【微分方程与动力系统研究】

具有双线性发生率的随机酗酒模型

刘　娟,潘玉荣,李　娜

(蚌埠学院 数理学院,安徽 蚌埠 233030)

摘　要:利用随机微分方程定性分析的方法,研究了一类具有双线性发生率的随机酗酒模型。将接触率系数的随机扰动引入确定型酗酒模型,研究了随机酗酒模型正解的存在性及唯一性。通过计算白噪声强度,得到了酗酒群体 $D(t)$ 消失的充分性条件。研究结果显示,当外部干扰足够大时,酗酒群体、正在戒酒者、永久戒酒者都将消失。

关键词:白噪声;随机酗酒模型;Itô 公式;强大数定律;正解

中图分类号:O 175　　**文献标识码**:A　　DOI:10.13486/j.cnki.1673-2618.2024.02.005

0　引言

传染病动力学是生物数学的重要组成部分,利用传染病动力学中的仓室理论可以研究现实生活中的众多现象[1-6]。酗酒问题是现代社会广泛存在的实际问题,过度饮酒会带来许多严重的后果。利用仓室模型的思想,能够对酗酒现象进行建模,并利用微分方程理论研究酗酒模型的动力学性质[7-9]。近年来,在传染病模型的基础上,许多学者利用仓室理论建立了现实生活中的酗酒模型,并利用动力学方法研究了模型的一些性质。在建立的酗酒模型中,大多为确定型模型[10]。但在研究酗酒问题时,外界干扰也是一个不可忽略的因素,因此需要利用随机微分方程理论建立酗酒模型。文献[11]研究了确定型酗酒模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=A-\beta S(t)D(t)-\mu S(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)D(t)-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)D(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\delta D(t)-(\mu+\varepsilon_2+\lambda)Q(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma D(t)+\lambda Q(t)-\mu R(t)。\end{cases}$$

该酗酒模型中,$S(t)$表示不饮酒或适度饮酒群体在时刻 t 的数量,代表疑似酗酒者;$D(t)$表示过度饮酒以至于达到酗酒程度的群体在时刻 t 的数量;$Q(t)$表示已经意识到大量饮酒的危害并采取措施积极戒酒的群体在时刻 t 的数量;$R(t)$表示通过治疗已经戒除酒瘾的群体在时刻 t 的数量,代表永久戒酒者。A 为 $S(t)$的常数输入率,假设模型中四类群体的自然死亡率相同(记为 μ),ε_1 和 ε_2 分别为 $D(t)$和 $Q(t)$两类群体由于过量饮酒导致的死亡率。β 为 $S(t)$与 $D(t)$两类群体的接触率系数。γ,λ 分别表示 $D(t)$和 $Q(t)$两

收稿日期:2023-05-09

基金项目:国家自然科学基金项目(12061033);安徽省高校自然科学研究重点项目(KJ2021A1128);蚌埠学院自然科学研究项目(2021ZR08,2022ZR03)

第一作者简介:刘　娟(1979—),女,江苏宿迁人,教授,硕士,主要从事微分方程、生物数学研究。

E-mail:my7216@163.com

类群体转化为 $R(t)$ 的比例系数,δ 表示 $D(t)$ 群体转化 $Q(t)$ 群体的比例系数。

在文献[11]的基础上,考虑到确定型模型的不足之处,本文在原模型中引入白噪声使之变成随机模型,并将白噪声的影响体现在接触率 β 中,即 $\beta\mathrm{d}t\to\beta\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B(t)$。式中,$\sigma^2$ 为噪声强度,$B(t)$ 为标准的布朗运动。由此可得利用随机微分方程表示的酗酒模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=[A-\beta S(t)D(t)-\mu S(t)]\mathrm{d}t-\sigma S(t)D(t)\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}D(t)=[\beta S(t)D(t)-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)D(t)]\mathrm{d}t+\sigma S(t)D(t)\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}Q(t)=[\delta D(t)-(\mu+\varepsilon_2+\lambda)Q(t)]\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}R(t)=[\gamma D(t)+\lambda Q(t)-\mu R(t)]\mathrm{d}t,\end{cases}\tag{1}$$

