【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

关于(h_1, h_2)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式的推广

邵慧婕，徐　润

（曲阜师范大学 数学科学学院，山东 曲阜 273165）

摘　要：主要考虑了具有(h_1, h_2)-凸性的一类函数，基于ψ-Riemann-Liouville 分数阶积分，建立了一些新的 Hermite-Hadamard 型积分不等式，给出了导函数为(h_1, h_2)-凸函数时相应的不等式，并举例验证了所得结果的正确性。

关键词：(h_1, h_2)-凸函数；s-凸函数；Hermite-Hadamard 型积分不等式；Riemann-Liouville 分数阶积分；ψ-Riemann-Liouville 分数阶积分

中图分类号：O 175　**文献标识码：**A　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2025.02.012

0　引言

分数阶微积分作为微积分理论的一个重要部分，是整数阶微积分的推广。1987 年，Kilbas 等建立了比较系统的分数阶微积分及其应用理论[1]；1993 年，Miller 等在 Riemann-Liouville（简称 R-L）分数阶微积分算子的基础上建立了分数阶微分方程理论[2]；2006 年，Kilbas 等给出 R-L 左定积分和右定积分的定义[3]。随后许多学者对分数阶微积分算子的定义进行了完善和推广，这些成果进一步丰富了分数阶微积分理论[4]。文献[5]证明了关于凸函数 $f(x)$的经典 Hermite-Hadamard（简称 H-H）型积分不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

其中，$f: I\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$a, b\in I$，$a<b$。此不等式一经提出便在数学界引起了广泛关注，它描述了$f(x)$积分均值的一个估计，为数学分析提供了新的研究视角。基于分数阶积分理论的不断发展，关于 H-H 型积分不等式也出现了一系列新的研究成果[6-13]，这些研究成果在解决微积分方程的各种初值或边界问题方面应用广泛，为解决许多复杂的现实问题提供了有力的数学工具。在这些成果中，关于凸函数的 H-H 型积分不等式是一个重要课题。

文献[12]建立了第二意义下 s-凸函数关于ψ-R-L 分数阶积分的 H-H 型不等式，将端点处与中点处的函数值作为积分均值上下界的估计

$$2^{s-1}h\left(\frac{b+c}{2}\right)\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^{\alpha}}\left[J^{\alpha,\psi}_{\psi^{-1}(b)^+}(h\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+J^{\alpha,\psi}_{\psi^{-1}(c)^-}(h\circ\psi)(\psi^{-1}(b))\right]\leqslant$$

收稿日期：2024-01-26

基金项目：国家自然科学基金项目（11671227）

第一作者简介：邵慧婕（1999—　），女，山东潍坊人，硕士研究生，主要从事常微分方程及动力系统研究。E-mail：1441780448@qq.com

通信作者简介：徐　润（1966—　），女，山东兖州人，教授，硕士，主要从事常微分方程及动力系统研究。E-mail：xurun2005@163.com

$$[\frac{3\alpha}{\alpha+s}-\frac{\alpha}{(\alpha+s)^{2\alpha+s}}]\frac{h(b)+h(c)}{2}。$$

以上不等式是对 ψ-R-L 分数阶积分的 H-H 型积分不等式的有效扩展，也推广了部分已有的研究结果，当 s-凸函数或 ψ-R-L 分数阶积分退化时，可得到以前的结果。本文主要研究 (h_1,h_2)-凸函数 $f(x)$ 以及其导数 $f'(x)$ 为 (h_1,h_2)-凸函数的 ψ-R-L 分数阶积分的 H-H 型积分不等式，并举例验证所得结果的正确性。(h_1,h_2)-凸函数可退化为 s-凸函数、h-凸函数以及常义下的经典凸函数，ψ-R-L 分数阶积分算子可退化为 R-L 分数阶积分算子。因此，本文的结果是上述结果的推广。

1 预备知识

定义 1[14] 设 $[a,b]$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的某区间。$\psi:[a,b]\to\mathbf{R}^+$，$\psi$ 为增函数且在 (a,b) 上有连续的一阶导数 ψ'。函数 $f(x)$ 关于 ψ 在 $[a,b]$ 上的左定和右定 ψ-R-L 分数阶积分定义为

$$I_{a^+}^{\alpha:\psi}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$I_{b^-}^{\alpha:\psi}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t,$$

