【微分方程与动力系统研究】

一类曲率方程解的梯度估计

吴婷婷，韩　菲，孙文静
（新疆师范大学 数学科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017）

摘　要：通过微分的方法以及选取适当的辅助函数研究一类具有 Neumann 边值问题曲率方程的解，利用函数在极大值点的性质得到解的 C^0 估计、C^1 估计以及 u_t 估计，进而得到此类方程解的存在性。

关键词：曲率方程；Neumann 边界；极值原理；梯度估计
中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.06.009

0　引言

平均曲率方程是偏微分方程中的一类，对其的研究主要集中在解的存在性、唯一性、正则性。若要得到解的存在性，需建立解的边界梯度估计。

假设光滑函数 u 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的，则 u 对应的图的平均曲率可以表示为 $H=\mathrm{div}(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}})$，曲线的曲离可表示为 $k=\frac{u_{xx}}{[1+(u_x)^2]^{3/2}}$。通常平均曲率方程具有两种形式，即

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sqrt{1+|Du|^2}\,\mathrm{div}(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}),\ \frac{\partial u}{\partial t}=\mathrm{div}(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}})。$$

很多学者已对这两种形式的平均曲率方程进行了广泛的研究[1-4]。

文献[5]利用微分的方法研究了具有 Neumann 边值问题的平均曲率方程

$$\begin{cases}\mathrm{div}(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}})=f(x,u),x\in\Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial v}=\phi(x,u),x\in\partial\Omega\end{cases}$$

解的梯度估计，给出了此类平均曲率方程 Neumann 问题解的存在性。文献[6]通过曲面上的活动标架法研究了具有 Neumann 边值问题曲率方程解的梯度估计

$$\begin{cases}\mathrm{div}(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}})=f(x),x\in\Omega,\\ \frac{\partial u}{\partial v}=\phi(x,u),x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

收稿日期：2023-04-06
基金项目：国家自然科学基金项目（12061078）
第一作者简介：吴婷婷（1998—），女，河南固始人，硕士研究生，主要从事几何分析研究。E-mail：491262244@qq.com
通信作者简介：韩　菲（1973—），女，江西永新人，教授，博士，硕士生导师，主要从事几何分析研究。
E-mail：137823121@qq.com

此方法简化了文献[5]研究平均曲率方程解的梯度估计的证明。文献[7]研究了抛物型方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial v}=\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}(Du)u_{ij}-f(x,u),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=\phi(x),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),(x,t)\in\Omega\times\{0\}。\end{cases}$$

其中：$f_z(x,z)\geqslant -k,k>0,\Omega\in\mathbf{R}^n$ 为有界的 C^3 区域，$n\geqslant 2,T$ 为固定的正常数。该文弱化了 $f_z(x,z)$ 的条件，并且得到了解的梯度估计。文献[8]研究了方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{xx}}{1+(u_x^2)}-f(x,u),$$

其中 $f(x,u)$ 是定义在$\Omega\times\mathbf{R}$ 上的光滑函数，得到了此类方程解的梯度估计以及解的收敛性。

受上述研究启发，将利用文献[4-6]的方法对文献[8]研究的具有 Neumann 问题的平均曲率方程进一步推广，即研究抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u_{xx}}{1+(u_x^2)}-f(x,u,Du),$$

其中 $f(x,u,Du)$ 是定义在$[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数。

1 主要结果

定理 1 假设 $\Omega=[0,1]$，f 是定义在$\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数，假设 $u(x,t)$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u_{xx}}{1+u_x^2}-f(x,u,Du),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),(x,t)\in\Omega\times\{0\},\\ u_x(0,t)=a,(x,t)\in\{0\}\times[0,T),\\ u_x(1,t)=b,(x,t)\in\{1\}\times[0,T)\end{cases}\tag{1}$$

