

【微分方程与动力系统研究】

线性 Caputo 型分数阶三维动力系统解的
空间结构及动力学行为

张宏杰

(重庆工贸职业技术学院 基础教育学院, 重庆 408000)

摘要: 基于系数矩阵特征值的分类情况, 采取一系列线性变换和 Laplace 变换, 结合 Mittag-Leffler 函数的敛散性, 对 Caputo 型分数阶三维动力系统进行了研究, 得到了分数阶三维动力系统解的相空间结构及动力学性质。

关键词: 特征值; Mittag-Leffler 函数; 分数阶动力系统; 相空间结构; 动力学性质

中图分类号: O 175 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2024.02.009

0 引言

分数阶微分方程应用广泛, 涉及反常扩散、热传导、黏弹性现象和系统的记忆现象等领域, 尤其在分数阶动力系统及其控制研究领域方面, 受到越来越多专家学者的关注。当前有关分数阶微分方程的研究主要集中在精确解^[1-3]以及解的存在性^[4-6]、稳定性和数值模拟^[7-8]等方面。Caputo 型分数阶三维动力系统在相空间中解的结构和动力学行为鲜有研究。文献[9]研究三维分数阶动力系统的平衡点问题时, 只把该系统作为所研究动力系统的一种特殊情况, 由于受到技术的限制, 文章并没有对该系统的平衡点进行分类讨论, 也没有进一步研究平衡点周围轨线的走势及其动力学性质。文献[10]对分数阶二维自治系统的动力学性质进行了相关研究, 却并未对分数阶三维系统进行详细说明讨论。为此, 本文将对 Caputo 型分数阶三维动力系统在相空间中解的结构和动力学行为进行研究, 这与上述文献中的研究内容大不相同。

1 模型描述

主要探讨基于动力系统下 Caputo 型分数阶微分方程

$$\frac{d^\sigma x}{dt^\sigma} = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \frac{d^\sigma y}{dt^\sigma} = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \frac{d^\sigma z}{dt^\sigma} = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \quad (1)$$

其中: d^σ/dt^σ 为分数阶微分算子, σ 为导数阶数且属于 $(0, 1)$, t 为时间参数。显然, 若 $\sigma=1$, 分数阶动力系统(1)就变成了整数阶动力系统, 其平衡点的分类情况、精确解以及动力学行为早已被众多学者进行了较为系统和全面的研究, 故不再过多赘述。本文则主要研究分数阶三维线性系统的平衡点分类情况及动力学性质。此外, 由于高维动力系统的研究离不开系统的 V 函数, 即李雅普诺夫函数, 但当 $0 < \sigma < 1$ 时, 分数阶导数不满足复合函数的链式求导法则, 故获得高维分数阶动力系统的 V 函数十分困难。因此, 本文拟绕开系统的 V 函数的求解方法, 利用非奇异的线性变换将较为复杂的三维动力系统约化成相应的标准

收稿日期: 2023-11-06

基金项目: 重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0766); 重庆工贸职业技术学院校级科研项目(ZR202314)

作者简介: 张宏杰(1996—), 男, 重庆人, 助教, 硕士, 主要从事分数阶微分方程研究。E-mail: 905725493@qq.com

形式,再施行 Laplace 变换,同时借助 Mittag-Leffler 函数的性质,采取先求解,然后绘制分数阶系统空间相图的方法来研究线性三维分数阶自治系统在相空间中的动力学性质和平衡点类型。

记

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

则三维分数阶动力系统(1)可简写成

$$\frac{d^\sigma \vec{X}}{dt^\sigma} = \mathbf{A} \vec{X}.$$

当 \mathbf{A} 的行列式不为零时,原点 $O(0,0,0)$ 是分数阶三维动力系统(1)唯一奇点。根据矩阵 \mathbf{A} 的特征值,可分成特征值为不同实根、二重实根、三重实根以及虚数根 4 种情形。基于上述情形,本文将分别讨论系统(1)相应的 4 种标准型约化。此外,根据矩阵论相关知识,必定存在相应的可逆矩阵 \mathbf{T} ,能够满足 $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{J}_i (i=1,2,3)$,即