其中，Γ 是伽马函数，$\alpha>0$。

注 1 当 $\psi(x)=x$ 时，ψ-R-L 分数阶积分退化为 R-L 分数阶积分。

定义 2[15] 设 $h_1,h_2:(0,1)\to\mathbf{R}$ 是两个实函数，$h_1,h_2\neq0$，$f:I\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。如果 f 对任意 $x,y\in I$，$0<t<1$ 满足

$$f(tx+1-ty)\leqslant h_1(t)h_2(1-t)f(x)+h_1(1-t)h_2(t)f(y),$$

则称 f 为 (h_1,h_2)-凸函数。如果不等号反向，则称 f 为 (h_1,h_2)-凹函数。

注 2 在定义 2 中：(1)如果取 $h_2\equiv1$，则定义 2 退化为 h-凸函数；(2)如果取 $h_1=x^s$，$h_2\equiv1$，则定义 2 退化为第二意义下 s-凸函数；(3)如果取 $h_1=h_2\equiv1$，则定义 2 退化为 P-函数。

引理 1[12] 设 $f:[b,c]\to\mathbf{R}$ 是 (b,c) 上的可微函数，$b<c$。若 $f\in L[b,c]$，则有等式

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I_{\psi^{-1}(b)^+}^{\alpha:\psi}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+I_{\psi^{-1}(c)^-}^{\alpha:\psi}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(b))]-f(\frac{b+c}{2})=$$

$$\frac{c-b}{2}\int_0^1(k+t^\alpha-(1-t)^\alpha)f'(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t \tag{1}$$

成立。其中，

$$k=\begin{cases}1,0\leqslant t<\dfrac{1}{2},\\ -1,\dfrac{1}{2}\leqslant t<1。\end{cases}$$

记

$$J=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I_{\psi^{-1}(b)^+}^{\alpha:\psi}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+I_{\psi^{-1}(c)^-}^{\alpha:\psi}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(b))]-f(\frac{b+c}{2}),$$

则式(1)变为

$$J=\frac{c-b}{2}\int_0^1(k+t^\alpha-(1-t)^\alpha)\ f'(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t。$$

引理 2 若 $0<r<1$，$a_i>0$，$b_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^r\leqslant\sum_{i=1}^n(a_i)^r+\sum_{i=1}^n(b_i)^r$$

成立。

2 主要结果及其证明

首先给出(h_1,h_2)-凸函数$f(x)$的ψ-R-L 分数阶积分的 H-H 型积分不等式。

定理 1 设函数 $f,\psi:[b,c]\to\mathbf{R}^+$,$f\in L[b,c]$且为 $[b,c]$上的(h_1,h_2)-凸函数。ψ为增函数且在(b,c)上有连续的一阶导数ψ',则有不等式

$$\frac{1}{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2})\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(b)^+}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(c)^-}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(b))]\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}(f(b)+f(c))\int_0^1 t^{\alpha-1}[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t \tag{2}$$

成立。其中,$\alpha\in(0,1)$,$0\leqslant b<c$。

证明 因为函数 $f(x)$是$[b,c]$上的(h_1,h_2)-凸函数,在定义 2 中,令 $t=\frac{1}{2}$可得

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})f(x)+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})f(y)。$$

利用换元法,令 $x=tb+(1-t)c$,$y=(1-t)b+tc$,上式变为

$$f(\frac{b+c}{2})\leqslant h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})f(tb+(1-t)c)+h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})f((1-t)b+tc),$$

上式两边同乘 $t^{\alpha-1}$,并对 t 从 0 到 1 积分,得到

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)b+tc)\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1}{h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2})\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2})。\tag{3}$$

由定义 1 及式(3)得

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(b)^+}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(c)^-}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(b))]=$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\psi^{-1}(b)}^{\psi^{-1}(c)}\psi'(t)(\psi(\psi^{-1}(c))-\psi(t))^{\alpha-1}(f\circ\psi)(t)\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\psi^{-1}(b)}^{\psi^{-1}(c)}\psi'(t)(\psi(t)-\psi(\psi^{-1}(b)))^{\alpha-1}(f\circ\psi)(t)\mathrm{d}t]=$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}\times\frac{1}{\Gamma(\alpha)}[\int_{\psi^{-1}(b)}^{\psi^{-1}(c)}\psi'(t)(c-\psi(t))^{\alpha-1}f(\psi(t))\mathrm{d}t+\int_{\psi^{-1}(b)}^{\psi^{-1}(c)}\psi'(t)(\psi(t)-b)^{\alpha-1}f(\psi(t))\mathrm{d}t],$$

