【微分方程与动力系统研究】

具有吸收项的加权反应扩散方程解的性质

杨来君,杨　梓

(兰州交通大学 数理学院,甘肃 兰州 730070)

摘　要:研究了在 Neumann 非局部边界条件下具有加权反应扩散方程解的性质。通过构造辅助函数,运用微分不等式技巧,得到了解的全局存在性和高维空间中爆破时间的上下界。

关键词:反应扩散方程;加权项;上界;下界

中图分类号:O 175.26　　**文献标识码**:A　　DOI:10.13486/j.cnki.1673-2618.2023.06.008

0　引言

近年来,许多文献研究了抛物方程和抛物系统解的全局存在性,解的爆破时间的上下界、爆破集、爆破速率和解的渐近行为等解的其他性态[1-5],其中,反应扩散方程的解全局存在性和爆破以及何时发生爆破是重要的研究方向。目前研究爆破时间上界的方法较多[6]而研究爆破时间下界的方法较少,Payne 等在研究爆破时间下界方面做了开创性工作[7-10]。有关抛物方程和抛物系统的上下界在物理学、天文学、生物学、化学等领域有着广泛的应用[11-12]。文献[13]研究具有加权非局部源和 Robin 边界条件下半线性抛物方程

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+a(x)f(u),(x,t)\in\Omega\times(0,t^*),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}+\sigma u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*),\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,x\in\overline{\Omega}\end{cases}\tag{1}$$

的解的爆破情况,利用微分不等式技巧,得到了在高维空间中解的爆破时间的下界。文献[14]研究了具有加权梯度非线性反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+a(x)f(|\nabla u|),(x,t)\in\Omega\times(0,t^*),\\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*),\\ u(x,0)=u_0(x),x\in\overline{\Omega}\end{cases}\tag{2}$$

爆破时间的界。利用上下解方法和微分不等式技巧,得到了在适当的测度意义下解在有限时间爆破的充分条件,同时得到在高维空间中爆破时间的上下界并给出一些应用实例。文献[15]研究具有加权非局部梯度吸收项的反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t=\Delta u+a(x)f(u,|\nabla u|),(x,t)\in\Omega\times(0,t^*),\\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*),\\ u(x,0)=u_0(x),x\in\overline{\Omega},\end{cases}\tag{3}$$

收稿日期:2023-03-03

基金项目:国家自然科学基金项目(11961039);甘肃省自然科学基金项目(1310RJZA070)

第一作者简介:杨来君(1997—),女,甘肃武威人,硕士研究生,主要从事向偏微分方程研究。

E-mail:1341098943@qq.com

通过构造辅助函数,运用微分不等式技巧,得到了解的全局存在性和爆破时间的上下界。

受以上文献的启发,考虑到边界也会受到非局部的影响,本文研究具有加权非局部梯度吸收项的反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + a(x) f(u, |\nabla u|), (x,t) \in \Omega \times (0, t^*), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} + \int_\Omega g(|\nabla u|) \mathrm{d}x, (x,t) \in \partial\Omega \times (0, t^*), \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \overline{\Omega} \end{cases} \tag{4}$$

解的全局存在性和爆破性。其中:$\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 1)$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域,υ 是 Ω 的单位外法向量,t^* 是爆破时间,非线性项 $f(u, |\nabla u|)$ 是满足适当条件的连续函数,初值 $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ 是正函数且满足相容性条件,权函数 $a(x) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足(A1)$a(x) > 0 (x \in \Omega)$ 和 $a(x) = 0 (x \in \partial\Omega)$ 或(A2)$a(x) \geqslant c > 0 (\forall x \in \overline{\Omega})$,其中 c 是一个正常数。

受边界条件的影响,在证明解的全局存在性时,构造辅助函数 $\varphi(t) = \int_\Omega u^l \mathrm{d}x$,其中 $u(x,t)$ 是当 $t > 0$ 时问题(4)的非负古典解,对于 $\varphi'(t) < 0$ 的证明文献[15]的方法不再适用,参考文献[16]的证明思想,当 $\varphi(t)$ 满足一定的条件时,使得 $\varphi'(t) < 0$;在证明爆破时间下界时,采用与文献[15]不同的 Sobolev 不等式使计算简化。另外,本文对文献[15]的条件进行推广,使结论在 $\varphi(t) \geqslant 0$ 时成立。