的解，其中

$$f_z(x,z,p)\geqslant -k,k\geqslant 0。\tag{2}$$

假设存在一个正常数 L_1 满足

$$|f(x,z,p)|+|f_x(x,z,p)|+\left|\sum_{i=1}^{n}u_{xl}u_{xi}v^{-1}f_p(x,z,p)\right|\leqslant\frac{L_1}{v},\tag{3}$$

那么对于 $t\in[0,T]$，就会有 $|u_x(x,t)|\leqslant C$，其中

$$v=\sqrt{1+|Du|^2},C=C(T,k,|f|_{C^0(\Omega\times\mathbf{R})},|D_xf|_{C^0(\Omega)})。$$

推论 1 假设 $\Omega=[0,1]$，f 是定义在$\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上的光滑函数，则抛物方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u_{xx}}{1+u_x^2}-f(x,u,Du),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x),(x,t)\in\Omega\times\{0\},\\ u_x(0,t)=a,(x,t)\in\{0\}\times[0,T),\\ u_x(1,t)=b,(x,t)\in\{1\}\times[0,T)\end{cases}$$

有光滑解 $u=u(x,t)$。

首先进行 u_t 估计和 u 的 C^0 估计。由式(1) 知$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{u_{xx}}{1+(u_x^2)}-f(x,u,Du)$，将 $v=\sqrt{1+|Du|^2}$ 代入式(1) 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_{xx}v^{-2}-f(x,u,Du)。$$

上述方程两边同时对 t 求导,可得

$$\frac{\partial u_t}{\partial t}=u_{xxt}v^{-2}+2v^{-4}u_{xx}u_xu_{xt}-f_uu_t-f_pu_{lt},\tag{4}$$

而

$$\frac{\partial(\mathrm{e}^{-kt}u_t)}{\partial t}=-k\mathrm{e}^{-kt}u_t+\mathrm{e}^{-kt}u_{tt},\tag{5}$$

将式(4)代入式(5)可得

$$\frac{\partial(\mathrm{e}^{-kt}u_t)}{\partial t}=\mathrm{e}^{-kt}v^{-2}u_{xxt}+2\mathrm{e}^{-kt}v^{-4}u_{xx}u_xu_{xt}-(f_uu_t+f_pu_{lt}+ku_t)\mathrm{e}^{-kt}。$$

假设 $\mathrm{e}^{-kt}u_t$ 在 (x_0,t_0) 处取得非负极大值,通过极值原理,则可分为 3 种情况:(a)$t_0=0$;(b)$t_0>0$ 且 $\mathrm{e}^{-kt}u_t$ 在 $[0,1]\times[0,t_0]$ 内恒为常值函数(则一定是 $u_t(x,0)$);(c)$t_0>0$ 且 $x\in\{0,1\}$。

对于情况(a),$\mathrm{e}^{-kt}u_t$ 的非负最大值在点 $(x_0,0)$ 处得到,所以 $\mathrm{e}^{-kt}u_t(x,t)\leqslant \mathrm{e}^0u_t(x_0,0)=u_t(x_0,0)$,从而得到 $u_t(x,t)\leqslant \mathrm{e}^{kt}u_t(x_0,0)$。因此 $u_t(x,t)\leqslant \sup\limits_{x\in\Omega}\mathrm{e}^{kt}u_t(x,0)$。对于情况(b),由于 $\mathrm{e}^{-kt}u_t=C$(C 为常数),则 $\mathrm{e}^{-kt}u_t=(0,1]$,因此 $u_t\leqslant C$。对于情况(c),通过 Hopf 引理可知 $u_{tv}<0$,再由边值条件,可得 $u_{tv}=0$,因此矛盾。综上可得 u_t 有界,并且可以得到 $u_t(x,t)\leqslant \max\{\sup\limits_{x\in\Omega}\mathrm{e}^{kt}u_t(x,0),0\}$。同理,可以假设 $\mathrm{e}^{-kt}u_t$ 的非正最小值在 (x_0,t_0) 处得到,则 $u_t(x,t)\geqslant \min\{\inf\limits_{x\in\Omega}\mathrm{e}^{kt}u_t(x,0)0\}$。