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \mathbf{J}_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \nu \\ 0 & -\nu & \mu \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\lambda, \lambda_i (i=1,2,3), \mu, \nu$ 均为实数。又由线性代数理论可知,通过非奇异的实线性变换

$$\alpha = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \beta = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, \gamma = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z$$

可将分数阶动力系统(1)简化成对应的标准型。

2 相空间结构和动力学性质

情形 1 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ 条件下,动力系统(1)的标准型为

$$\frac{d^\sigma \alpha}{dt^\sigma} = \lambda_1 \alpha, \frac{d^\sigma \beta}{dt^\sigma} = \lambda_2 \beta, \frac{d^\sigma \gamma}{dt^\sigma} = \lambda_3 \gamma, \quad (3)$$

不难发现,上述标准型的系数矩阵即为式(2)中 \mathbf{J}_1 。现对式(3)两边同时施加 Laplace 变换可得

$$s^\sigma E(s) - s^{\sigma-1} c_1 = \lambda_1 E(s), s^\sigma K(s) - s^{\sigma-1} c_2 = \lambda_2 K(s), s^\sigma M(s) - s^{\sigma-1} c_3 = \lambda_3 M(s), \quad (4)$$

式中 s 表示 Laplace 变换参数。不妨令 $c_1 = \alpha(0), c_2 = \beta(0), c_3 = \gamma(0)$ 均为初值,对式(4)两边施加 Laplace 逆变换可求得其解为

$$\begin{cases} \alpha(t) = c_1 E_\sigma(\lambda_1 t_\sigma) = c_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \\ \beta(t) = c_2 E_\sigma(\lambda_2 t_\sigma) = c_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_2 t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \\ \gamma(t) = c_3 E_\sigma(\lambda_3 t_\sigma) = c_3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_3 t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $E_\sigma(\lambda_i t_\sigma)$ 为 Mittag-Leffler 函数。把 t 看作参数,通过式(5)并结合函数敛散性可知,当 $\lambda_i < 0 (i = 1, 2, 3)$ 时, $E_\sigma(\lambda_i t_\sigma)$ 是收敛的,故当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $\alpha(t) \rightarrow 0, \beta(t) \rightarrow 0, \gamma(t) \rightarrow 0$,此时系统的平衡点是渐近稳定的;而当 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 时,函数 $E_\sigma(\lambda_i t_\sigma)$ 是发散的,即 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $\alpha(t) \rightarrow \infty, \beta(t) \rightarrow \infty, \gamma(t) \rightarrow \infty$,故系统的平衡点是不稳定的。此外,利用数学软件 Maple 能够详细绘制出情形 1 下 Caputo 分数阶三维动力系统(1)解的空间相图及轨线走势,如图 1 所示。由图 1 轨线的走势可以更加直观地验证上述结论的合理性。

将图 1(a)投影到二维平面上,投影下的平衡点均是渐近稳定的,且平衡点类型均为稳定结点。同理,由图 1(b)的二维投影可以发现,平衡点类型是不稳定结点。因此,当 $\lambda_i < 0 (i = 1, 2, 3)$ 时,称系统(1)的平

平衡点类型为相空间中的稳定结点;而 $\lambda_i > 0 (i=1,2,3)$ 时,称系统(1)的平衡点为相空间中的不稳定结点。

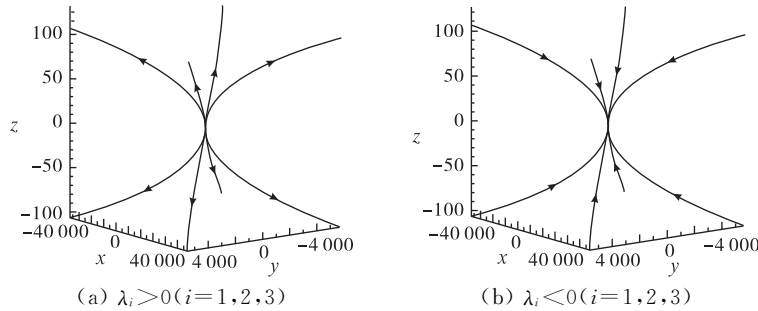


图 1 情形 1 下分数阶动力系统解的三维相图

情形 2 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ (即二重实根)时动力系统(1)的标准型为

$$\frac{d^\sigma \alpha}{dt^\sigma} = \lambda_1 \alpha, \frac{d^\sigma \beta}{dt^\sigma} = \lambda_2 \beta + \gamma, \frac{d^\sigma \gamma}{dt^\sigma} = \lambda_2 \gamma, \tag{6}$$

