

【基础理论研究】

# 基于修正函数投影同步的 Hopf 极限环反控制

蔡 萍

(闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

**摘 要:**研究了异结构混沌系统的 Hopf 极限环反控制问题。基于 Lyapunov 稳定性理论和自适应控制设计了一个控制策略, 并采用 Lü 系统和一个新的参数失配的混沌系统验证所提策略, 实现了在指定的位置生成 Hopf 极限环, 极限环的中心可以在任意点选择, 极限环的振幅可以控制等控制目标, 数值模拟的结果与理论分析一致。

**关键词:**函数投影同步; 主动控制; Hopf 分岔; 极限环; 反控制

**中图分类号:** O 231; O 415 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.issn.2097-4973.2025.02.016

## 0 引言

混沌现象广泛存在于数学、物理、化学、生物、医学、哲学、经济学、社会学等领域。20 世纪 70 年代, 混沌开始发展成为一门新的科学理论, 这是非线性科学中最重要的成就之一。20 世纪 90 年代, Pecora 等首次在电子电路上实现了混沌同步<sup>[1]</sup>。此后, 混沌同步研究逐渐增多。为更好地理解混沌产生机制, 分岔研究得到了迅速发展。分岔是非线性问题的一种特殊现象, 其中 Hopf 分岔理论对飞机前起落架、机翼和飞行器的设计有重要意义<sup>[2-3]</sup>, 近年来被广泛应用于航空航天领域。分岔控制和反控制是研究热点之一, 其中 Hopf 分岔的反控制被认为是一种在非线性动力系统中产生极限环的方法<sup>[4-6]</sup>。在工程应用中, 除了设计极限环, 控制极限环的振幅也是非常重要的一项工作, 研究人员给出了各种不同的控制方法<sup>[7-9]</sup>。然而, 这些方法都过于复杂且控制目标有限。

修正函数投影同步又称为改进函数投影同步, 它通过设计比例函数矩阵和一个可控制的矩阵, 使两个混沌系统实现渐近同步, 近年来受到了广泛关注。李震波等对四维能源系统和超混沌蔡氏系统的多元函数投影同步问题做了讨论<sup>[10]</sup>; 杜洪越等基于网络模型参数已知和未知两种情况, 设计自适应同步控制器, 使两个复杂网络达到改进函数投影同步<sup>[11]</sup>; 李德奎等研究了环状网络的修正函数投影同步及其仿真问题<sup>[12]</sup>; 方洁等研究了由四个混沌驱动系统和两个混沌响应系统组成的双重组合函数投影同步问题<sup>[13]</sup>, 孟晓玲等则把该方法应用到一类分数阶混沌系统同步控制问题<sup>[14]</sup>。本文采用修正函数投影同步讨论两个异结构的参数不确定的混沌系统的同步问题, 从而使响应系统实现了 Hopf 极限环反控制, 这是其他文献没有探讨的控制目标。相比其他控制方法, 本方法更为简洁, 且实现了多个控制目标。

## 1 基本理论知识

函数投影同步是指驱动系统和响应系统按任意给定的比例函数矩阵实现同步。考虑响应系统

---

**基金项目:**福建省中青年教师教育科研项目(JAT220213)

**作者简介:**蔡 萍(1979—), 女, 福建仙游人, 副教授, 博士, 主要从事非线性动力学研究。

E-mail: caiping0596@163.com

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) + U(x, y), \tag{1}$$

与之配套的驱动系统为

$$\dot{y} = By + g(y, t). \tag{2}$$

式中:  $x, y \in \mathbf{R}^n$  为状态变量,  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为系统线性矩阵,  $f$  和  $g$  是连续的非线性函数;  $U(x, y)$  是控制器, 设计用于同步两个系统。在本文中, 驱动系统是要求在某一平衡点处存在极限环。基于修正函数投影同步, 对系统(1)和系统(2)的任意初始条件, 若存在一个函数对角矩阵  $\alpha(t) = \text{diag}[\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)]$ , 其中  $\alpha_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$  是不全相同的函数, 且能够使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \alpha(t)y\| = 0$ , 则称系统(1)和系统(2)实现修正函数投影同步,  $\alpha(t)$  称为比例函数矩阵。

