

【工程与技术研究】

一类含常数项的混沌系统在未知参数下的同步

周群利^{1,2}, 白彩波¹

(1. 芜湖职业技术学院 电气与自动化学院, 安徽 芜湖 241006;

2. 中国科学院 合肥智能机械研究所, 安徽 合肥 230031)

摘要: 研究了一个新的含有常数项的混沌系统在参数未知情况下的修正函数投影同步问题。对新的含有常数项的混沌系统从平衡点的稳定性、耗散性、poincare 映射、功率谱及初值敏感性 5 个方面进行了特性分析。基于修正函数投影同步方法, 设计了有效的控制输入及参数自适应律, 根据 Lyapunov 函数稳定性定理从理论上证明修正函数投影同步误差系统在原点的渐近稳定性, 从而实现了新混沌系统的修正函数投影同步控制。数值模拟仿真证明了同步方法的正确性, 该同步方法可以应用于混沌保密通信的研究中。

关键词: 混沌系统; Rössler 系统; 修正函数投影同步; 常数项; 平衡点

中图分类号: O 415.5 **文献标识码:** A **DOI:** 10.13486/j.cnki.1673-2618.2024.02.013

由于混沌系统具有伪随机性及对初值敏感性的特点, 因此在保密通信中具有较好的应用前景^[1]。近年来, 人们发现了很多新的混沌系统。贾美美等^[2]利用对数函数序列构造了一个可以产生多涡卷的新混沌系统, 并将其应用于微弱信号检测; Khan^[3]对提出的新分数阶混沌系统从两个分数算子 Caputo-Fabrizio 和 Atangana-Baleanu 导数的意义上进行了分析; 鲜永菊等^[4]在 Bao 系统基础上构造了一个新的混沌系统并分析了其混沌特性。这些新混沌系统对混沌理论进行了扩充, 为后序研究奠定了基础。混沌同步是混沌保密通信的基础^[5-7], 其类型有完全同步、自适应同步、滞后同步、函数投影同步、修正函数投影同步(MFPS)等^[8-13]。MFPS 将函数比例因子升级为函数比例因子矩阵, 使其更加具有普遍性^[14]。

目前, 同步控制混沌系统结构多数是相同的, 而对于相异结构的混沌系统的同步控制研究得较少^[15]。实际上, 多数控制系统的结构是相异的, 因此, 对相异结构混沌系统的同步研究具有更广阔的应用前景^[16-17]。文献^[18]在现有的混沌模型基础上构建了一个含常数项的三维自治混沌系统, 重点研究了该系统在单参数变化时的相图、分岔图及 Lyapunov 指数谱。本文从含常数项的混沌系统平衡点的稳定性、耗散性、poincare 映射、功率谱及初值敏感性方面对这一类新的混沌系统进行了特性分析, 然后研究了新混沌系统在参数未知情况下与不同结构混沌系统的 MFPS。

1 混沌系统模型及特性分析

1.1 混沌系统数学模型

文献^[18]构建的系统模型如下

收稿日期: 2023-05-12

基金项目: 安徽省高校优秀拔尖人才培养项目(gxgnfx2021190); 安徽高校自然科学研究重点项目(KJ2020A0911)

第一作者简介: 周群利(1978—), 女, 陕西西安人, 副教授, 硕士, 主要从事非线性系统控制及同步研究。

E-mail: zhouqunli2011@163.com

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y-x), \\ \dot{y} = qy-xz, \\ \dot{z} = x^2-rz+s. \end{cases} \quad (1)$$

当参数 $p=38, q=20, r=6, s=15$ 时, 系统呈混沌状态。当初值取 $[x \ y \ z]^T = [0.01 \ 0.01 \ 0.01]^T$ 时, 系统状态时域图、相轨迹如图 1 所示。从图 1 可以看出, 系统状态变化非周期, 杂乱无章, 相轨迹反映了状态变量的运行轨迹绕着两个子吸引子旋转, 表现出总体吸引、局部排斥、有界和非周期的特征。