令 $s=\psi(t)$,则

$$上式=\frac{\alpha}{2(c-b)}[\int_b^c(\frac{c-s}{c-b})^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s+\int_b^c(\frac{s-b}{c-b})^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s],$$

令 $u=\frac{c-s}{c-b}$,$v=\frac{s-b}{c-b}$,则令 $t=u$ 且 $t=v$,则

$$上式=\frac{\alpha}{2}[\int_0^1 t^{\alpha-1}f(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)b+tc)\mathrm{d}t]\geqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\alpha h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2})=\frac{1}{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2}),\tag{4}$$

式(2)的左边得证。

下面证明式(2)的右边。由 $f(x)$是$[b,c]$上的(h_1,h_2)-凸函数,$t\in(0,1)$,可得

$$f(tb+(1-t)c)\leqslant h_1(t)h_2(1-t)f(b)+h_1(1-t)h_2(t)f(c),$$

$$f(tc+(1-t)b)\leqslant h_1(t)h_2(1-t)f(c)+h_1(1-t)h_2(t)f(b),$$

上面两式相加，得

$$f(tb+(1-t)c)+f(tc+(1-t)b)\leqslant[f(b)+f(c)][h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]。$$

上式两边同乘 $t^{\alpha-1}$，并按 t 从 0 到 1 积分，得到

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)b+tc)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}[f(b)+f(c)][h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t=$$

$$[f(b)+f(c)]\int_0^1 t^{\alpha-1}[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t, \tag{5}$$

所以，由式(4)(5)得

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(b)^+}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(c))+I^{\alpha:\psi}_{\psi^{-1}(c)^-}(f\circ\psi)(\psi^{-1}(b))]=$$

$$\frac{\alpha}{2}[\int_0^1 t^{\alpha-1}f(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)b+tc)\mathrm{d}t]\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}[f(b)+f(c)]\int_0^1 t^{\alpha-1}[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{f(b)+f(c)}{2}\alpha\int_0^1 t^{\alpha-1}[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

式(2)右边得证，证毕。

注 3 若 $f(x)$ 为 $[b,c]$ 上的 (h_1,h_2)-凹函数，则得到与式(2)不等号方向相反的 H-H 型积分不等式。

推论 1 假设定理 1 的条件成立，取 $\psi(x)=x$，得到

$$\frac{1}{2h_1(\frac{1}{2})h_2(\frac{1}{2})}f(\frac{b+c}{2})\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^\alpha}[I^\alpha_{b^+}f(c)+I^\alpha_{c^-}f(b)]\leqslant$$

$$\frac{\alpha}{2}(f(b)+f(c))\int_0^1 t^{\alpha-1}[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t。$$

下文推论 2、推论 3 以及推论 4 也是同类分数阶积分的退化所得到的结果。

注 4 在定理 1 的条件下，取 $h_1(x)=x^s$，$h_2(x)\equiv 1$，得到文献[9]中的式(6)。

注 5 在定理 1 的条件下，取 $\psi(x)=x$，$h_1(x)\equiv 1$，$h_2(x)\equiv 1$，得到文献[7]中的式(2.1)。

下面研究导函数 $f'(x)$ 为 (h_1,h_2)-凸函数时相应的 ψ-R-L 分数阶积分的 H-H 型积分不等式。

定理 2 设函数 $f,\psi:[b,c]\to\mathbf{R}^+$，$f\in L[b,c]$ 且 f' 为 $[b,c]$ 上的 (h_1,h_2)-凸函数，ψ 为增函数且在 (b,c) 上有连续的一阶导数 ψ'，则有不等式

$$|J|\leqslant\frac{c-b}{2}(|f'(b)|+|f'(c)|)\int_0^1(t^\alpha+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t \tag{6}$$

成立，其中，$\alpha\in(0,1)$，$0\leqslant b<c$。

证明 利用引理 1 以及函数 $f'(x)$ 的 (h_1,h_2)-凸性，得到

$$|J|=\frac{c-b}{2}|\int_0^1(k+t^\alpha-(1-t)^\alpha)f'(tb+(1-t)c)\mathrm{d}t|\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|]\mathrm{d}t+$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1-t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(c)|+h_1(1-t)h_2(t)|f'(b)|]\mathrm{d}t\}\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|]\mathrm{d}t+$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^{\alpha}+1)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(c)|+h_1(1-t)h_2(t)|f'(b)|]\mathrm{d}t\},$$