以下主要研究该模型的动力学性质,包括随机酗酒模型正解的存在性及酗酒群体、正在戒酒者群体、永久戒酒者群体何时消失。

1　随机模型正解的存在性

微分方程具有丰富的动力系统性质,全局正解是研究随机微分方程性质的首要条件,因此首先讨论模型(1)是否存在正解。由随机微分方程理论知,若系统满足局部利普希茨条件和线性增长条件,则其具有唯一的正解。下面验证模型(1)正解的存在性。

定理 1　当 $t\geqslant 0$ 时,对于任意的初始条件 $X(0)=(S(0),D(0),Q(0),R(0))$,模型(1)都有唯一的正解,且该解以概率 1 存在于 $\mathbf{R}_+^4$ 中。

证明　通过计算可知模型(1)满足局部利普希茨条件,故不论 $X(0)$ 取值如何,模型(1)存在唯一的局部解 $X(t)(t\in[0,\tau_e])$,在随机微分方程中,τ_e 表示模型的爆破时间。下证 $X(t)(t\in[0,\tau_e])$ 是模型(1)的全局正解,只要证明 $\tau_e=\infty$ a. s. ,就能证明该结论。

假设存在正数 $k_0\geqslant 1$,能使 $(S(0),D(0),Q(0),R(0))$ 都在区间 $[\frac{1}{k_0},k_0]$ 内,再设 $k\geqslant k_0$,定义停时 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e]:\min(S(t),D(t),Q(t),R(t))\leqslant\frac{1}{k}$ 或 $\max(S(t),D(t),Q(t),R(t))\geqslant k\}$,规定 $\inf\varnothing=\infty$。由停时含义知 τ_k 是 k 的单调增函数,设 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$,得 $\tau_\infty=\tau_e$ a. s. ,如能证明 $\tau_\infty=\infty$,则 $\tau_e=\infty$ 且 $X(t)\in\mathbf{R}_+^4$ $(t\geqslant 0)$。为了证明 $\tau_\infty=\infty$,利用反证法的思想,假设 $\tau_\infty\neq\infty$,则存在正数 $T>0$ 及 $\varepsilon\in(0,1)$ 满足不等式 $P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon$,且存在正数 $k_1\geqslant k_0$,对所有的正数 $k\geqslant k_1$,满足 $P\{\tau_k\leqslant T\}>\varepsilon$。将模型(1)中的变量相加,可得

$$\mathrm{d}(S+D+Q+R)=[A-\mu(S+D+Q+R)-\varepsilon_1 D-\varepsilon_2 Q]\mathrm{d}t\leqslant[A-\mu(S+D+Q+R)]\mathrm{d}t。$$

由方程初值 $X(0)=(S(0),D(0),Q(0),R(0))$,可求得

$$S(t)+D(t)+Q(t)+R(t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{A}{\mu},S(0)+D(0)+Q(0)+R(0)\leqslant\dfrac{A}{\mu},\\ S(0)+D(0)+Q(0)+R(0),S(0)+D(0)+Q(0)+R(0)>\dfrac{A}{\mu},\end{cases}$$

则当 $S(0)+D(0)+Q(0)+R(0)\leqslant\frac{A}{\mu}$ 时,有 $S(t)+D(t)+Q(t)+R(t)\leqslant\frac{A}{\mu}:=M$。

定义 $V(S,D,Q,R)=(S-1-\ln S)+(D-1-\ln D)+(Q-1-\ln Q)+(R-1-\ln R)$,由函数 $u-1-\ln u\geqslant 0,\forall u>0$ 知 $V(S,D,Q,R)$ 是非负的函数。