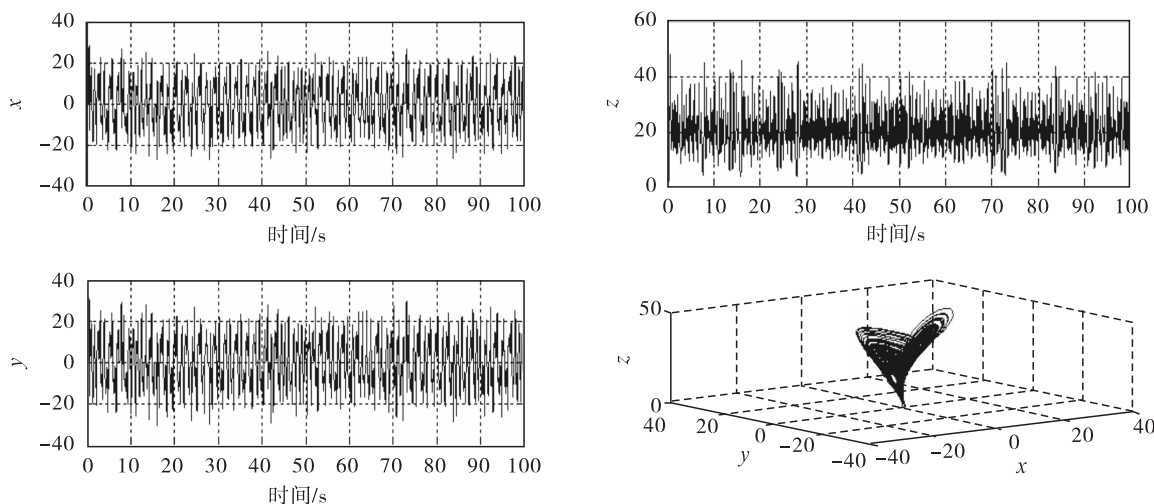


图 1 系统状态时域图及相轨迹图

1.2 系统特性分析

1.2.1 系统平衡点及稳定性分析

令系统(1)中各方程左端为零, 可求得系统(1)的平衡点为 $S_0 = (0, 0, -2.5), S_1 = (3\sqrt{15}i, 3\sqrt{15}i, 20), S_2 = (-3\sqrt{15}i, -3\sqrt{15}i, 20)$ 。系统有 3 个平衡点, 则 Jacobi 矩阵和系统在 S_0 处的 Jacobi 矩阵分别为

$$J = \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ -z & q & -x \\ 2x & 0 & -r \end{bmatrix}, J_0 = \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ -z_0 & q & -x_0 \\ 2x_0 & 0 & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & 38 & 0 \\ 2.5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}。$$

根据特征方程 $|\lambda I - J_0|$, 可求出系统在平衡点 S_0 处的特征值, 分别为 $\lambda_1 = -39.5941, \lambda_2 = 21.5941, \lambda_3 = -6$ 。同理可求得平衡点 S_1 处的特征值, 分别为 $\lambda_1 = -19.4549 + 17.5967i, \lambda_2 = -19.4549 - 17.5967i, \lambda_3 = 14.9098$ 。平衡点 S_2 处的特征值, 分别为 $\lambda_1 = -19.4549 + 17.5967i, \lambda_2 = -19.4549 - 17.5967i, \lambda_3 = 14.9098$ 。由于系统 3 个平衡点处的特征值均具有正实部的根, 因此 3 个平衡点均不稳定, 为不稳定的鞍点。

1.2.2 耗散性分析

$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -p + q - r$, 当系统参数 $p=38, q=20, r=6, s=15$ 时, $\nabla V < 0$, 说明系统(1)为耗散性的, 且以 $\frac{dV}{dt} = e^{-p+q-r}$ 的指数速率收敛, 即一个体积元在 t 时, 收敛为 $V_0 = e^{(-p+q-r)t}$ 。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率收敛到 0, 所有的轨线最终被限制在体积为 0 的极限点上, 且系统的渐近动力学行为会固定在某一吸引子上。