其系数矩阵即对应(2)式中 J_2 。与情形 1 类似,对式(6)两边同时施行 Laplace 变换及其逆变换可求得其解

$$\alpha(t) = c_1 E_\sigma(\lambda_1 t^\sigma), \beta(t) = c_2 E_\sigma(\lambda_2 t^\sigma) + c_3 t^\sigma E_\sigma^{(1)}(\lambda_2 t^\sigma), \gamma(t) = c_3 E_\sigma(\lambda_2 t^\sigma), \tag{7}$$

$E_\sigma^{(1)}(\lambda_2 t^\sigma)$ 为 Mittag-leffler 函数的一阶导数,其表达式为 $E_\sigma^{(1)}(\lambda_2 t^\sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(\lambda_2 t^\sigma)^k}{\Gamma[\sigma(k+1)+1]}$ 。

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 < 0$ 时,分析式(7)可以发现,若 $t \rightarrow \infty$,则 $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ 均趋于 0,故说明系统(1)的平衡点是稳定的,且是渐近稳定的;当 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 > 0$ 时,若 $t \rightarrow \infty$,则 $\alpha(t) \rightarrow \infty, \beta(t) \rightarrow \infty, \gamma(t) \rightarrow \infty$,说明系统(1)的零解在该条件下是不具备稳定性质的。情形 2 下的空间轨线的走势如图 2 所示。

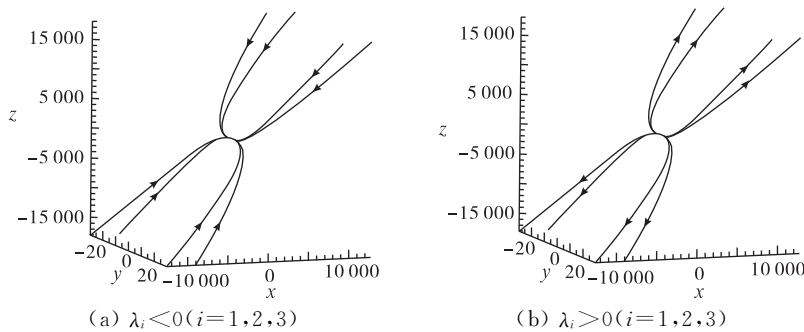


图 2 情形 2 下分数阶动力系统解的三维相图

情形 3 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ (即三重实根)时,动力系统(1)的标准型可分为两种类型:

(1) 动力系统中系数 $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ 均为 0 时,系统(1)为

$$\frac{d^\sigma x}{dt^\sigma} = a_1 x, \frac{d^\sigma y}{dt^\sigma} = b_2 y, \frac{d^\sigma z}{dt^\sigma} = c_3 z, \tag{8}$$

可以发现,分数阶微分方程组(8)已是标准型,故不需要再利用线性变换进行化简。通过对式(8)进行 Laplace 变换及其逆变换,求得其解为

$$\begin{cases} x(t) = c_1 E_\sigma(\lambda t^\sigma) = c_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \\ y(t) = c_2 E_\sigma(\lambda t^\sigma) = c_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \\ z(t) = c_3 E_\sigma(\lambda t^\sigma) = c_3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}. \end{cases} \tag{9}$$

由式(9)不难看出,当 $\lambda < 0$ 时, $x(t), y(t), z(t)$ 均趋于 $0 (t \rightarrow \infty)$, 则说明平衡点是渐近稳定的; 而当 $\lambda > 0$ 时, $x(t), y(t), z(t)$ 均趋于 $\infty (t \rightarrow \infty)$, 即说明平衡点是不稳定的。该情形下解的相空间轨线走势见图 3。

