]-\\ \qquad\lambda_{23}(a,t)\left[P_3^\varepsilon(t)w_{2\varepsilon}(a,t)+p_2^*\displaystyle\int_0^A w_{3\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ \dfrac{\partial w_{3\varepsilon}}{\partial a}+\dfrac{\partial w_{3\varepsilon}}{\partial t}=-\mu_3(a,t)w_{3\varepsilon}(a,t)+\lambda_{32}(a,t)\left[P_2^\varepsilon(t)w_{3\varepsilon}(a,t)+p_3^*\displaystyle\int_0^A w_{2\varepsilon}(a,t)\mathrm{d}a\right],\\ w_{i\varepsilon}(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta_i^*(a,t)w_{i\varepsilon}(a,t;\beta_i^*)\mathrm{d}a+\int_0^A(\beta_i-\beta_i^*)(a,t)p_i^*(a,t)\mathrm{d}a,\\ w_{i\varepsilon}(a,0)=0,\\ P_i^\varepsilon(t)=\displaystyle\int_0^A p_i^\varepsilon(a,t)\mathrm{d}a,i=1,2,3,(a,t)\in Q\end{cases}$$

的解。当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，有 $p_i^\varepsilon - p_i^* \to 0$ 在 $L^\infty(0,T;L^1(0,A))$ 中成立，再由文献[14]中定理 2.1.2，可推得：在 $L^\infty(0,T;L^1(0,A)) \times L^\infty(0,T;L^1(0,A)) \times L^\infty(0,T;L^1(0,A))$ 中，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，

$$w_{i\varepsilon} \to 0。\tag{21}$$

利用式(21)，同理可得：当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，在 $L^2(Q)\times L^2(Q)\times L^2(Q)$ 中，有 $\frac{1}{\varepsilon}(p_i^\varepsilon - p_i^*) \to z_i (i=1,2,3)$。

故引理 1 得证。

定理 3　若 $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*)$ 是问题(2)的最优控制，$(\beta_i^*, p_i^*)(i=1,2,3)$ 是系统(1)依赖于 β^* 的解，那么

$$\beta_i^*(a,t) = \begin{cases} 1, q_i(0,t;\beta_i^*) > 0, i=1,2,3, \\ 0, q_i(0,t;\beta_i^*) < 0, i=1,2,3。\end{cases}\tag{22}$$

其中 $q_i = (q_1, q_2, q_3)$ 是下述共轭系统的解：

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial a} + \frac{\partial q_1}{\partial t} = \mu_1(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*) - \beta_1^*(a,t)q_1(0,t;\beta_1^*) + \lambda_{12}(a,t)P_2^*(t)q_1(a,t) - \\ \qquad \int_0^A(\lambda_{21}p_2^* q_2)(a,t)\mathrm{d}a + p_1^*(a,t;\beta_1^*) - z_{1d}(a,t), \\ \frac{\partial q_2}{\partial a} + \frac{\partial q_2}{\partial t} = \mu_2(a,t)q_2(a,t;\beta_2^*) - \beta_2^*(a,t)q_2(0,t;\beta_2^*) - \lambda_{21}(a,t)P_1^*(t)q_2(a,t) + \\ \qquad \int_0^A(\lambda_{12}p_1^* q_1 - \lambda_{32}p_3^* q_3)(a,t)\mathrm{d}a + \lambda_{23}(a,t)P_3^*(t)q_2(a,t) + \\ \qquad \int_0^A(\lambda_{23}p_2^* q_3)(a,t)\mathrm{d}a + p_2^*(a,t;\beta_2^*) - z_{2d}(a,t), \\ \frac{\partial q_3}{\partial a} + \frac{\partial q_3}{\partial t} = \mu_3(a,t)q_3(a,t;\beta_3^*) - \beta_3^*(a,t)q_3(0,t;\beta_3^*) - \lambda_{32}(a,t)P_2^*(t)q_3(a,t) + \\ \qquad \int_0^A(\lambda_{32}p_2^* q_2)(a,t)\mathrm{d}a + p_3^*(a,t;\beta_3^*) - z_{3d}(a,t), \\ q_i(A,t) = 0, q_i(a,T) = 0, \\ P_i^*(t) = \int_0^A p_i^*(a,t)\mathrm{d}a, i=1,2,3,(a,t)\in Q。\end{cases}\tag{23}$$

证明　对于任意给定的 $\beta_i^* - \beta_i \in L^\infty(Q),(i=1,2,3)$，有 $\beta_i^* + \varepsilon(\beta_i - \beta_i^*) \in U(i=1,2,3)$，并且当任意 $\varepsilon > 0$ 足够小时，有

$$\sum_{i=1}^3 \int_Q (p_i^\varepsilon(\beta_i^\varepsilon) - z_{id})^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^3 \int_Q (p_i^*(\beta_i^*) - z_{id})^2 \mathrm{d}a\mathrm{d}t \geqslant 0。$$