对上式第 2 个积分换元，令 $x=1-t$，则

$$\text{上式}=\frac{c-b}{2}\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^{\alpha})[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|]\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x^{\alpha}+1)[h_1(1-x)h_2(x)|f'(c)|+h_1(x)h_2(1-x)|f'(b)|]\mathrm{d}x\}=$$

$$\frac{c-b}{2}(|f'(b)|+|f'(c)|)\int_0^1(t^{\alpha}+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

式(6)得证。

推论 2　假设定理 2 的条件成立，取 $\psi(x)=x$，得到

$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^{\alpha}}[I_{b^+}^{\alpha}f(c)+I_{c^-}^{\alpha}f(b)]-f(\frac{b+c}{2})\right|\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}(|f'(b)|+|f'(c)|)\int_0^1(t^{\alpha}+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t。$$

记上式第 1 项为 $J_1=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(c-b)^{\alpha}}[I_{b^+}^{\alpha}f(c)+I_{c^-}^{\alpha}f(b)]-f(\dfrac{b+c}{2})$。

注 6　在定理 2 的条件下，取 $h_1(x)=x^s$，$h_2(x)\equiv1$，得到文献[9]中的式(9)。

定理 3　设函数 $f,\psi:[b,c]\to\mathbf{R}^+$，$f\in L[b,c]$且$|f'|^q(q>1)$为$[b,c]$上的$(h_1,h_2)$-凸函数。$\psi$ 为增函数且在(b,c)上有连续的一阶导数 ψ'，则有不等式

$$|J|\leqslant(c-b)(\frac{1}{(\alpha p+1)2^{\alpha p+1}})^{\frac{1}{p}}(|f'(b)|+|f'(c)|)\times$$

$$[(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(\int_{\frac{1}{2}}^{1}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}]\tag{7}$$

成立。其中，$\dfrac{1}{p}=1-\dfrac{1}{q}$，$\alpha\in(0,1)$，$0\leqslant b<c$。

证明　利用引理 1、Hölder 不等式以及 $|f'|^q$ 的(h_1,h_2)-凸性得到

$$|J|\leqslant\frac{c-b}{2}\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})|f'(tb+(1-t)c)|\mathrm{d}t+$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^{\alpha}+1-t^{\alpha})|f'(tb+(1-t)c)|\mathrm{d}t\}\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}\{(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}(\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(tb+(1-t)c)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^{\alpha}+1-t^{\alpha})^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}(\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f'(tb+(1-t)c)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\}\leqslant\frac{c-b}{2}(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})^p\mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\{(\int_0^{\frac{1}{2}}[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\},\tag{8}$$

利用引理 2 得到

$$(\int_0^{\frac{1}{2}}[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$(|f'(b)|^q\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(|f'(c)|^q\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(|f'(b)|^q\int_{\frac{1}{2}}^{1}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(|f'(c)|^q\int_{\frac{1}{2}}^{1}h_1(-t)h_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}=$$

$$|f'(b)|(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+|f'(c)|(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$|f'(b)|(\int_{\frac{1}{2}}^{1}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+|f'(c)|(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}h_1(1-t)h_1(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$$

对后两个积分换元，令 $x=1\text{-}t$，则

$$上式=(|f'(b)|+|f'(c)|)[(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}],\tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，即可得到式(7)，证毕。

推论 3　假设定理 3 的条件成立，取 $\psi(x)=x$，得到

$$|J_1|\leqslant(c-b)(\frac{1}{(\alpha p+1)2^{\alpha p+1}})^{\frac{1}{p}}(|f'(b)|+|f'(c)|)[(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(\int_{\frac{1}{2}}^{1}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}]。$$

注 7　在定理 3 的条件下，取 $h_1(x)=x^s$，$h_2(x)\equiv1$ 时，得到文献[9]中的式(11)。

定理 4　假设定理 3 的条件成立，则有下式成立：

$$|J|\leqslant\frac{c-b}{2}(\frac{1}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{q}}(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{2^\alpha})^{1-\frac{1}{q}}(|f'(b)|+|f'(c)|)\times$$

$$[(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}]。$$

证明　利用引理 1、幂均值不等式以及 $|f'|^q$ 的 (h_1,h_2)-凸性得到

$$|J|\leqslant\frac{c-b}{2}\{\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)|f'(tb+(1-t)c)|\mathrm{d}t+$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1-t^\alpha)|f'(tb+(1-t)c)|\mathrm{d}t\}\leqslant\frac{c-b}{2}\{(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)\mathrm{d}t)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)|f'(tb+(1-t)c)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1-t^\alpha)\mathrm{d}t)^{1-\frac{1}{q}}(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1-t^\alpha)|f'(tb+(1-t)c)|^q\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\}\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)\mathrm{d}t)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\{(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1-t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\}\leqslant$$