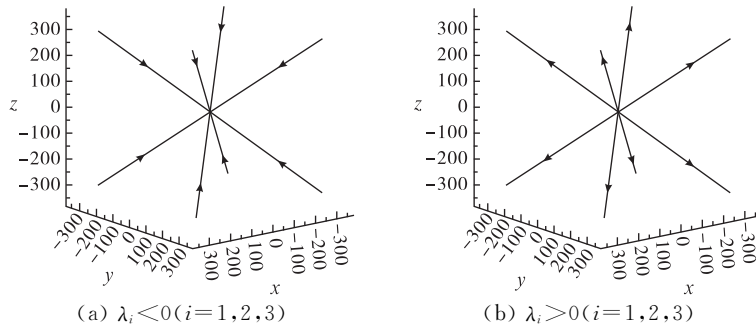


图 3 特征值为三重实根且常数均为零情形下分数阶动力系统解的三维相图

若将图 3 分别投影到二维坐标平面上(这里图像省略), 不难发现二维平面上该系统的平衡点类型均为临界结点。且当 $\lambda_i < 0 (i=1, 2, 3)$ 时, 该平衡点是渐近稳定的; 当 $\lambda_i > 0 (i=1, 2, 3)$ 时, 该平衡点不再具有稳定性。因此, 将该情形下系统(1)的空间奇点类型称为三维临界结点。

(2) 动力系统中系数 $a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2$ 均不为零时, 系统(1)的标准型为

$$\frac{d^\sigma \alpha}{dt^\sigma} = \lambda \alpha + \beta, \frac{d^\sigma \beta}{dt^\sigma} = \lambda \beta + \gamma, \frac{d^\sigma \gamma}{dt^\sigma} = \lambda \gamma, \tag{10}$$

对式(10)施加 Laplace 变换及其逆变换, 得到解

$$\alpha(t) = c_1 E_\sigma(\lambda t^\sigma) + c_2 t^\sigma E_\sigma^{(1)}(\lambda t^\sigma) + c_3 t^{2\sigma} E_\sigma^{(2)}(\lambda t^\sigma), \beta(t) = c_2 E_\sigma(\lambda t^\sigma) + c_3 t^\sigma E_\sigma^{(1)}(\lambda t^\sigma), \gamma(t) = c_3 E_\sigma(\lambda t^\sigma), \tag{11}$$

上式中函数 $E_\sigma^{(2)}(\lambda t^\sigma)$ 为 Mittag-Leffler 函数的二阶导数, 表达式为 $E_\sigma^{(2)}(\lambda t^\sigma) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma[\sigma(k+2)+1]}$ 。

由解(11)及函数敛散性不难得出, 当 $\lambda < 0$ 时, 在 $t \rightarrow \infty$ 的条件下, $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ 均趋于 0, 即系统(1)的平衡点是渐近稳定的; 而当 $\lambda > 0$ 时, 同样在 $t \rightarrow \infty$ 的条件下, $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ 均趋于 ∞ , 说明系统(1)的平衡点是不稳定的, 其轨线的空间走势如图 4 所示。

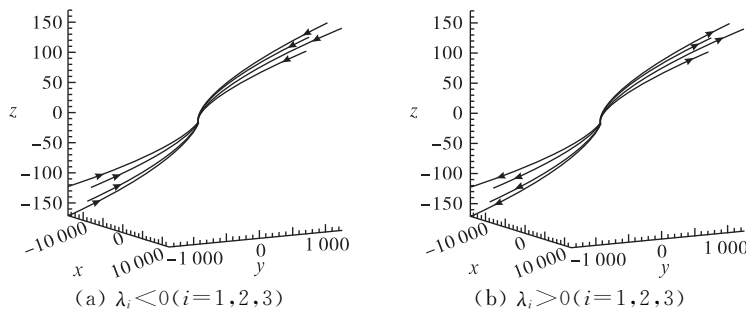


图 4 三重实根且常数不全为零情形下分数阶动力系统解的三维相图

不难看出, 若将图 4 投影到二维平面上, 则在二维平面上平衡的类型均为退化结点, 且当 $\lambda_i < 0$ 时, 该奇点是渐近稳定的; 反之, 当 $\lambda_i > 0$ 时, 该奇点不再具有稳定性。故此, 将此情形下系统(1)的空间奇点类型称为三维退化结点。