1 解的全局存在性

定理 1 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 1)$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域,权函数 $a(x)$ 满足(A1)或(A2)且函数 f 和 g 满足条件

$$f(s, \nabla s) \leqslant a_1 s^p - a_2 s^m \left(\int_\Omega |\nabla s|^l \mathrm{d}x\right)^q, s = s(x,t) \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\int_\Omega g(\nabla s) \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon s^\sigma, \tag{6}$$

则当 $t > 0$ 时问题(4)的非负古典解 $u(x,t)$ 存在,其中

$$a_1 \geqslant 0, a_2 \geqslant 0, q > 0, l > 1, m > \max\{\sigma + 2, 2\sigma - 1, p, l\}, \tag{7}$$

ε 在证明中给出。

证明 首先构造辅助函数 $\varphi(t) = \int_\Omega u^l \mathrm{d}x$,由式(4)~(6)及格林公式,可得

$$\varphi'(t) = l\int_\Omega u^{l-1} u_t \mathrm{d}x \leqslant -l(l-1)\int_\Omega u^{l-2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \\ l\varepsilon \int_{\partial\Omega} u^{\sigma+l-1} \mathrm{d}s + la_1 \int_\Omega a(x) u^{p+l-1} \mathrm{d}x - la_2 \int_\Omega a(x) u^{m+l-1} \mathrm{d}x \left(\int_\Omega |\nabla u|^l \mathrm{d}x\right)^q。 \tag{8}$$

对恒等式 $\nabla \cdot (u^{\sigma+l-1} x) = N u^{\sigma+l-1} + (\sigma + l - 1) u^{\sigma+l-2} (x \cdot \nabla u)$,在 Ω 上积分,可得

$$\int_{\partial\Omega} u^{\sigma+l-1} \mathrm{d}s \leqslant \frac{N}{\rho_0} \int_\Omega u^{\sigma+l-1} \mathrm{d}x + \frac{(\sigma + l - 1)d}{\rho_0} \int_\Omega u^{\sigma+l-2} |\nabla u| \mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中

$$\rho_0 := \inf_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^N x_i \upsilon_i\right) > 0, d^2 := \max_{\overline{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^N x_i x_i\right)。$$

将式(9)代入式(8),可得

$$\varphi'(t) \leqslant -l(l-1)\int_\Omega u^{l-2} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{Nl\varepsilon}{\rho_0} \int_\Omega u^{\sigma+l-1} \mathrm{d}x + \frac{(\sigma + l - 1)dl\varepsilon}{\rho_0} \int_\Omega u^{\sigma+l-2} |\nabla u| \mathrm{d}x + \\ la_1 \int_\Omega a(x) u^{p+l-1} \mathrm{d}x - la_2 \int_\Omega a(x) u^{m+l-1} \mathrm{d}x \left(\int_\Omega |\nabla u|^l \mathrm{d}x\right)^q。 \tag{10}$$

通过 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\int_\Omega u^{\sigma+l-2}\mid \nabla u \mid \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega u^{l-2}\mid \nabla u \mid^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u^{l+2\sigma-2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon_1}{2}\int_\Omega u^{l-2}\mid \nabla u \mid^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega u^{l+2\sigma-2}\mathrm{d}x。 \tag{11}$$

将式(11) 代入式(10)，并取 $\varepsilon_1 = \dfrac{2\rho_0 l(l-1)}{d\varepsilon l(\sigma+l+1)}$，可得

$$\varphi'(t) \leqslant \frac{Nl\varepsilon}{\rho_0}\int_\Omega u^{\sigma+l-1}\mathrm{d}x + \frac{(\sigma+l+1)ld\varepsilon}{2\varepsilon_1\rho_0}\int_\Omega u^{l+2\sigma-2}\mathrm{d}x + la_1\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x -$$

$$la_2\int_\Omega a(x)u^{m+l-1}\mathrm{d}x\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^l \mathrm{d}x\right)^q。 \tag{12}$$