$$\frac{c-b}{2}(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha-(1-t)^\alpha)\mathrm{d}t)^{1-\frac{1}{q}}\times$$

$$\{(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}\}=$$

$$\frac{c-b}{2}(\frac{1}{\alpha+1})^{1-\frac{1}{\alpha}}(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{2^\alpha})^{1-\frac{1}{\alpha}}\times$$

$$\{(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t^{\frac{1}{q}}+$$

$$(\int_{\frac{1}{2}}^{1}((1-t)^\alpha+1)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}),\tag{10}$$

利用引理 2 得到

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1)[h_1(t)h_2(1-t)|f'(b)|^q+h_1(1-t)h_2(t)|f'(c)|^q]\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\left(|f'(b)|^q\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(c)|^q\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$\left(|f'(b)|^q\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(|f'(c)|^q\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$|f'(b)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+|f'(c)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$|f'(b)|\left(\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+|f'(c)|\left(\int_{\frac{1}{2}}^1((1-t)^\alpha+1)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$(|f'(b)|+|f'(c)|)\times\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

将上式代入式(10),即可得到结果。

推论 4　假设定理 4 的条件成立,取$\psi(x)=x$,得到

$$|J_1|\leqslant\frac{c-b}{2}\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{2^\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}}(|f'(b)|+|f'(c)|)\times$$

$$\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t^\alpha)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right]。$$

注 8　在定理 4 的条件下,取$h_1(x)=x^s$,$h_2(x)\equiv1$时,得到文献[9]中的式(13)。

3　应用

本文主要研究了(h_1,h_2)-凸函数$f(x)$的ψ-R-L 分数阶 H-H 型积分不等式,现举例验证所得结果的正确性。

二元均值是关于两个元素的均值,对于任意的$m,n\in\mathbf{R}_+$,$m\neq n$,分别考虑调和均值、算术均值、对数均值、r-对数均值:

$$H(m,n)=\frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},m,n\in\mathbf{R}\backslash\{0\};A(m,n)=\frac{m+n}{2},m,n\in\mathbf{R};L(m,n)=\frac{n-m}{\ln|n|-\ln|m|},|m|\neq|n|,mn\neq0;$$

$$L_r(m,n)=\left[\frac{n^{r+1}-m^{r+1}}{(r+1)(n-m)}\right]^{\frac{1}{r}},r\in\mathbf{Z}\backslash\{-1,0\},m,n\in\mathbf{R},m\neq n。$$

例 1　假设$m,n\in\mathbf{R}_+$,$m<n$,$r\in\mathbf{Z}$,$|r|\geqslant2$,$s\in(0,1]$,且$q>1$,则有关于r-对数均值及算术均值的 3 个估计:

$$|L_r^r(m,n)-A^r(m,n)|\leqslant(n-m)|r|A(|m|^{r-1},|n|^{r-1})\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

$$|L_r^r(m,n)-A^r(m,n)|\leqslant2(n-m)|r|\left(\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}A(|m|^{r-1},|n|^{r-1})\times$$

$$\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

$$|L_r^r(m,n)-A^r(m,n)|\leqslant(n-m)|r|\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{p}}A(|m|^{r-1},|n|^{r-1})\times$$

$$\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right]。$$

其中，$\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$。

证明 在定理 2 中，令 $f(x)=x^r$，$\alpha=1$，$\psi(x)=x$，则

$$|J|=|L_r^r(m,n)-A^r(m,n)|\leqslant\frac{n-m}{2}(|rm^{r-1}|+|rn^{r-1}|)\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t=$$

$$(n-m)|r|A(|m|^{r-1},|n|^{r-1})\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

即证得第 1 个估计。同理令 $f(x)=x^r$，$\alpha=1$，$\psi(x)=x$，分别利用定理 3、定理 4，得到第 2、第 3 个估计。

例 2 假设 $m,n\in\mathbf{R}_+$，$m<n$，$r\in\mathbf{Z}$，$s\in(0,1]$，且 $q>1$。则有关于对数均值及调和均值的 3 个估计：

$$|L^{-1}(m,n)-H(m^{-1},n^{-1})|\leqslant(n-m)A(|m|^{-2},|n|^{-2})\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

$$|L^{-1}(m,n)-H(m^{-1},n^{-1})|\leqslant2(n-m)\left(\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}A(|m|^{-2},|n|^{-2})\times$$

$$\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

$$|L^{-1}(m,n)-H(m^{-1},n^{-1})|\leqslant(n-m)\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{p}}A(|m|^{-2},|n|^{-2})\times$$

$$\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t)h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t)h_1(1-t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