整理可得

$$\sum_{i=1}^3 \int_Q \left[\frac{(p_i^\varepsilon)^2 - (p_i^*)^2}{\varepsilon} - \frac{2(p_i^\varepsilon - p_i^*)z_{id}}{\varepsilon}\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}t \geqslant 0。\tag{24}$$

由引理 1，对式(24)取 $\varepsilon \to 0^+$ 时的极限，得到

$$\sum_{i=1}^3 \int_Q (p_i^*(\beta_i^*) - z_{id})\mathrm{d}a\mathrm{d}t \geqslant 0。\tag{25}$$

对式(23)第 1 式两边同乘以 $z_1(a,t)$ 并在 Q 上积分，得到

$$\int_Q z_1(a,t)\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial a} + \frac{\partial q_1}{\partial t}\right) - \mu_1(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*) + \beta_1^*(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*)\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}t =$$

$$\int_Q z_1(a,t)\left[\lambda_{12}(a,t)P_2^*(t)q_1(a,t) - \int_0^A(\lambda_{21}p_2^* q_2)(a,t)\mathrm{d}a + p_1^*(a,t;\beta_1^*) - z_{1d}(a,t)\right]\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{26}$$

又有

$$\int_Q z_1(a,t)\left(\frac{\partial q_1}{\partial a} + \frac{\partial q_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}t = \int_0^T\left[\int_0^A z_1(a,t)\frac{\partial q_1(a,t;\beta_1^*)}{\partial a}\mathrm{d}a\right]\mathrm{d}t + \int_0^A\left[\int_0^T z_1(a,t)\frac{\partial q_1(a,t;\beta_1^*)}{\partial t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}a =$$

$$\int_0^T [z_1(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*)\big|_{a=0}^{a=A} - \int_0^A q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial z_1(a,t)}{\partial a}\mathrm{d}a]\mathrm{d}t +$$

$$\int_0^A [\int_0^T z_1(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*)\big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial t_1(a,t)}{\partial t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}a =$$

$$\int_0^T [z_1(A,t)q_1(A,t;\beta_1^*) - z_1(0,t)q_1(0,t;\beta_1^*) - \int_0^T q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial t_1(a,t)}{\partial t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}a -$$

$$\int_0^A [z_1(a,T)q_1(a,T;\beta_1^*) - z_1(a,0)q_1(a,0;\beta_1^*) - \int_0^A q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial z_1(a,t)}{\partial a}\mathrm{d}a]\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^T\int_0^A [-(\beta_1^* z_1(a,t) + (\beta_1 - \beta_1^*)p_1^*(a,t;\beta_1^*))q_1(0,t;\beta_1^*) - q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial z_1(a,t)}{\partial a}]\mathrm{d}a\mathrm{d}t -$$

$$\int_0^T\int_0^A q_1(a,t;\beta_1^*)\frac{\partial z_1(a,t)}{\partial t}\mathrm{d}a\mathrm{d}t = -\int_Q q_1(a,t;\beta_1^*)(\frac{\partial z_1}{\partial a} + \frac{\partial z_1}{\partial t})\mathrm{d}a\mathrm{d}t -$$

$$\int_0^T\int_0^A (\beta_1^* z_1(a,t) + (\beta_1 - \beta_1^*)p_1^*(a,t;\beta_1^*))q_1(0,t;\beta_1^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t。\tag{27}$$

在式(27)的推导过程中，利用了 $q_1(A,t) = q_1(a,T) = 0$。将式(27)代入式(26)，那么

$$-\int_Q q_1(a,t;\beta_1^*)(\frac{\partial z_1}{\partial a} + \frac{\partial z_1}{\partial t})\mathrm{d}a\mathrm{d}t - \int_Q (\beta_1^* z_1(a,t) + (\beta_1 - \beta_1^*)p_1^*(a,t;\beta_1^*))q_1(0,t;\beta_1^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t +$$

$$\int_Q z_1(a,t)[-\mu_1(a,t)q_1(a,t;\beta_1^*) + \beta_1^*(a,t)q_1(0,t;\beta_1^*)]\mathrm{d}a\mathrm{d}t =$$

$$\int_Q z_1(a,t)[\lambda_{12}(a,t)P_2^*(t)q_1(a,t) - \int_0^A (\lambda_{21}p_2^* q_2)(a,t)\mathrm{d}a + p_1^*(a,t;\beta_1^*) - z_{1d}(a,t)]\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