**定理 1** 对于给定的可微函数矩阵, 如果满足如下条件, 那么可以实现主从系统之间的广义函数投影同步:

(i)  $U = -A\alpha(t)y + \dot{\alpha}(t)y + \alpha(t)(By + g) - f + Ke$ , 这里  $\dot{\alpha}(t) = \text{diag}[\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dots, \dot{\alpha}_n]$ , 而  $K = (k_{ij})_{n \times n}$  是一个可控制的矩阵;

(ii) 通过选择合适的矩阵  $K$ , 使得  $(A+K)^T + (A+K)$  是一个负定矩阵。

**证明** 由修正函数投影同步理论可得误差系统为  $e(t) = x - \alpha(t)y$ , 由条件(i)可得

$$\dot{e}(t) = \dot{x} - \dot{\alpha}(t)y - \alpha(t)\dot{y} = Ax + f + U - \dot{\alpha}(t)y - \alpha(t)(By + g) = (A+K)e. \tag{3}$$

选取 Lyapunov 函数为  $V(e(t)) = e^T(t)e(t)$ , 根据条件(ii)可得 Lyapunov 函数通过误差系统的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t) = e^T(t)(A+K)^T e(t) + e^T(t)(A+K)e(t) = \\ &= e^T(t)[(A+K)^T + (A+K)]e(t) < 0. \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定性定理可知, 误差系统(3)的零解是全局渐近稳定的, 即系统(1)和系统(2)实现了修正函数投影同步。通常, 对于任意给定的  $A+K$  的特征值, 可通过主动控制方法获得增益矩阵  $K^{[15]}$ 。此外, 注意到尺度函数矩阵  $\alpha(t)$  不影响  $A+K$  的特征值, 因此在同步控制过程中任意调整  $\alpha(t)$ , 无须担心其干扰控制效果。

**注 1** 若想让响应系统(1)在平衡点  $P$  处产生极限环, 而驱动系统(2)在平衡点  $Q$  处产生稳定的极限环, 则可以将误差系统修改为  $e(t) = (x - P) - \alpha(t)(y - Q)$ 。

**注 2** 若比例函数矩阵  $\alpha(t) = \alpha$ , 则退化为广义投影同步。

## 2 修正函数投影同步的实现

文献[16]给出了 Lü 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \end{cases} \tag{4}$$

这里,  $a, b, c$  为实数。当参数取定为  $a=36, b=3, c=20$  时, 系统(4)为混沌系统。显然系统(4)有三个平衡点  $S_0(0, 0, 0), S_{\pm}(\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c) (bc > 0)$ 。根据 Routh-Hurwitz 定理, 可以得到以下结论:

(1) 平衡点  $S_0(0, 0, 0)$  是一个鞍点, 且对任意的  $a, b, c \in (0, +\infty)$  是不稳定的。即, 在平衡点  $S_0$  处无法产生 Hopf 分岔。

(2) 当  $a+b=3c$  时, 在平衡点  $S_{\pm}(\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c)$  的特征方程有一对纯虚特征值  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega_0}$ 。即, 当满足必要条件时, 在平衡点  $S_{\pm}$  处可以产生 Hopf 极限环。

选择系统(4)作为响应系统, 本文通过基于修正函数投影同步的策略来使其产生 Hopf 极限环。依据文献[17]描述一个新的混沌系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1(z_3 - z_1), \\ \dot{z}_2 = b_1 z_1 - d z_1^2, \\ \dot{z}_3 = m z_1 z_2 - c_1 z_2 - n z_3. \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)中,  $z_1, z_2, z_3$  是状态变量,  $a_1, b_1, c_1, d, m, n$  是实参数。通过线性坐标变换, 系统(5)在拓扑上等价于系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1(y_3 - y_1), \\ \dot{y}_2 = b_1 y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - c_1 y_2 - n y_3, \end{cases} \quad (6)$$

系统(6)在平衡点  $S'_0(0, 0, 0)$  处的 Hopf 分岔曲面为

$$-(a_1 + n)a_1 n + a_1 b_1 c_1 = 0. \quad (7)$$

即当参数满足方程(7)时, 系统(6)在平衡点  $S'_0(0, 0, 0)$  处将产生 Hopf 极限环。系统(6)在平衡点  $S_1(b_1, \frac{nb_1}{b_1 - c_1}, b_1)$  处的 Hopf 分岔曲面为  $-(a_1 + n)(a_1 n - \frac{a_1 b_1 n}{b_1 - c_1}) + a_1 b_1^2 - a_1 b_1 c_1 = 0$ 。