上述 3 种情形都是在 λ 值为实数的情况下进行讨论的, 以下就特征值为复数的情形进行分析。

情形 4 λ_1 为实数, λ_2 和 λ_3 为一对共轭复数情形下系统(1)的标准型为

$$\frac{d^\sigma \alpha}{dt^\sigma} = \lambda \alpha, \frac{d^\sigma \beta}{dt^\sigma} = \mu \beta + \nu \gamma, \frac{d^\sigma \gamma}{dt^\sigma} = -\nu \beta + \mu \gamma. \tag{12}$$

其中, $\lambda_1 = \lambda$ 为实数, $\lambda_2 = \mu + \nu i$ 和 $\lambda_3 = \mu - \nu i$ 为一对共轭复数, μ 和 ν 为任意常实数。对式(12)施行 Laplace 变换及其逆变换, 得其解为

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(t) &= c_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)}, \\ \beta(t) &= \frac{c_1}{\Gamma(1-2\sigma)} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)} (-1)^k (2u)^j (\mu^2 + \nu^2)^k \frac{(j+k)! t^{\sigma(2k+j)-1}}{j! k! \Gamma[\sigma(2k+j+2)]} + \\ &\quad \frac{c_2 \nu - c_1 \mu}{\Gamma(1-\sigma)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-2\sigma)} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)} (-1)^k (2u)^j (\mu^2 + \nu^2)^k \frac{(j+k)! t^{\sigma(2k+j+1)-1}}{j! k! \Gamma[\sigma(2k+j+2)]}, \\ \gamma(t) &= \frac{c_2}{\Gamma(1-2\sigma)} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)} (-1)^k (2u)^j (\mu^2 + \nu^2)^k \frac{(j+k)! t^{\sigma(2k+j)-1}}{j! k! \Gamma[\sigma(2k+j+2)]} + \\ &\quad \frac{c_1 \nu - c_2 \mu}{\Gamma(1-\sigma)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-2\sigma)} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\sigma)^k}{\Gamma(\sigma k + 1)} (-1)^k (2u)^j (\mu^2 + \nu^2)^k \frac{(j+k)! t^{\sigma(2k+j+1)-1}}{j! k! \Gamma[\sigma(2k+j+2)]}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

当 $\lambda < 0, \mu < 0$ 时, 根据解(13)及 Mittag-Leffler 函数的敛散性可知, 若 $t \rightarrow \infty$, 则有 $\alpha(t) \rightarrow 0, \beta(t) \rightarrow 0, \gamma(t) \rightarrow 0$, 故系统(1)的零解是稳定的; 而当 $\lambda > 0, \mu > 0$ 时, 若 $t \rightarrow \infty$, 有 $\alpha(t) \rightarrow \infty, \beta(t) \rightarrow \infty, \gamma(t) \rightarrow \infty$, 则系统(1)的平衡点是不稳定的, 其轨线的走势如图 5 所示。

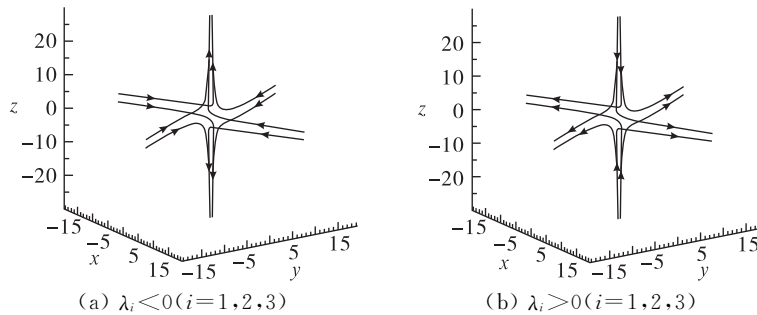


图 5 实数与一对共轭复数情形下分数阶动力系统解的空间相图

将图 5(a)进行投影, 如图 6 所示。可以发现, 图 6(a)在二维平面上奇点的类型为退化结点, 具有渐近稳定性; 而图 6(b)(c)的奇点类型均为鞍点, 具有不稳定性。基于上述性质, 将情形 4 条件下相空间奇点的类型称之为空间鞍-鞍-结型奇点, 且在三维空间中具有部分稳定的性质。