其中，$\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$。

证明 在定理 2 中，令 $f(x)=\frac{1}{x}$，$\alpha=1$，$\psi(x)=x$，则

$$|J|=|L^{-1}(m,n)-H(m^{-1},n^{-1})|\leqslant\frac{n-m}{2}(|m|^{-2}+|n|^{-2})\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t=$$

$$(n-m)A(|m|^{-2},|n|^{-2})\int_0^1(t+1)[h_1(t)h_2(1-t)+h_1(1-t)h_2(t)]\mathrm{d}t,$$

即证得第 1 个估计。同理令 $f(x)=x^r$，$\alpha=1$，$\psi(x)=x$，分别利用定理 3、定理 4，得到第 2、第 3 个估计。

参考文献：

[1] KILBAS A A, MARICHEV O I, SAMKO S G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications[M]. Minsk: Science and Technica, 1987.

[2] MILLER K S, ROSS B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations [M]. NewYork: John Wiley and Sons, INC, 1993.

[3] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[4] 王秋爽，徐润. 关于分数阶微积分算子的新进展[J]. 滨州学院学报，2021，37(6)：51-58.

[5] HADAMARD J. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann[J]. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1893, 9: 171-215.

[6] DRAGOMIR S S, FITZPATRICK S. The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense[J]. Demonstratio mathematica, 1999, 32(4): 687-696.

[7] SARIKAYA M Z, SAGLAM A, YILDIRIM H. On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions[J]. Journal of mathematical inequalities, 2008, 2(3): 335-341.

[8] NOOR M A, NOOR K I, AWAN M U, et al. Some integral inequalities for harmonically h-convex

functions[J]. Politehnica University of Bucharest Scientific Bulletin，Series A：applied mathematics and physics，2015，77(1)：5-16.

[9] AWAN M U，NOOR M A，NOOR K I，et al. Some new classes of convex functions and inequalities [J]. Miskolc mathematical notes，2018，19(1)：77-94.

[10] SARIKAYA M Z，SET E，YALDIZ H，et al. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities[J]. Mathematical and computer modelling，2013，57(9/10)：2403-2407.

[11] JLELI M，O'REGAN D，SAMET B. On Hermite-Hadamard type inequalities via generalized fractional integrals[J]. Turkish journal of mathematics，2016，40(6)：1221-1230.

[12] ZHAO Y，SANG H W，XIONG W C，et al. Hermite-Hadamard-type inequalities involving ψ-Riemann-Liouville fractional integrals via s-convex functions[J]. Journal of inequalities and applications，2020，2020(1). DOI：10.1186/s13660-020-02389-7.

[13] AHMAD B，ALSAEDI A，KIRANE M，et al. Hermite-Hadamard，Hermite-Hadamard-Fejér，Dragomir-Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals [J]. Journal of computational and applied mathematics，2019，353：120-129.

[14] SOUSA V J，OLIVEIRA C D. On the ψ-Hilfer fractional derivative[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation，2018，60：72-91.

[15] AWAN M U. Some new classes of convex functions and inequalities[J]. Miskolc mathematical notes，2018，19(1)：77-94.

Generalization of Hermite-Hadamard inequalities for (h_1，h_2)-convex functions

SHAO Huijie，XU Run

(*School of Mathematical Sciences*，*Qufu Normal University*，*Qufu* 273165，*China*)

Abstract：A class of functions with (h_1，h_2)-convexity have been considered and some new Hermite-Hadamard inequalities based on the ψ-Riemann-Liouville fractional integral have been established. At the same time，the corresponding inequalities have also been given when the derivative function is (h_1，h_2)-convex function. And some examples are given to verify the correctness of the obtained results.

Keywords：(h_1，h_2)-convex functions；s-convex functions；Hermite-Hadamard inequalities；Riemann-Liouville fractional integral；ψ-Riemann-Liouville fractional integral

（责任编辑：贾晶晶）

引用格式　邵慧婕，徐润. 关于(h_1，h_2)-凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式的推广[J]. 山东航空学院学报，2025，42(2)：87-95.

SHAO H J，XU R. Generalization of Hermite-Hadamard inequalities for (h_1，h_2)-convex functions[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2025，42(2)：87-95.