由于系统(6)可以产生稳定的极限环, 故选取系统(6)作为驱动系统。若系统(4)和系统(6)实现修正函数投影同步, 则系统(4)会在原先不可能产生 Hopf 极限环的地方产生 Hopf 极限环。此外, 还可以根据实际问题的需要, 选取适当的点作为极限环的中心。

根据定理 1 所给的控制器的表达式, 有

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, f = (0, -x_1 x_3, x_1 x_2)^T, \mathbf{B}y + g = \begin{pmatrix} -a_1 y_1 + a_1 y_3 \\ b_1 y_1 - y_1^2 \\ -c_1 y_2 - n y_3 + y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

比例函数矩阵  $\alpha(t)$  有多种选择。考虑到控制器越简单越实用的原理, 选取比例函数矩阵为

$$\alpha(t) = \text{diag}[\exp(a_1 - a)t, \exp(ct), \exp(n - b)t].$$

根据定理 1, 存在一个反馈增益  $\mathbf{K}$ , 使得  $\mathbf{A} + \mathbf{K}$  的所有特征值的实部都为负。这里选取

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a - k_1 & -a & 0 \\ 0 & -c - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & b - k_3 \end{pmatrix},$$

容易得到

$$\mathbf{A} + \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix},$$

其中,  $k_1, k_2, k_3$  都为正实数。则控制器  $U$  设计为

$$\begin{cases} u_1 = a_1 a_1 y_3 + (a - k_1)(x_1 - a_1 y_1) - a x_2, \\ u_2 = a_2 b_1 y_1 - a_2 y_1^2 + x_1 x_3 + (-c - k_2)(x_2 - a_2 y_2), \\ u_3 = a_3 y_1 y_2 - a_3 c_1 y_2 - x_1 x_2 + (b - k_3)(x_3 - a_3 y_3). \end{cases}$$

注 3 若比例函数矩阵  $\alpha(t) = \alpha$ , 控制器  $U$  将为

$$\begin{cases} u_1 = a_1 a_1 y_3 + (a - k_1)(x_1 - a_1 y_1) - a x_2 + a_1(a - a_1)y_1, \\ u_2 = a_2 b_1 y_1 - a_2 y_1^2 + x_1 x_3 + (-c - k_2)(x_2 - a_2 y_2) - a_2 c y_2, \\ u_3 = a_3 y_1 y_2 - a_3 c_1 y_2 - x_1 x_2 + (b - k_3)(x_3 - a_3 y_3) + a_3(b - g)y_3, \end{cases}$$

从而, 响应受控系统定义为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + c x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 + u_3. \end{cases} \quad (8)$$

### 3 数值模拟分析

取  $k_1=1, k_2=2, k_3=3$ , 同步误差  $e_i(t) (i=1, 2, 3)$ , 同步误差随时间的变化曲线如图 1 所示。图 1 表明系统(8)和系统(6)是全局稳定的。取  $a=3, b=3, c=10, a_1=3, b_1=6, c_1=3, g=3$ , 图 2、图 3 分别给出了原系统在不稳定的鞍点  $S_0$  处的相图和受控后的系统在平衡点  $S'_0$  处产生的稳定的极限环。