根据上述对 u_t 的讨论,利用微分中值定理可以得到 u 的 C^0 估计 $|u(x,t)-u_0(x)|\leqslant Ct\mathrm{e}^{kt}$,其中 $C=\sup\limits_{x\in[0,1]}|u_t(x,0)|$,且由 u_0 和 f 决定。

接下来得到 u 的 C^1 估计。

定理 1 的**证明**　构造辅助函数

$$\Phi(x,t)=\log(u_x)^2+g(x)+\lambda,$$

其中,$g(x)=x^2-x$,λ 将在后面给出定义。假设在点 (x_0,t_0) 处 $\Phi(x,t)$ 达到非负极大值,其中 $x\in[0,1]$。分 3 种情形进行讨论。

情形 1　$x_0=0$ 或 $x_0=1$,根据边界条件 $u_x(0,t)=a$,$u_x(1,t)=b$ 可得

$$\max_{\{x=0\}\cup\{x=1\}\times[0,T]}|u_x|\leqslant C。$$

情形 2　$t_0=0$,易得 $\max\limits_{[0,1]\times\{0\}}|u_x|\leqslant C$。

情形 3　$(x_0,t_0)\in(0,1)\times(0,T]$,由函数在极值点的性质,可得

$$\Phi_t(x_0,t_0)=\frac{2u_{xt}}{u_x}-\lambda,$$

$$\Phi_x(x_0,t_0)=\frac{2u_{xx}}{u_x}+g'(x)=0,\tag{6}$$

$$\Phi_{xx}(x_0,t_0)=\frac{2u_{xxx}}{u_x}-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2}+g''(x)\leqslant 0,$$

$$v^{-2}\Phi_{xx}-\Phi_t=(\frac{2u_{xxx}}{u_x}-\frac{2u_{xx}^2}{u_x^2}+2)v^{-2}-\frac{2u_{xt}}{u_x}+\lambda\leqslant 0。\tag{7}$$

由 $u_t=u_{xx}v^{-2}-f(x,u,Du)$,可得

$$-\frac{2u_{xt}}{\partial u_x}=-\frac{2u_{xxx}v^{-2}}{u_x}+4u_{xx}^2+\frac{2f_x}{u_x}+2f_u+\frac{2}{u_x}f_pu_{lx}。\tag{8}$$

由式(6)知

$$u_{xx}=-\frac{g'u_x}{2}。\tag{9}$$

将式(8)(9)代入式(7)可得

$$0 \geqslant v^{-2}\Phi_{xx} - \Phi_t = -\frac{g'}{2}v^{-2} + v^{-4}g'^2u_x^2 + 2v^{-2} + \frac{2f_x}{u_x} + 2f_u + \frac{2}{u_x}f_p u_{tx} + \lambda \xlongequal{\Delta} I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \frac{g'^2u_x^2}{2}v^{-2}(2v^{-4} - v^{-2}u_x^{-2}), I_2 = 2v^{-2} + \frac{2f_x}{u_x} + 2f_u + \frac{2}{u_x}f_p u_{tx} + \lambda。$$

假设 u_x 充分大,否则将得到 u 的 C^1 估计。由式(9) 可得 $I_1 \geqslant -\frac{g'^2}{2}v^{-2}$。由式(2)(3) 可得

$$I_2 \geqslant 2v^{-2} + \frac{2f_x}{u_x} - 2k - 2\frac{L_1}{v} + \lambda。$$

因为$(2 - \frac{g'^2}{2}) \geqslant 0$,所以

$$0 \geqslant I_1 + I_2 \geqslant (2 - \frac{g'}{2})v^{-2} + \frac{2f_x}{u_x} - 2k - \frac{2L_1}{v} + \lambda \geqslant \frac{2f_x}{u_x} - 2k - \frac{2L_1}{v} + \lambda。\tag{10}$$