令 $T>0$,则对任意的 $t:0\leqslant t\leqslant\tau_k\wedge T$,通过 Itô 公式可得

$$\mathrm{d}V(S,D,Q,R)=(1-\frac{1}{S})\mathrm{d}S+\frac{1}{2S^2}(\mathrm{d}S)^2+(1-\frac{1}{D})\mathrm{d}D+\frac{1}{2D^2}(\mathrm{d}D)^2+(1-\frac{1}{Q})\mathrm{d}Q+(1-\frac{1}{R})\mathrm{d}R=$$

$$[A-\mu(S+D+Q+R)-\varepsilon_1 D-\varepsilon_2 Q]\mathrm{d}t-\left(\frac{A}{S}-\beta D-\mu\right)\mathrm{d}t+\sigma D\mathrm{d}B(t)-[\beta S-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)]\mathrm{d}t-$$

$$\sigma S\mathrm{d}B(t)-\left[\frac{\delta D}{Q}-(\mu+\varepsilon_2+\lambda)\right]\mathrm{d}t-\left(\frac{\gamma D}{R}+\frac{\lambda Q}{R}-\mu\right)\mathrm{d}t+\frac{\sigma^2(D^2+S^2)}{2}\mathrm{d}t=$$

$$[A-\mu(S+D+Q+R)-\varepsilon_1 D-\varepsilon_2 Q-\frac{A}{S}+\beta(D-S)+(4\mu+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\gamma+\delta+\lambda)-\frac{\delta D}{Q}-\frac{\gamma D}{R}-$$

$$\frac{\lambda Q}{R}+\frac{\sigma^2(S^2+D^2)}{2}]\mathrm{d}t+\sigma(D-S)\mathrm{d}B(t)。\tag{2}$$

令

$$LV=A-\mu(S+D+Q+R)-\varepsilon_1 D-\varepsilon_2 Q-\frac{A}{S}+\beta(D-S)+(4\mu+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\gamma+\delta+\lambda)-$$

$$\frac{\delta D}{Q}-\frac{\gamma D}{R}-\frac{\lambda Q}{R}+\frac{\sigma^2(S^2+D^2)}{2},$$

则

$$LV\leqslant A+\beta D+(4\mu+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\gamma+\delta+\lambda)+\frac{\sigma^2(D^2+S^2)}{2}\leqslant$$

$$A+\beta M+(4\mu+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\gamma+\delta+\lambda)+\sigma^2 M^2:=K。\tag{3}$$

将式(3)代入式(2)可得 $\mathrm{d}V\leqslant K\mathrm{d}t+\sigma(D-S)\mathrm{d}B(t)$，上式两边取 0 到 $\tau_k\wedge T$ 的积分，再取数学期望可以得到

$$EV(S(\tau_k\wedge T),D(\tau_k\wedge T),Q(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T))\leqslant V(S(0),D(0),Q(0),R(0))+KE(\tau_k\wedge T)\leqslant$$

$$V(S(0),D(0),Q(0),R(0))+KT,\tag{4}$$

其中 E 为数学期望。

对所有的 $k\geqslant k_1$，有 $P\{\tau_k\leqslant T\}>\varepsilon$。对于任意的 $\omega\in\{\tau_k\leqslant T\}$，$S(\tau_k,\omega)$，$D(\tau_k,\omega)$，$Q(\tau_k,\omega)$，$R(\tau_k,\omega)$四个表达式中至少有一个等于 k 或 $\frac{1}{k}$，故可得

$$V(S(\tau_k,\omega),D(\tau_k,\omega),Q(\tau_k,\omega),R(\tau_k,\omega))\geqslant(k-1-\ln k)\wedge(\frac{1}{k}-1+\ln k)。$$

通过式(4)可知

$$V(S(0),D(0),Q(0),R(0))+KT\geqslant E[1_{\Omega_k}(\omega)V(S(\tau_k,\omega),D(\tau_k,\omega),Q(\tau_k,\omega),R(\tau_k,\omega))]\geqslant$$

$$\varepsilon[(k-1-\ln k)\wedge(\frac{1}{k}-1+\ln k)]。$$

其中，$\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}$，$1_{\Omega_k}(\omega)$为 Ω_k 的示性函数。令 $k\to\infty$，可得$\infty>V(S(0),D(0),Q(0),R(0))+KT=\infty$，得出矛盾，因此上述假设 $\tau_\infty\neq\infty$不成立，故 $\tau_e=\infty$a. s.，由此证明了全局正解的存在唯一性。