1.2.3 Poincaré 映射

在研究非线性系统时, 利用 Poincaré 截面法可以有效降低非线性系统的分析难度。因为该方法不仅可以降低非线性系统的维数, 还可以直观地反映系统的内部结构^[19]。以 $z=0$ 平面为 Poincaré 截面时, 分别做出了 $s=15, s=30$ 时的 Poincaré 映射图(图 2)。从图 2 可以看出, 该系统在上述 s 的取值时, 其

poincare截面上为一些成片的具有分形结构的密集点,这是典型的混沌特征,说明系统(1)具有混沌特性。

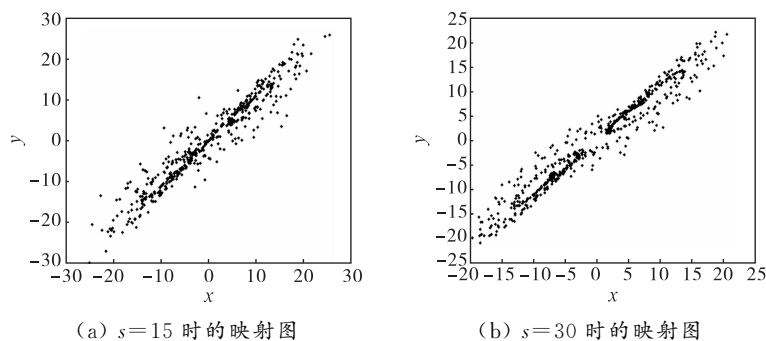


图 2 poincare 映射图

1.2.4 系统功率谱

功率谱表示信号功率随着频率的变化情况^[20]。根据傅立叶变换理论,当系统为非周期运动时,其频谱是连续的^[21]。混沌是属于非周期的,所以混沌信号的功率谱是连续的。取参数 $p=38, q=20, r=6, s=15$ 时,系统(1)关于 x, y, z 的功率谱图如图 3 所示。从图 3 可以看出,功率谱为连续谱,其中包含了低频分量和直流分量,出现宽带噪声,这是典型的混沌特征。

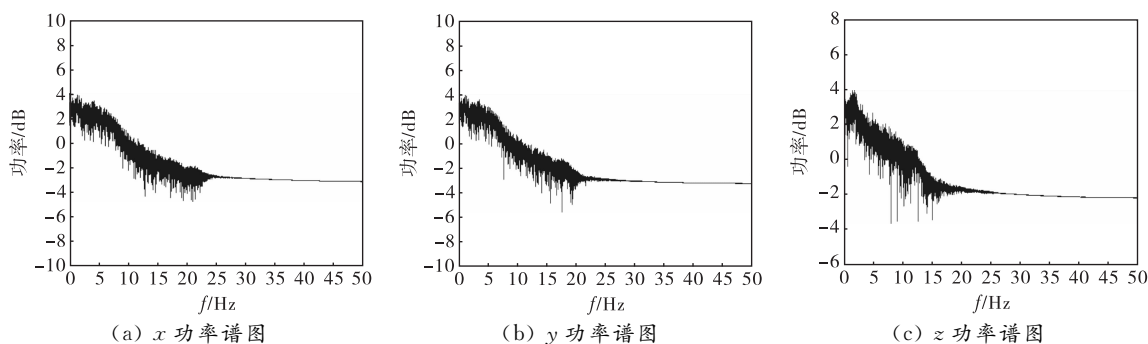


图 3 系统功率谱

1.2.5 初值敏感性

系统(1)在上述参数取值时,初值选为 $[x(0), y(0), z(0)]^T = [2.0010, 5, -4]^T$,为了观察系统(1)对初值的敏感性,改变状态变量 x 的初值 $x(0)$,而状态变量 y 和 z 的初值 $y(0)$ 和 $z(0)$ 不变。选取另两组系统初值 $[x(0), y(0), z(0)]^T = [2.0011, 5, -4]^T, [x(0), y(0), z(0)]^T = [2.0012, 5, -4]^T$ 。在上述 3 组初值下系统状态变量随时间变化曲线如图 4 所示。