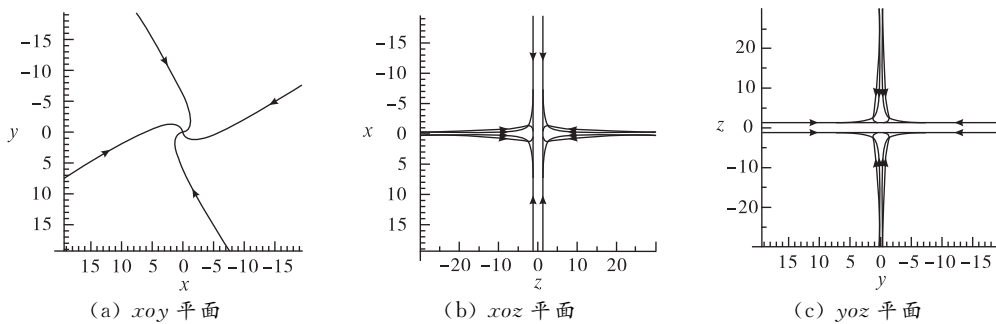


图 6 实数与一对共轭复数情形下分数阶动力系统解的二维投影图

3 小结

本研究着重探讨了 Caputo 形式下分数阶三维自治系统在相空间的动态特性, 包括系统在相空间中平衡点的变化规律及其附近轨线的动态特征。通过采用一系列的非奇异线性变换、Laplace 变换, 求解了 Caputo 型分数阶微分方程组经线性变换后的解析解, 并根据 Mittag-Leffler 函数的收敛性进一步研究了分数阶三维自治系统解的多种特性。最后, 利用数学软件 Malpe 绘制了该系统轨迹分布的空间相图, 揭示了系统的动力学行为及其特征。此外, 研究还发现 Caputo 形式下的分数阶三维动力系统中不存在中心型平衡点和闭轨道, 因而也无周期解, 这一发现为分数阶自治微分方程组不存在周期解提供了新的证据。

参考文献:

- [1] 张慧. 求解非线性分数阶偏微分方程精确解的几种方法[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(3):313-317.
- [2] 杨娟, 冯庆江. 应用 Riccati 展开法求非线性分数阶偏微分方程的新精确解[J]. 应用数学, 2018, 31(2):357-363.
- [3] 李慧敏, 顾海波. 利用模糊 Laplace 变换的方法求解模糊分数阶积分微分方程[J]. 滨州学院学报, 2022, 38(4):56-63.
- [4] 赵微, 高扬. 带有分数阶导数边值条件的分数阶微分方程正解的存在性[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2022, 54(6):95-101.
- [5] 李晓艳, 任玮, 谢地等. 一类 ψ -Caputo 分数阶微分方程解的存在性和 Ulam-Hyers 稳定性[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2023, 47(1):8-16.
- [6] 周蜜, 李成福. 一类 p -Laplacian 算子分数阶 q -差分系统边值问题正解的存在[J]. 滨州学院学报, 2018, 34(2):44-50.
- [7] 陈景华, 陈雪娟. Riesz 空间分布阶的分数阶扩散方程的数值模拟[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2021, 26(2):97-103.
- [8] 孙春艳, 徐伟. 随机分数阶微分方程初值问题基于模拟方程法的数值求解[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(10):1092-1099.
- [9] 马玉田. 分数阶动力系统的几个问题[D]. 上海: 上海大学, 2014.
- [10] 罗静, 冀小明. 分数阶二维线性系统的奇点类型及其邻域内的轨道性态[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2022, 48(2):207-215.

Structure of Space and Dynamic Behavior of Solutions to The Linear Caputo-Fractional 3-Dimension Autonomous Systems

ZHANG Hongjie

(College of Basic Education, Chongqing Industry & Trade Polytechnic,
Chongqing 408000, China)

Abstract: Based on the classification of coefficient matrix eigenvalues, a series of linear transformations and Laplace transformations are adopted to study the Caputo-type fractional-order three-dimensional dynamical system, combining with the convergence and divergence of the Mittag-Leffler function. The phase space structure and dynamical properties of the solution to the fractional-order three-dimensional dynamical system are obtained.

Keywords: eigenvalues; Mittag-Leffler function; fractional order dynamical systems; phase space structure; dynamical properties.

(责任编辑: 贾晶晶)