令 $\lambda = 2k + 11$,由于 $v = \sqrt{1 + |Du|^2}$,且 u_x 充分大,可知 v 与 u_x 等价。通过式(10) 可得

$$0 \geqslant \frac{2f_x}{u_x}v^2 + (\lambda - 2k)v^2 - 2L_1 v,$$

则

$$\frac{2(\sup|f_x| + L_1)}{u_x}v^2 \geqslant \frac{2(f_x - L_1)}{u_x}v^2 \geqslant (\lambda - 2k)v^2。$$

因此

$$v(x_0,t_0) \leqslant \frac{4\sup|f_x|}{11},$$

即 $v(x_0,t_0) \leqslant C$。

由于 $\Phi(x,t)$ 在点(x_0,t_0) 处取得非负极大值,所以对任意的(x,t) 有

$$\Phi(x,t) \leqslant \Phi(x_0,t_0) = \log(u_x)^2(x_0,t_0) + g(x_0) - \lambda t_0 \leqslant \log(C)^2 + g(x_0) - \lambda t_0。$$

即

$$\log(u_x)^2 + g(x) - \lambda t \leqslant \log(C)^2 + g(x_0) - \lambda t_0。$$

故

$$\log(u_x)^2 \leqslant \log(C)^2 + g(x) - \lambda(t - t_0) \leqslant C。$$

通过上述 3 种情形,得到了 u 的 C^1 估计,从而完成了定理 1 的证明。

2 结论

通过微分的方法引入适当的辅助函数,利用函数在极大值点的性质研究一类具有 Neumann 边值条件的曲率方程解的梯度估计。证明过程主要是分为 3 种情况,即在边界达到极大值、初始时刻达到极大值以及内部取到极大值,研究解的 C^0 估计、C^1 估计以及 u_t 估计,进而给出此类方程解的存在性。解的先验估计与所给方程中的函数 f 有关,讨论的方程是 f 依赖于 x,u,Du 时解的梯度估计,对此类具有 Neumann 问题的平均曲率方程可以进一步推广到复空间上研究讨论。

参考文献:

[1] ECKER K. Estimates for evolutionary surfaces of prescribed mean curvature[J]. Mathematicsche zeifschrift,1982,180(3):179-192.

[2] ALTSCHULER S J, WU L F. Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle[J]. Calculus of variations and partial differential equations,1994,2

(1):101-111.

[3] MA X N,WANG P H,WEI W. Mean curvature equation and mean curvature flow with non-zero Neumann boundary conditions on strictly convex domain[J]. Journal of functional analysis,2018,274:252-277.

[4] MA X N,XU J J. Gradient estimates of mean curvature equations with Neumann boundary value problems[J]. Advances in mathematics,2016,290(26):1010-1039.

[5] 徐金菊. 平均曲率方程 Neumann 问题的梯度估计[D]. 合肥:中国科学技术大学,2014.

[6] 麻希南,王培合. 具有给定 Neumann 边值或预定夹角边值的平均曲率方程的边界梯度估计[J]. 中国科学:数学,2018,48(1):213-226.

[7] 赵晓阳. 具有 Neumann 边界条件的平均曲率方程解的估计[J]. 曲阜师范大学学报,2021,47(1):52-58.

[8] 黄海燕,王培合. 具有 Neumann 边界条件的曲率方程解的估计及收敛性[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),2019,45(2):27-32.

[9] 孔润,王培合. 一个曲率方程解的估计及其收敛性[J]. 湖州师范学院学报,2019,41(2):16-21.

Gradient Estimation for a Class of Curvature Equations

WU Tingting,HAN Fei,SUN Wenjing

(*College of Mathematical Sciences*,*Xinjiang Normal University*,*Urumqi* 830017,*China*)

Abstract:The solution of a class of curvature equations with Neumann boundary value problem is studied by the method of differentiation and the selection of appropriate auxiliary functions. The C^0 estimation,C^1 estimation and u_t estimation of the solution are obtained by using the property of the function at the maximum point,and the existence of the solution of this kind of equation is obtained.

Keywords:curvature equation;Neumann boundary;extreme value principle;gradient estimation

(责任编辑:贾晶晶)

本　刊　声　明