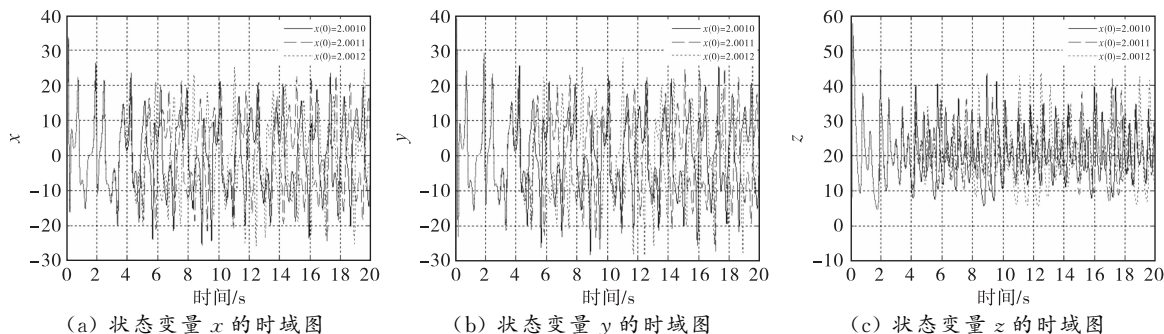


图 4 系统状态的时域图

从图 4 可以看出,当状态变量中仅 x 的初值发生微小变化时,系统状态变量的轨迹在很短时间内将出现较大的差异,体现了系统(1)对状态变量初值良好的敏感性。

2 同步方法及实现

2.1 修正函数投影同步方法

考虑2个 n 维非线性动力系统

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2)$$

$$\dot{y} = g(t, y) + u. \quad (3)$$

式中 $x, y \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量; f, g 是连续的向量函数。取式(2)作为驱动系统,式(3)为被控的响应系统。式(3)中 u 是待设计的控制器。同步误差定义为

$$e_i(t) = y_i(t) - \alpha_i(t)x_i(t), i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

式中 $\alpha_i(t) \neq 0 (i = 1, 2, 3)$ 为修正函数比例因子,其连续有界且可微。其中 $\alpha(t) = \text{diag}(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ 。在 u 的作用下当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y - \alpha x\| = 0$ 时,式(3)与式(2)达到同步。此时,式(3)与式(2)的同步问题即转化为同步误差在原点的稳定问题。

2.2 参数未知情况下,不同结构混沌系统的同步实现

选取著名的Rössler系统作为驱动系统,设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,模型如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c). \end{cases} \quad (5)$$

式中 x_1, x_2, x_3 为状态变量。当系统参数 $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ 时,系统出现混沌现象。

设系统(1)中 $(x, y, z)^T = (y_1, y_2, y_3)^T$,对系统(1)施加控制输入后作为响应系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = p(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 = qy_2 - y_1y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1^2 - ry_3 + s + u_3. \end{cases} \quad (6)$$

式中 y_1, y_2, y_3 为状态变量。设 $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ 为系统控制输入函数。

考虑式(5)和式(6)均为参数未知的系统,根据式(4),同步误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = p(y_2 - y_1) + u_1 - \dot{\alpha}_1 x_1 - \alpha_1(-x_2 - x_3), \\ \dot{e}_2 = qy_2 - y_1y_3 + u_2 - \dot{\alpha}_2 x_2 - \alpha_2(x_1 + ax_2), \\ \dot{e}_3 = y_1^2 - ry_3 + s + u_3 - \dot{\alpha}_3 x_3 - \alpha_3[b + x_3(x_1 - c)]. \end{cases}$$

定理1 对于式(5)和式(6),设计控制输入

$$\begin{cases} u_1 = \dot{\alpha}_1 x_1 - \tilde{p}y_2 + \tilde{p}y_1 + \alpha_1(-x_2 - x_3) - k_1 e_1, \\ u_2 = -\tilde{q}y_2 + y_1y_3 + \dot{\alpha}_2 x_2 + \alpha_2 x_1 + \alpha_2 \tilde{a}x_2 - k_2 e_2, \\ u_3 = -y_1^2 + \tilde{r}y_3 - \tilde{s} + \dot{\alpha}_3 x_3 + \alpha_3 \tilde{b} + \alpha_3 x_3 x_1 - \alpha_3 x_3 \tilde{c} - k_3 e_3, \end{cases} \quad (7)$$

及参数自适应律

$$\begin{cases} \dot{\tilde{a}} = -\dot{\alpha}_2 x_2 e_2 - k_4 e_a, \dot{\tilde{b}} = -\alpha_3 e_3 - k_5 e_b, \\ \dot{\tilde{c}} = \alpha_3 x_3 e_3 - k_6 e_c, \dot{\tilde{p}} = (y_2 - y_1)e_1 - k_7 e_p, \\ \dot{\tilde{q}} = y_2 e_2 - k_8 e_q, \dot{\tilde{r}} = -y_3 e_3 - k_9 e_r, \\ \dot{\tilde{s}} = e_3 - k_{10} e_s. \end{cases} \quad (8)$$