在式(7) 的条件下，由 Hölder 不等式，可得

$$\int_\Omega u^{\sigma+l+1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{l+\sigma+1}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l+\sigma+1}{m-\sigma-2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-\sigma-2}{l+m-1}}, \tag{13}$$

$$\int_\Omega u^{l+2\sigma-2}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{l+2\sigma-2}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l+2\sigma-2}{m-2\sigma+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-2\sigma+1}{l+m-1}}, \tag{14}$$

$$\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{l+p-1}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-p}{l+m-1}}, \tag{15}$$

$$\int_\Omega u^l\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{l}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-1}{l+m-1}}。 \tag{16}$$

将式(13) ～ (16) 代入式(12) 并使用 Poincare 不等式，可得

$$\varphi'(t) \leqslant \int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\Big[\frac{Nl\varepsilon}{\rho_0}\varphi^{\frac{\sigma-m+2}{l}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{1}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(\sigma-m+2)}{l(l+m-1)}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{\sigma+l+1}{m-\sigma-2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-\sigma-2}{l+m-1}} +$$

$$\frac{(\sigma+l+1)ld\varepsilon}{2\varepsilon_1\rho_0}\varphi^{\frac{2\sigma-1-m}{l}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(2\sigma-1-m)}{l(l+m-1)}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{2\sigma+l-2}{m-2\sigma+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-2\sigma+1}{m+l-1}} +$$

$$\varphi^{\frac{p-m}{l}}la_1\left(\int_\Omega a(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-p}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(p-m)}{l(l+m-1)}} - la_2C_1^{-q}\varphi^q\Big] =$$

$$\int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\left(P_1\varphi^{\frac{\sigma+2-m}{l}} + P_2\varphi^{\frac{2\sigma-1-m}{l}} + P_3\varphi^{\frac{p-m}{l}} - P_4\varphi^q\right), \tag{17}$$

其中，

$$P_1 = \frac{Nl\varepsilon}{\rho_0}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(\sigma-m+2)}{l(l+m-1)}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{\sigma+l+1}{m-\sigma-2}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-\sigma-2}{l+m-1}} > 0,$$

$$P_2 = \frac{(\sigma+l+1)ld\varepsilon}{2\varepsilon_1\rho_0}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(2\sigma-1-m)}{l(l+m-1)}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{2\sigma+l-2}{m-2\sigma+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-2\sigma+1}{m+l-1}} > 0,$$

$$P_3 = la_1\left(\int_\Omega a(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{m-p}{l+m-1}}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{l}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-m)(p-m)}{l(l+m-1)}} > 0, P_4 = la_2C_1^{-q} > 0。$$

由式(7) 可知，$\dfrac{2\sigma-1-m}{l} < 0$，$\dfrac{p-m}{l} < 0$，$q > 0$，所以，当 $\varphi(t) \geqslant 1$ 时，取 $G = \max\{\sigma+2, 2\sigma-1, p\}$ 可得

$$\varphi'(t) \leqslant \int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\varphi^G\left(P_1 + P_2 + P_3 - P_4\varphi^{q-G}\right)。 \tag{18}$$

由式(18) 得：当 $\varphi(t) > (P_1+P_2+P_3)^{q-G}P_4{}^{G-q} \geqslant 1$ 时，$\varphi'(t) \leqslant 0$；当 $0 < \varphi(t) < 1$ 时，取 $Q = \min\{\sigma+2, 2\sigma-1, p\}$，可得

$$\varphi'(t) \leqslant \int_\Omega a(x)u^{l+m-1}\mathrm{d}x\varphi^Q\left(P_1 + P_2 + P_3 - P_4\varphi^{q-Q}\right), \tag{19}$$

由式(19) 得，当 $0 < (P_1+P_2+P_3)^{q-Q}P_4{}^{Q-q} < \varphi(t) < 1$ 时，$\varphi'(t) \leqslant 0$。