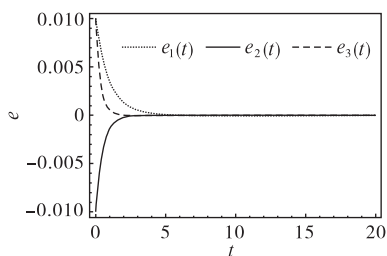


图 1 同步误差的时间历程图

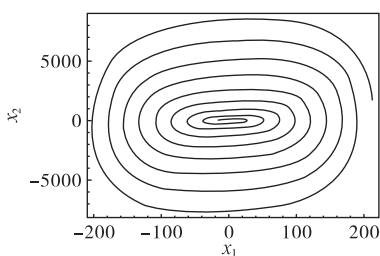


图 2 原系统在  $S_0$  处的相图

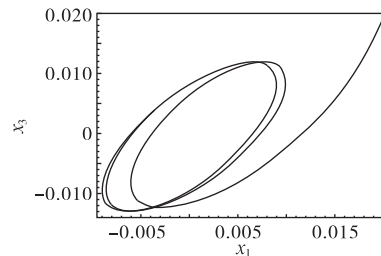
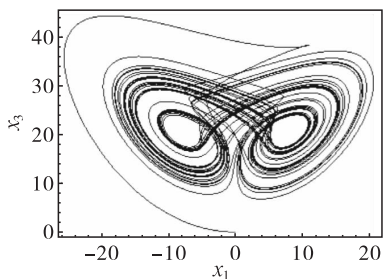
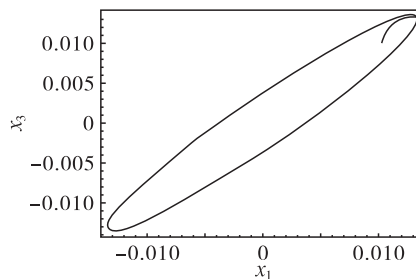


图 3 受控系统在  $S'_0$  处产生的极限环

此外, 系统(4)的奇异吸引子在参数取为  $(a, b, c) = (36, 3, 20)$  处呈现, 这里给出在受控系统里生成一个稳定的 Hopf 极限环, 结果如图 4 所示。



(a) 原系统



(b) 受控系统

图 4 混沌吸引子的 Hopf 反控制

由注 2 知, 当  $\alpha_i(t) = \alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$  时, 该控制策略将退化为广义投影同步。下面将说明广义投影同步也可以达到 Hopf 极限环反控制的目的。以  $(a, b, c) = (4, 4, 10), (a_1, b_1, c_1, g) = (2, 4, 2, 2)$  和  $(k_1, k_2, k_3) = (1, 2, 3)$  作为例子, 并取  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  分别为  $(1, 2, 3), (2, 2, 3), (2, 3, 3)$ 。为方便起见, 只取平衡点  $S'_0(0, 0, 0)$  进行数值模拟。受控系统在  $S'_0(0, 0, 0)$  处产生的 Hopf 极限环如图 5 所示。

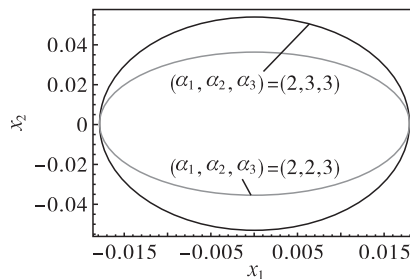
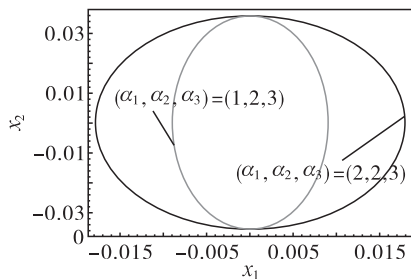


图 5 受控系统在  $S'_0(0, 0, 0)$  产生的 Hopf 极限环

由图 5 可以看出, 随着  $\alpha_i$  值的增大, 相应的  $x_i$  的振幅值也增大, 这意味着可以根据实际应用选择合适的  $\alpha_i$  来控制 Hopf 极限环的振幅值。

## 4 结论

本文讨论了两个异结构混沌系统之间的修正函数投影同步问题,并在此基础上实现了 Hopf 极限环反控制。选取两个参数未知的异结构三维混沌系统作为主从系统。基于 Hopf 分岔理论,计算了驱动系统在平衡点产生 Hopf 极限环的必要条件。通过选择合适的比例函数矩阵  $\alpha(t)$  和控制矩阵  $\mathbf{K}$ ,设计合适的控制器,实现主从系统的同步。因此,响应系统不仅可以在不稳定的鞍点处产生 Hopf 极限环,而且在混沌状态下也能产生 Hopf 极限环。此外,极限环的中心可以根据实际需要任意设计。当比例函数矩阵  $\alpha(t)$  退化为常数  $\alpha$  时,仍然可以达到控制目标,并且可以通过改变  $\alpha_i$  的值来控制极限环的振幅值。数值模拟结果与理论分析结果一致,进一步验证了控制策略的有效性和可行性。与以往的反馈控制方法相比,该控制策略更加简洁、方便,且实现了更加多样的控制目标。