在设计控制输入 $U = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ 及参数自适应律式(8)作用下,式(5)和式(6)可实现MFPS。式(7)

中 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$ 分别为参数 a, b, c, p, q, r, s 的估计值。式(8)中, $k_i > 0 (i=1, 2, \dots, 10)$ 为常数, $e_a = \tilde{a} - a, e_b = \tilde{b} - b, e_c = \tilde{c} - c, e_p = \tilde{p} - p, e_q = \tilde{q} - q, e_r = \tilde{r} - r, e_s = \tilde{s} - s$ 。

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V(e_1, e_2, e_3, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{2} (e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_p^2 + e_q^2 + e_r^2 + e_s^2),$$

式中, $\mathbf{e}^T = [e_1 \ e_2 \ e_3]$ 。对 V 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1(-e_p y_2 + e_p y_1 - k_1 e_1) + e_2(-e_q y_2 + \alpha_2 x_2 e_a - k_2 e_2) + e_3(e_r y_3 - e_s + \alpha_3 e_b - \alpha_3 x_3 e_c - k_3 e_3) + \\ & e_a(-\alpha_2 x_2 e_2 - k_4 e_a) + e_b(-\alpha_3 e_3 - k_5 e_b) + e_c(\alpha_3 x_3 e_3 - k_6 e_c) + e_p[(y_2 - y_1)e_1 - k_7 e_p] + e_q(y_2 e_2 - k_8 e_q) + \\ & e_r(-y_3 e_3 - k_9 e_r) + e_s(e_3 - k_{10} e_s) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_a^2 - k_5 e_b^2 - k_6 e_c^2 - k_7 e_p^2 - k_8 e_q^2 - k_9 e_r^2 - k_{10} e_s^2 < 0. \end{aligned}$$

构造的 Lyapunov 函数 $V > 0$, 而当 $k_i (i=1 \sim 10)$ 都非负时 $\dot{V} < 0$ 成立。根据 Lyapunov 函数稳定性定理可知, MFPS 误差系统在原点是渐近稳定的, 在设计控制器 \mathbf{U} 及参数自适应律作用下式(5)和式(6)实现了 MFPS。

3 数值仿真

对于参数未知的式(5), 选取初值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (0.2, 0.4, -1)^T$ 。式(6)的初值为 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))^T = [-0.1 \ 1.3 \ 2.5]^T, (\tilde{a}(0), \tilde{b}(0), \tilde{c}(0), \tilde{p}(0), \tilde{q}(0), \tilde{r}(0), \tilde{s}(0))^T = (0.5, 0.3, 5, 30, 15, 10, 13)^T, k_i = 0.8 (i=1, 2, \dots, 10)$, 修正函数比例因子 $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))^T = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t))^T$ 。同步误差曲线如图 5 所示。式(5)的待估计参数收敛曲线如图 6 所示。

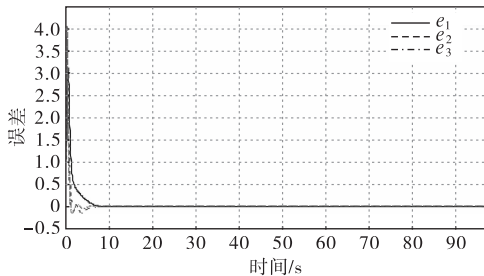


图 5 式(5)和式(6)的同步误差曲线

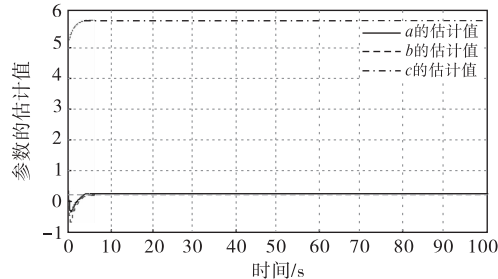


图 6 式(5)待估计参数收敛曲线

式(6)的待估计参数收敛曲线如图 7 所示。从图 5 可以看出在经历短时间的波动后, 式(5)与式(6)的同步误差逐渐趋于 0 并保持恒定, 即在设计的控制输入及参数自适应律作用下, 两个系统达到 MFPS。由图 6 及图 7 可见该方法对驱动系统及响应系统中的参数均能够实现准确辨识。当增大 k_i 值时, 系统间同步的速度加快, 同步误差收敛于 0 的时间将缩短, 参数趋近于稳定值的时间也变短。