取适当的 a_1，a_2，ε，使其满足式(18)(19) 两个条件。由此可得，函数 $\varphi(t)$ 是单调递减的；因为 $\varphi(t) > 0$，所以对于所有的 $t > 0$，解 $u(x,t)$ 存在。接下来，给出爆破的定义，并分别得到爆破时间的上界和下界。

定义 1　若存在 $0 < t^* < \infty$，使得问题(4) 的解 $u(x,t)$ 在$\overline{\Omega} \times [0,t^*)$ 上存在，且有

$$\lim_{t \to t^{*-}} \max_{(x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,t^*)} |u(x,t)| = \infty,$$

则称 $u(x,t)$ 在有限时间内爆破。

2　爆破时间的上界

定理 2　设 $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 1)$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$u(x,t)$ 是问题(4) 的非负古典解；权函数 $a(x)$ 满足(A1) 或(A2)，$\theta(0) \geqslant 0$ 且函数 f 和 g 满足如下条件：

$$\int_\Omega a(x)\xi f(\xi, |\nabla\xi|)\mathrm{d}x \geqslant 2(1+\alpha)\int_\Omega a(x)F(\xi)\mathrm{d}x, F(\xi) = \int_0^\xi f(s, |\nabla s|)\mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$\xi \frac{\partial\xi}{\partial\upsilon} \geqslant 2(1+\beta)G(\xi), G(\xi) = \int_0^\xi \frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}\mathrm{d}\eta, \tag{21}$$

则解 $u(x,t)$ 在有限时间 $t^* < T$ 时发生爆破，其中 $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$，

$$\theta(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + 2\int_{\partial\Omega} G(u)\mathrm{d}s + 2\int_\Omega a(x)F(u)\mathrm{d}x, \tag{22}$$

$$T = \frac{1}{2\beta(1+\beta)M\Psi^\beta(0)}, M = \theta(0)(\Psi(0))^{-(1+\beta)}, \Psi(t) = \int_\Omega u^2\mathrm{d}x, \Psi(0) = \int_\Omega u_0^2\mathrm{d}x > 0。$$

如果 $\beta = 0$，则有 $T = \infty$。

证明　由式(4)、格林公式、式(20) ～ (22)，可得

$$\Psi'(t) = 2\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x \geqslant -2\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + 4(1+\beta)\int_{\partial\Omega} G(u)\mathrm{d}s + 4(1+\alpha)\int_\Omega a(x)F(u)\mathrm{d}x \geqslant$$
$$2(1+\beta)(-\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + 2\int_{\partial\Omega} G(u)\mathrm{d}s + 2\int_\Omega a(x)F(u)\mathrm{d}x) = 2(1+\beta)\theta(t)。\tag{23}$$

由式(4)(22) 和格林公式，可得

$$\theta'(t) = -2\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t\mathrm{d}x + 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\upsilon}u_t\mathrm{d}s + 2\int_\Omega a(x)f(u, |\nabla u|)u_t\mathrm{d}x = 2\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x \geqslant 0。$$

由于 $\theta(0) \geqslant 0$，所以对 $\forall t \in (0,t^*)$，有 $\theta(t) \geqslant 0$。由式(23) 及 Schwarz 不等式，可得

$$2(1+\beta)\theta(t)\Psi'(t) \leqslant (\Psi'(t))^2 = 4(\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x)^2 \leqslant 4\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\int_\Omega u_t^2\mathrm{d}x = 2\Psi(t)\theta'(t)。\tag{24}$$

对式(24) 从 0 到 t 进行积分，可得 $\theta(t)(\Psi(t))^{-(1+\beta)} \geqslant \theta(0)(\Psi(0))^{-(1+\beta)}$，记 $M = \theta(0)(\Psi(0))^{-(1+\beta)}$，可得

$$\theta(t) \geqslant M(\Psi(t))^{1+\beta}。\tag{25}$$

将式(25) 代入式(23) 并从 0 到 t 进行积分，可得

$$\frac{1}{\Psi^\beta(t)} \leqslant \frac{1}{\Psi^\beta(0)} - 2\beta Mt(1+\beta)。\tag{26}$$