再由式(20)第 1、2、3 式整理得到

$$\int_Q z_1(a,t)(p_1^*(a,t;\beta_1^*) - z_{1d})\mathrm{d}a\mathrm{d}t = -\int_Q (\beta_1 - \beta_1^*)p_1^*(a,t;\beta_1^*)q_1(0,t;\beta_1^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{28}$$

$$\int_Q z_2(a,t)(p_2^*(a,t;\beta_2^*) - z_{2d})\mathrm{d}a\mathrm{d}t = -\int_Q (\beta_2 - \beta_2^*)p_2^*(a,t;\beta_2^*)q_2(0,t;\beta_2^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{29}$$

$$\int_Q z_3(a,t)(p_3^*(a,t;\beta_3^*) - z_{3d})\mathrm{d}a\mathrm{d}t = -\int_Q (\beta_3 - \beta_3^*)p_3^*(a,t;\beta_3^*)q_3(0,t;\beta_3^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t,\tag{30}$$

结合式(28)～(30)，有

$$\sum_{i=1}^3 \int_Q [(p_i^*(\beta_i^*) - z_{id})z_i(a,t)]\mathrm{d}a\mathrm{d}t = -\sum_{i=1}^3 \int_Q (\beta_i - \beta_i^*)p_i^*(\beta_i^*)q_i(0,t;\beta_i^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t。$$

将式(25)代入上式有 $\sum_{i=1}^3 \int_Q (\beta_i - \beta_i^*)(a,t)p_i^*(\beta_i^*)q_i(0,t;\beta_i^*)\mathrm{d}a\mathrm{d}t \leqslant 0$，其中 $p_i^*(\beta_i^*)q_i(0,t;\beta_i^*) \in N_U(\beta_i^*)$，$i = 1,2,3$。根据法锥性质，能够得到式(22)。定理 3 得证。

4 结论

考虑到生育率对生物种群繁衍的影响，本文在假设条件下，建立一类具有年龄结构的三维食物链系统，分析了模型的最优生育率控制问题。利用极值化序列和 Mazur 定理证明了该模型最优控制的存在性，说明研究该系统的最优控制是有意义的，随后借助法锥概念得到了最优生育率控制的必要条件。种群的发展一般还会受到种群规模制约，因此建立更加完善的食物链模型更具现实意义。在之后的研究中，可以考虑非线性系统的最优生育率控制问题。

参考文献：

[1] 雒志学. 一类具年龄结构的线性周期种群动力系统的最优控制[J]. 生物数学学报，2007，22(1)：53-58.

[2] 张海霞，卢殿臣. 具有年龄结构的 n 种群竞争系统的最优收获[J]. 科学技术与工程，2007，7(23)：5987-5990.

[3] 顾建军，卢殿臣，王晓明. 具扩散与年龄结构的三种群捕食与被捕食系统的最优收获[J]. 数学的实践与认识，2008，38(22)：102-108.

[4] 卜红彧. 具有年龄结构的三种群捕食与被捕食系统的最优边界控制[J]. 东北师大学报(自然科学版)，2016(1)：39-43.

[5] 何泽荣，周楠. 具有年龄等级结构的种群竞争系统的最优收获控制[J]. 数学物理学报，2022，42(1)：228-244.

[6] 赵友. 时变人口系统最优生育率控制存在性的必要条件[J]. 东北大学学报，1994，15(S1)：1-5.

[7] 申建中，徐宗本. 实变人口系统的适定性及关于生育率的最优控制[J]. 数学的实践与认识，2001，21(3)：274-282.

[8] HE Z R，CHENG J S，ZHANG C G. Optimal birth control of age-dependent competitive species III. Overtaking problem[J]. Journal of mathematical analysis and applications，2008，337(1)：21-35.

[9] 张萍，卢广西. 基于出生率控制且依赖尺度结构的食饵种群的最优收获[J]. 洛阳理工学院学报(自然科学版)，2020，30(4)：81-86.

[10] 甄洁，赵春. 基于时滞和年龄结构的种群系统的最优生育率控制[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版)，2014，27(2)：157-161.

[11] 付军，霍云霄，吴秀兰. 具年龄结构的周期种群系统的最优生育率控制[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版)，2018，39(1)：54-60.

[12] 王战平. 具有年龄结构的竞争种群系统的最优生育率控制[J]. 应用数学，2017，30(2)：291-298.

[13] SWICK K E. A nonlinear age-dependent model of single species population dynamics[J]. Siam journal on applied mathematics，1977，32(2)：484-498.

[14] ANITA S. Analysis and control of age-dependent population dynamics[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，2000.

Optimal Birth Control for Predator-prey Population Dynamics of Three Species with Age-structure

ZHOU Zijuan

(*School of Mathematics and Physics，Lanzhou Jiaotong University，Lanzhou* 730070，*China*)

Abstract：A three-species model of predator-prey population dynamics with age-structure is proposed，and the optimal birth control problem of this model is mainly studied. Firstly，the extremal sequence is constructed，and Mazur's theorem is used to verify the existence of the optimal control problem. Next，the necessary conditions for the optimal birth problem of this model is derived out via normal cone and adjoint system，which can provide theoretical basis for fertility control of three populations.

Keywords：age-structure；predator-prey population dynamics；optimal birth control；optimal condition；adjoint system

(责任编辑：贾晶晶)