2 酗酒群体的消失条件

以下主要讨论模型(1)中，$D(t)$和 $Q(t)$ 两类群体何时消失，初始条件对于模型并无影响，故假设系统存在任意的初始条件 $X(0)=(S(0),D(0),Q(0),R(0))$。

定理 2 设$(S(t),D(t),Q(t),R(t))$为模型(1)的正解，对于任意给定初始条件 $X(0)$，若白噪声强度 $\sigma^2>\frac{\beta^2}{2(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)}$，则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln D(t)}{t}\leqslant-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)+\frac{\beta^2}{2\sigma^2}<0,$$

即$\lim\limits_{t\to\infty}D(t)=0$，且$\lim\limits_{t\to\infty}Q(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\frac{A}{\mu}$。

证明 通过 Itô 公式，可将模型(1)中 D 的表达式变为

$$\mathrm{d}(\ln D)=[\beta S-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2S^2]\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B(t)。$$

对上式两边取 0 到 t 的积分，并除以 t，且记符号 $\langle f(t)\rangle = \dfrac{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}{t}$，则可得

$$\frac{\ln D(t)-\ln D(0)}{t}=\beta\langle S(t)\rangle-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2\langle S^2(t)\rangle+\frac{M(t)}{t}\leqslant$$

$$\beta\langle S(t)\rangle-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)-\frac{1}{2}\sigma^2\langle S(t)\rangle^2+\frac{M(t)}{t},$$

化简得

$$\frac{\ln D(t)}{t}\leqslant-\frac{1}{2}\sigma^2(\langle S(t)\rangle-\frac{\beta}{\sigma^2})^2-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)+\frac{\beta^2}{2\sigma^2}+\frac{M(t)}{t}+\frac{\ln D(0)}{t}\leqslant$$

$$-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)+\frac{\beta^2}{2\sigma^2}+\frac{M(t)}{t}+\frac{\ln I(0)}{t}。\tag{5}$$

上式中，记 $M(t)=\int_0^t \sigma S(r)\mathrm{d}B(r)$，则 $M(t)$ 为一连续局部鞅且 $M(0)=0$。易知

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\langle M,M\rangle_t}{t}\leqslant\frac{\sigma^2A^2}{\mu^2}<\infty,$$

故由强大数定律得 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{M_t}{t}=0$。取式(5) 中 $\dfrac{\ln D(t)}{t}$ 的上极限，再将上述极限代入式(5) 得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln D(t)}{t}\leqslant-(\mu+\varepsilon_1+\gamma+\delta)+\frac{\beta^2}{2\sigma^2}<0,$$

上式表示

$$\lim_{t\to\infty}D(t)=0。\tag{6}$$

由

$$\mathrm{d}(S+D+Q+R)=[A-\mu(S+D+Q+R)-\varepsilon_1 D-\varepsilon_2 Q]\mathrm{d}t$$

计算得

$$S(t)+D(t)+Q(t)+R(t)=$$

$$\mathrm{e}^{-\mu t}[S(0)+D(0)+Q(0)+R(0)]+\mathrm{e}^{-\mu t}\int_0^t(A-\varepsilon_1 D(r)-\varepsilon_2 Q(r))\mathrm{e}^{\mu r}\mathrm{d}r。$$

由洛必达法则，得到

$$\lim_{t\to\infty}(S(t)+D(t)+Q(t)+R(t))=\lim_{t\to\infty}\frac{S(0)+D(0)+Q(0)+R(0)}{\mathrm{e}^{\mu t}}+$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t(A-\varepsilon_1 D(r)-\varepsilon_2 Q(r))\mathrm{e}^{\mu r}\mathrm{d}r}{\mathrm{e}^{\mu t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{A-\varepsilon_1 D(t)-\varepsilon_2 Q(t)}{\mu}。\tag{7}$$