显然，有 $t^* \leqslant T = \dfrac{1}{2\beta(1+\beta)M\Psi^\beta(0)}$。如果 $\beta = 0$，对于 $t > 0$，得到 $\Psi(t) \geqslant \Psi(0)\mathrm{e}^{2tM}$，显然 $t^* = \infty$。

3　爆破时间的下界

定理 3　设 $\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$ 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$u(x,t)$ 是问题(4) 的非负古典解，权函数 $a(x)$ 满足(A1) 或(A2) 且函数 f 满足式(5)，g 满足条件

$$\int_\Omega g(\nabla s)\mathrm{d}x \leqslant s^\delta, \tag{27}$$

则 $u(x,t)$ 在有限时间 t^* 发生爆破，且有

$$t^* \geqslant \int_{\varphi(0)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{M_1\eta^{1+\frac{2(\delta-1)}{l}} + M_2\eta^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} + M_4\eta^{1+\frac{p-1}{l}} + M_3},$$

其中

$$a_1\geqslant 0,a_2\geqslant 0,\delta>1,q>0,l>N(\delta-1),0<p<1,m>1,\varphi(0)=\int_\Omega u_0^l\mathrm{d}x。\tag{28}$$

证明 构造辅助函数 $\varphi(t)=\int_\Omega u^l\mathrm{d}x$，由式(4)(5)(27)和格林公式可知

$$\varphi'(t)=l\int_\Omega u^{l-1}u_t\mathrm{d}x\leqslant -l(l-1)\int_\Omega u^{l-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+$$
$$l\int_{\partial\Omega}u^{\delta+l-1}\mathrm{d}s+la_1\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x-la_2\int_\Omega a(x)u^{m+l-1}\mathrm{d}x(\int_\Omega|\nabla u|^l\mathrm{d}x)^q。\tag{29}$$

由式(9)可得

$$\int_{\partial\Omega}u^{l+\delta-1}\mathrm{d}S\leqslant\frac{N}{\rho_0}\int_\Omega u^{l+\delta-1}\mathrm{d}x+\frac{(l+\delta-1)d}{\rho_0}\int_\Omega u^{l+\delta-2}|\nabla u|\mathrm{d}x。\tag{30}$$

通过 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\int_\Omega u^{l+\delta-2}|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant(\int_\Omega u^{l-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\frac{\beta_1}{2}(\int_\Omega u^{l-2}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)+\frac{1}{2\beta_1}(\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x),\tag{31}$$

取 $\beta_1=\dfrac{\rho_0(l-1)}{d(l+\delta-1)}$，并将式(30)(31)代入式(29)，可得

$$\varphi'(t)\leqslant-\frac{2(l-1)}{l}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2\mathrm{d}x+\frac{Nl}{\rho_0}\int_\Omega u^{l+\delta-1}\mathrm{d}x+\frac{(l+\delta-1)dl}{2\rho_0\beta_1}\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x+$$
$$la_1\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x-la_2\int_\Omega a(x)u^{m+l-1}\mathrm{d}x(\int_\Omega|\nabla u|^l\mathrm{d}x)^q。\tag{32}$$

将 $W^{1,2}(\Omega)$ 嵌入 $L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ 使用 Sobolev 不等式[17]，可知

$$\int_\Omega(u^{\frac{l}{2}})^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x\leqslant C_2^{\frac{2N}{N-2}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2\mathrm{d}x)^{\frac{N}{N-2}},\tag{33}$$

其中 $C_2=C_2(N,\Omega)$ 是和空间维数 N 和区域 Ω 有关的常数。

在式(28)的条件下，由 Hölder 不等式和 Young 不等式，可得

$$\int_\Omega u^{\delta+l-1}\mathrm{d}x\leqslant(\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x)^{\frac{l+\delta-1}{l+2\delta-2}}|\Omega|^{\frac{\delta-1}{l+2\delta-2}}\leqslant\frac{l+\delta-1}{l+2\delta-2}\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x+\frac{\delta-1}{l+2\delta-2}|\Omega|。\tag{34}$$