图 8~10 分别为响应系统状态变量 y_1 与 $\alpha_1(t)x_1, y_2$ 与 $\alpha_2(t)x_2, y_3$ 与 $\alpha_3(t)x_3$ 的同步曲线。

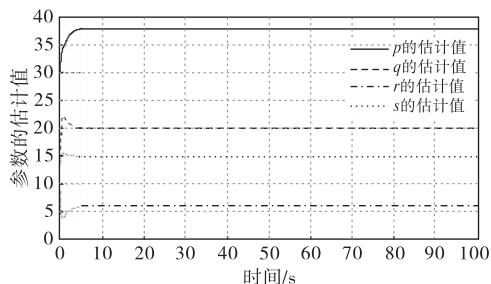


图 7 式(6)待估计参数收敛曲线

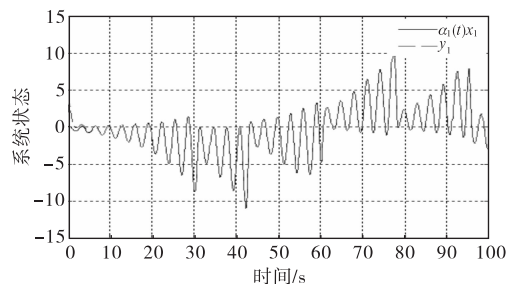


图 8 响应系统状态变量 y_1 与 $\alpha_1(t)x_1$ 的同步曲线

由图 8~10 可以看出, 经过短短几秒时间, 在设计控制器及参数自适应律作用下, 式(5)和式(6)实

现了 MFPS。

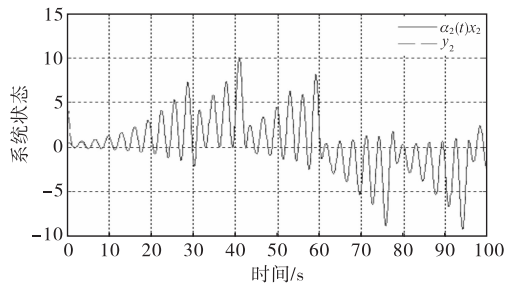


图9 响应系统状态变量 y_2 与 $\alpha_2(t)x_2$ 的同步曲线

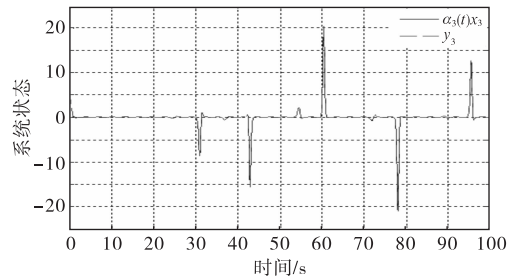


图10 响应系统状态变量 y_3 与 $\alpha_3(t)x_3$ 的同步曲线

4 结论

Rössler 系统作为驱动系统,施加控制的新混沌系统作为响应系统,在设计控制输入及参数自适应律作用下,基于 Lyapunov 函数稳定性定理从理论上证明 MFPS 误差系统在原点的渐近稳定性,从而实现了驱动系统与响应系统状态变量的 MFPS 控制,仿真结果证明了该方法的有效性。下一步工作将考虑系统在外扰动时的同步问题,并尝试将同步结果应用于混沌保密通信的模拟研究中。

参考文献:

- [1] 时帅帅,刘立才,杜传红.新混沌系统分析及其同步控制[J].工程数学学报,2022,39(5):709-724.
- [2] 贾美美,蒋浩刚,李文静.新 Chua 多涡卷混沌吸引子的产生及应用[J].物理学报,2019(13):130503.
- [3] KHAN M A. The dynamics of a new chaotic system through the Caputo-Fabrizio and Atanagun-Baleanu fractional operators[J]. Advances in mechanical engineering, 2019, 11(7): 1-12.
- [4] 鲜永菊,扶坤荣,吴周青,等.一个新三维混沌系统及其自适应滑模同步控制[J].重庆邮电大学学报(自然科学版),2020,32(2):278-286.
- [5] 刘红军.混沌理论在一次一密图像加密及保密通信系统中的应用研究[D].大连:大连理工大学,2014.
- [6] 樊春霞.混沌保密通信系统的研究[D].南京:南京航空航天大学,2004.
- [7] ABDULLAH H A, ABDULLAH H N, MAHMOUD AL-JAWHER W A. A hybrid chaotic map for communication security applications[J]. International journal of communication systems, 2020, 33(4): e4236.
- [8] 杜洪越.混沌函数投影同步理论及其在保密通信中的应用[M].哈尔滨:黑龙江大学出版社,2012.
- [9] YADAV V K, DAS S, BHADRAURIA B S, et al. Stability analysis, chaos control of a fractional order chaotic chemical reactor system and its function projective synchronization with parametric uncertainties[J]. Chinese journal of physics, 2017, 55(3): 594-605.
- [10] BEHINFARAZ R, GHAEMI S, KHANMOHAMMADI S. Adaptive synchronization of new fractional-order chaotic systems with fractional adaption laws based on risk analysis[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2019, 42(6): 1772-1785.
- [11] XU Y, WU Y B, LI W X. Finite-time lag synchronization of coupled reaction-diffusion systems with time-varying delay via periodically intermittent control[J]. Applicable analysis, 2019, 98(9): 1660-1676.
- [12] EI-DESSOKY M M, ALZHRANI E O, ALMOHAMMADI N A. Control and adaptive modified function projective synchronization of Liu chaotic dynamical system[J]. Journal of applied analysis and computation, 2019, 9(2): 601-614.

- [13] SHI X R, WANG Z L, YUN W, et al. Complete synchronization of 4D Chua system via linear controllers[J]. Journal of information and computing science, 2017, 12(3): 195-202.
- [14] 王峰, 管俊彪. 未知参数下新 KBK 系统的修正函数投影同步[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版), 2020, 40(5): 98-102.
- [15] 杨益飞, 骆敏舟, 张宏, 等. 永磁同步电动机系统与系统的自适应同步[J]. 制造技术与机床, 2020(1): 103-106.
- [16] 李善强, 彭秀艳, 李强. 多个时滞混沌系统自适应有限时间同步控制[J]. 电机与控制学报, 2019(6): 3-9.
- [17] 李东, 邓良明, 杜永霞, 等. 分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌系统的异结构同步[J]. 物理学报, 2012(5): 050502.
- [18] 王艳玲, 雷腾飞, 张瑜, 等. 一类含有常数项新混沌系统的动力学分析与仿真[J]. 济宁学院学报, 2018, 39(2): 8-12.
- [19] 张识, 王攀, 张瑞浩, 等. 选取任意庞加莱截面的新方法[J]. 物理学报, 2020(4): 040503.
- [20] 徐阳. 一个新光滑超混沌系统的动力学行为研究与仿真[J]. 内蒙古科技大学学报, 2019(4): 310-315.
- [21] 蔡冬梅, 王昆, 贾鹏, 等. 功率谱反演大气湍流随机相位屏采样方法的研究[J]. 物理学报, 2014(10): 104217.

Synchronization of a Class of Chaotic Systems with Constant Terms under Unknown Parameters

ZHOU Qunli, BAI Caibo

1. Institute of Electrical and Automation, Wuhu Institute of Technology, Wuhu 241006, China;
2. Hefei Institute of Intelligent Machines, Chinese Academy of Science, Hefei 230031, China)

Abstract: The synchronization of a new chaotic system with constant terms under the unknown parameters is studied. The properties of a new chaotic system with constant terms are analyzed from five aspects: stability, dissipation, poincare mapping, power spectrum and initial sensitivity of the equilibrium point. Based on the modified function projection synchronization method, the effective control input and parameter adaptive law are designed. According to Lyapunov function stability theorem, the asymptotic stability of the modified function projection synchronization error system at the origin is proved theoretically. Thus, the synchronization control of modified function projection for new chaotic system is realized. Numerical simulation proves the correctness of the synchronization method, which can be applied to the research of chaotic secure communication.

Keywords: chaotic system; system; modified function projection synchronization; constant terms; equilibrium point

(责任编辑:王新亮)