## 参考文献:

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical review letters, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] 张瑜, 张文, 乐源. 飞机前起落架模型的 Hopf 分岔及控制研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(8): 13-22.
- [3] 周碧柳, 徐慧东, 魏延, 等. 不可压缩流中二元机翼运动的 Hopf 分岔[J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(1): 78-85.
- [4] CAI P, YUAN Z Z. Application of anti-control strategy based on a modified washout filter controller[J]. Italian journal of pure and applied mathematics, 2021, 45: 791-800.
- [5] WEN G L, XU H D, LV Z Y, et al. Anti-controlling Hopf bifurcation in a type of centrifugal governor system[J]. Nonlinear dynamics, 2015, 81: 811-822.
- [6] CAI P, YUAN Z Z. Hopf bifurcation and chaos control in a new chaotic system via hybrid control strategy[J]. Chinese journal of physics, 2017, 55(1): 64-70.
- [7] LIU S H, TANG J S. Algorithm for amplitude control of limit cycles emerging from Hopf bifurcations in 3D systems[J]. International journal of bifurcation and chaos, 2009, 19(1): 171-186.
- [8] XU F L, LIU S H. Amplitude control of limit cycle in Chua system [J]. Advanced materials research, 2011, 328/329/330: 2079-2085.
- [9] 崔岩, 刘素华, 葛晓陵. Langford 系统 Hopf 分岔极限环幅值控制[J]. 物理学报, 2012, 61(10): 100202.
- [10] 李震波, 唐叶芝. 高维混沌系统的多元函数投影同步及其保密通信方案[J]. 计算物理, 2023, 40(1): 91-105.
- [11] 杜洪越, 李春双, 公利滨. 两个带有已知或未知参数的复杂网络的改进函数投影同步[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1816-1822.
- [12] 李德奎, 毛北行. 时滞干扰环状网络的修正函数投影同步及仿真[J]. 计算物理, 2023, 40(5): 643-652.
- [13] 方洁, 朱飞, 娄新杰, 等. 受扰混沌系统双重组合函数投影同步[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2019, 53(4): 509-515.
- [14] 孟晓玲, 程春蕊. 一类分数阶混沌系统的修正函数投影同步[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2018, 40(3): 232-236.
- [15] AGIZA H N, YASSEN M T. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems

using active control[J]. Physics letters A, 2001, 278(4): 191-197.

- [16] LÜ J H, CHEN G R. A new chaotic attractor coined[J]. International journal of bifurcation and chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [17] 刘凌, 苏燕辰, 刘崇新. 一个新混沌系统及其电路仿真实验[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3933-3937.

## Creation of Hopf limit circles based on modified function projective synchronization

CAI Ping

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

**Abstract:** The problem of Hopf limit circle anti-control of heterogeneous chaotic system is studied in this paper. Based on Lyapunov stability theory and the active control method, a control law is introduced for the problem. Lü system and a new chaotic system with uncertain parameters are employed to prove the present method. The control objectives achieved in this paper are as follows: the Hopf limit circle is generated in a suitable position, and the center of limit cycle can be selected at any point, and also the amplitude of limit circle can be controlled. The results of numerical simulation are consistent with the theoretical analysis.

**Keywords:** function projective synchronization; active control; Hopf bifurcation; limit circle; anti-control

(责任编辑: 贾晶晶)

**引用格式** 蔡萍. 基于修正函数投影同步的 Hopf 极限环反控制[J]. 山东航空学院学报, 2025, 42(2): 119-124.

CAI P. Creation of Hopf limit circles based on modified function projective synchronization[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics, 2025, 42(2): 119-124.

## 本 刊 声 明

本刊已许可中国知网(中国学术期刊(光盘版)电子杂志社)、北京万方数据股份有限公司(万方数据电子出版社)、重庆维普资讯有限公司、超星期刊域出版平台等在其各自的系列数据库产品中以数字化方式复制、汇编、发行及在信息网络传播本刊全文。作者著作权使用费和稿酬(即包括印刷版、光盘版和网络版等各种使用方式的报酬)一并支付。如作者对本声明持有异议,请在投稿时说明。