在(28)的条件下，由 Hölder 不等式和式(33)，可得

$$\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x\leqslant(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l}}(\int_\Omega(u^{\frac{l}{2}})^{\frac{2N}{N-2}}\mathrm{d}x)^{\frac{(\delta-1)(N-2)}{l}}\leqslant$$
$$(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l}}[C_2^{\frac{2N}{N-2}}((\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)+\int_\Omega(|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2)\mathrm{d}x)^{\frac{N}{N-2}}]^{\frac{(\delta-1)(N-2)}{l}}=$$
$$C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l}}((\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)+\int_\Omega(|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2)\mathrm{d}x)^{\frac{N(\delta-1)}{l}}。\tag{35}$$

通过基本不等式

$$(b_1+b_2)^i\leqslant b_1^i+b_2^i,b_1,b_2>0,0\leqslant i<1。\tag{36}$$

将式(36)代入式(35)，可得

$$\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x\leqslant C_1^{\frac{2N(\delta-1)}{l}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l+2(\delta-1)}{l}}+C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l}}(\int_\Omega(|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2)\mathrm{d}x)^{\frac{N(\delta-1)}{l}}。\tag{37}$$

在式(28)的条件下，由 Young 不等式，可得

$$C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l}}(\int_\Omega(|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2)\mathrm{d}x)^{\frac{N(\delta-1)}{l}}\leqslant$$
$$\frac{l-N(\delta-1)}{l}C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}\beta_2^{-\frac{N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x)^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}}+\frac{N(\delta-1)}{l}\beta_2\int_\Omega|\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2\mathrm{d}x。\tag{38}$$

将式(38)代入式(37)，可得

$$\int_\Omega u^{l+2\delta-2}\mathrm{d}x \leqslant C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l}}\varphi^{\frac{l+2(\delta-1)}{l}} + \frac{l-N(\delta-1)}{l}C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}\beta_2^{-\frac{N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}\varphi^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} +$$

$$\frac{N(\delta-1)}{l}\beta_2\int_\Omega |\nabla u^{\frac{l}{2}}|^2\mathrm{d}x。\tag{39}$$

将式(34)(39)代入式(32)并取

$$\beta_2 = \frac{2(l-1)}{N(\delta-1)}\left(\frac{Nl(l+\delta-1)}{\rho_0(l+2\delta-2)} + \frac{dl(l+\delta-1)}{2\beta_1\rho_0}\right)^{-1},$$

得

$$\varphi'(t) \leqslant M_1\varphi^{\frac{l+2(\delta-1)}{l}} + M_2\varphi^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} + M_3 + la_1\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x -$$

$$la_2\int_\Omega a(x)u^{m+l-1}\mathrm{d}x\left(\int_\Omega |\nabla u|^l\mathrm{d}x\right)^q,\tag{40}$$

其中

$$M_1 = \left(\frac{Nl(l+\delta-1)}{\rho_0(l+2\delta-2)} + \frac{dl(l+\delta-1)}{2\beta_1\rho_0}\right)C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l}},$$

$$M_2 = \left(\frac{N(l+\delta-1)}{\rho_0(l+2\delta-2)} + \frac{d(l+\delta-1)}{2\beta_1\rho_0}\right)(l-N(\delta-1))C_2^{\frac{2N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}\beta_2^{-\frac{N(\delta-1)}{l-N(\delta-1)}}, M_3 = \frac{Nl(\delta-1)}{\rho_0(l+2\delta-2)}|\Omega|。$$

在式(28)的条件下，通过 Hölder 不等式，可得

$$\int_\Omega a(x)u^{p+l-1}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega u^l\mathrm{d}x\right)^{\frac{p+l-1}{l}}\left(\int_\Omega a(x)^{\frac{l}{1-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-p}{l}}。\tag{41}$$

将式(41)代入式(40)，可得

$$\varphi'(t) \leqslant M_1\varphi^{1+\frac{2(\delta-1)}{l}} + M_2\varphi^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} + M_3 + M_4\varphi^{1+\frac{p-1}{l}} - M_5\varphi^{1+q+\frac{m-1}{l}},\tag{42}$$

其中

$$M_4 = la_1\left(\int_\Omega a(x)^{\frac{l}{1-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-p}{l}}, M_5 = la_2C^{-q}\left(\int_\Omega a(x)^{-\frac{1}{m-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1-m}{l}}。$$