对于模型(1)，$Q(t)$ 的表达式为

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\delta D(t)-(\mu+\varepsilon_2+\lambda)Q(t),$$

由式(6)可得 $\lim\limits_{t\to\infty}Q(t)=0$，同理可得 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=0$，故由式(7)可得 $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\dfrac{A}{\mu}$。故定理 2 成立。

3　结论

本文在确定型酗酒模型的基础上，加入随机干扰因素，研究了具有双线性发生率的随机酗酒模型，利用随机微分方程理论讨论了随机酗酒模型的正解，并通过计算白噪声强度，得到了酗酒群体 $D(t)$ 消失的充分性条件。研究结果表明，如果白噪声强度 σ^2 达到了足够大的程度，则 $D(t)$、$Q(t)$、$R(t)$ 几类群体几乎必然处处趋于 0，这表明酗酒群体、正在戒酒者群体、永久戒酒者群体将消失。本文利用随机微分方程理

论，说明了外部环境干扰会对酗酒系统产生较大的影响，这对于研究酗酒问题具有一定的理论价值。

参考文献：

[1] 于振华，黄山阁，卢思，等．新冠肺炎传播动力学建模及预测[J]．控制与决策，2023，38(3)：699-705.

[2] 蒲武军．一类多时滞反应扩散 HBV 病毒模型的动力学分析[J]．井冈山大学学报(自然科学版)，2021，42(6)：8-13.

[3] 刘一鸣，高建国．一类具有空间扩散的 SEIAV 模型及其阈值动力学研究[J]．应用数学，2023，36(1)：134-151.

[4] 薛山，廖一兰，李春林，等．不同人口流动模式下城市传染病时空传播模型适用性研究[J]．地球信息科学学报，2023，25(1)：208-222.

[5] 张艳敏，王丹，刘明鼎．具有二阶扰动和疫苗接种的随机霍乱传染病模型的平稳分布[J]．井冈山大学学报(自然科学版)，2021，42(3)：1-7.

[6] 祁邦国，于石成，王琦琦，等．我国早期新型冠状病毒肺炎疫情传染病动力学模型分析[J]．疾病监测，2022，37(12)：1588-1593.

[7] 张子振，张伟诗，宋志强．一类时滞 SDTR 戒酒模型的局部渐近稳定性[J]．滨州学院学报，2022，37(6)：31-36.

[8] 向红，朱承澄，霍海峰．具有复发的酗酒模型的全局稳定性[J]．生物数学学报，2016，31(1)：15-27.

[9] 王晓雯．季节交替下的混杂种群模型及一类多组酗酒模型研究[D]．乌鲁木齐：新疆大学，2020.

[10] SONG N N，HUO H F. Global stability for a binge drinking model with two stages[J]. Discrete dynamics in nature and society，2012，10(1)：1-15.

[11] SHARMA S，SAMANTA G P. Analysis of a drinking epidemic model [J]. International journal of dynamics and control，2015，3(3)：288-305.

A Stochastic Binge Drinking Model with Bilinear Incidence Rate

LIU Juan，PAN Yurong，LI Na

(*School of Mathematics and Physics*，*Bengbu University*，*Bengbu* 233030，*China*)

Abstract：By using the method of qualitative analysis of stochastic differential equations，a stochastic binge drinking model with bilinear incidence is studied. Firstly，the random disturbance of the contact rate coefficient is introduced into the deterministic binge drinking model. On this basis，the existence and uniqueness of the positive solution of the random binge drinking model are discussed. Secondly，the sufficient conditions for the disappearance of the alcoholism population are obtained by calculating white noise intensity. The results show that when the external white noise is large enough，alcoholism population，population who are quitting alcohol and population who are permanently quitting will disappear.

Keywords：white noise；stochastic binge drinking model；Itô formula；strong law of numbers；positive solution

(责任编辑：贾晶晶)