由式(42)可得

$$\varphi'(t) \leqslant M_1\varphi^{1+\frac{2(\delta-1)}{l}} + M_2\varphi^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} + M_3 + M_4\varphi^{1+\frac{p-1}{l}}。\tag{43}$$

对式(43)两边从 0 到 t 积分，可得

$$t^* \geqslant \int_{\varphi(0)}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\eta}{M_1\eta^{1+\frac{2(\delta-1)}{l}} + M_2\eta^{\frac{l-(\delta-1)(N-2)}{l-N(\delta-1)}} + M_4\eta^{1+\frac{p-1}{l}} + M_3}。$$

参考文献：

[1] LIU Y. Blow up phenomena for the nonlinear nonlocal porous medium equation under Robin boundary condition[J]. Computers and mathematics with applications，2013，66(10)：2092-2095.

[2] DING J T. Blow-up solutions and global existence for quasilinear parabolic problems with Robin boundary condition[J]. Abstract and applied analysis，2014，2014：1-9.

[3] LI Y F，LIU Y，LIU C H. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems under mixed boundary conditions[J]. Nonlinear analysis-real world applications，2010，11(5)：3815-3823.

[4] QUITTNER P，SOUPLET P. Superlinear parabolic problems：blow-up global existence and steady states[M]. Basel：Birkhauser Advanced Texts，2007.

[5] HU B. Blow up theories for semilinear parabolic equations[M]. Berlin：Springer，2011.

[6] LEVINE H A. Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed prob-

lems of mathematical physics: the method of unbounded Fourier coefficients[J]. Mathematische annalen, 1975, 214: 205-220.
[7] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Dirichlet conditions[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2007, 328(2): 1196-1205.
[8] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Lower bounds for blow-up time in parabolic problems under Neumann conditions[J]. Applicable analysis, 2006, 85(10): 1301-1311.
[9] PAYNE L E, SCHAEFER P W. Blow-up in parabolic problems under Robin boundary conditions [J]. Applicable analysis, 2008, 87(6): 699-707.
[10] PAYNE L E, SONG J C. Lower bounds for the blow-up time in a temperature dependent Navier-Stokes flow[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2007, 335(1): 371-376.
[11] 郑亚东,方钟波.一类具有时变系数梯度源项的弱耦合反应-扩散方程组解的爆破分析[J].数学物理学报,2020,40(3):735-755.
[12] BANDIE C, BRUNNER H. Blow-up in diffusion equations: a survey[J]. Journal of computational and applied mathematics, 1998, 97(1/2): 3-22.
[13] 马羚未,方钟波.具有加权非局部源和 Robin 边界条件的反应-扩散方程解的爆破时间下界[J].数学物理学报,2017,37(1):146-157.
[14] MA L W, FANG Z B. Bounds for blow-up time of a reaction-diffusion equation with weighted gradient nonlinearity[J]. Computers and mathematics with applications, 2018, 76(3): 508-519.
[15] LIANG M Y, FANG Z B. Blow-up phenomenon for a reaction-diffusion equation with weighted nonlocal gradient absorption terms[J]. Mediterranean journal of mathematics, 2021, 160(18): 160-179.
[16] 欧阳柏平.高维空间上具有时变系数和吸收项的非线性非局部抛物方程解的全局存在性和爆破[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2022,51(4):346-352.
[17] MONICA M, STELLA V P. Reaction-diffusion problems under non-local boundary conditions with blow-up solutions[J]. Journal of inequalities and applications, 2014, 2014(167): 1-11.

Properties of Solutions to Weighted Reaction-diffusion Equations with Absorption Terms

YANG Laijun, YANG Zi
(*School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: The properties of solutions of weighted reactions-diffusion equations is dealt with under Neumann nonlocal boundary conditions. Based on the method of auxiliary function and the technique of modified differential inequality, the global existence of the solution and the upper and lower bounds of blow-up time in higher dimensional space are obtained.

Keywords: reactions-diffusion equations; weighted terms; upper bound; lower bound

(责任编辑:贾晶晶)