【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

Fermat 型复微分-差分方程的有限级超越整函数解

杨龙燕，杨　祺

（新疆师范大学 数学科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017）

摘　要：利用值分布理论研究了一类带有微分项及差分项的 Fermat 型函数方程以及方程组，在前人研究的基础上，将平方项之和为 1 的方程及方程组推广为平方项之和为多项式的方程及方程组，得到了有限级解的精确解析形式。

关键词：复微分-差分方程；值分布理论；有限级；超越函数；整函数解

中图分类号：O 175　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.03.010

在值分布论中，Gross[1-2] 发现当 $n\geqslant 3$ 时，Fermat 型函数方程 $f(z)^n+g(z)^n=1$ 没有超越整函数解；Yang[3] 将 Fermat 型函数方程推广到了微分领域，得到了函数方程 $f(z)^2+f'(z)^2=1$ 的有限级超越整函数解的形式；Liu 等[4] 将 Fermat 型函数方程的微分形式与差分形式结合在一起，得到了 Fermat 型复微分-差分方程 $f(z+c)^2+f'(z)^2=1$ 的有限级超越整函数解的形式。对 Fermat 型复微分-差分方程的形式进一步推广是目前复微分-差分方程研究的热点，很多学者都对 Fermat 型复微分-差分方程解的存在性和解的存在形式进行了研究，并取得了重要的结果[5-7]。文献[8]进一步推广了文献[4]的结果，得到了方程 $[\lambda f'(z)+\mu f(z)]^2+[\alpha f(z+c)]^2=1$ 的有限级超越整函数解的形式。在此基础上，笔者考虑 Fermat 型复微分-差分方程

$$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]^2+[\alpha f(z+c)]^2=Q(z) \tag{1}$$

的有限级超越整函数解的存在性问题，其中，$c(c\neq 0)\in C$，$\lambda=c\mu$，$Q(z)$ 为多项式，若方程存在超越整函数解，则考虑能否得到整函数解的具体表达形式。此外，由于复微分-差分方程和方程组在解的性质上有着本质的区别，所以笔者进一步考虑能否将上述方程推广到方程组的情形，并研究其整函数解的存在形式。

1　预备知识

本文将用到复平面 C 上亚纯函数 Nevanlinna 理论的基础知识，例如 Nevanlinna 第一基本定理、Nevanlinna 第二基本定理、特征函数 $T(r,f)$、迫近函数 $m(r,f)$、计数函数 $N(r,f)$ 和 $\overline{N}(r,f)$ 以及 $S(r,f)=o(T(r,f))(r\to\infty,r\notin E)$，其中 E 是一个有穷线性测度的集合。通常，用 $\rho(f)=\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log T(r,f)}{\log r}$ 表示为复平面 C 上亚纯函数 f 的级。接下来主要给出有关定理证明所需的相关引理。

引理 1（Hadamard 因子分解定理）[9]　设 f 为有穷级 $\rho(f)$ 的整函数，$z=0$ 为其 k 级零点，$\{z_1,z_2,\cdots\}$ 为 f 的非零零点，则 $f(z)=z^kP(z)e^{Q(z)}$，其中，$P(z)$ 为 f 的非零零点的典型乘积，$Q(z)$ 为一次数不高于

收稿日期：2023-12-28

基金项目：国家自然科学基金项目（11961068）

第一作者简介：杨龙燕（2000—　），女，山东德州人，硕士研究生，主要从事复分析研究。E-mail：1395736407@qq.com

通信作者简介：杨　祺（1979—　），女，新疆乌鲁木齐人，教授，硕士，主要从事复分析研究。

E-mail：yangqi_8138@126.com

$\rho(f)$的多项式。

引理 2[9]　设 $f_j(z)(j=1,2,3)$ 为复平面上的亚纯函数，$f_1(z)$ 为非常数，如果 $\sum_{k=1}^{n} f_j(z)\equiv 1$ 且

$$\sum_{j=1}^{3} N\left(r,\frac{1}{f_j}\right)+2\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)<(\lambda+o(1))T(r),$$

其中，$\lambda<1$，$T(r)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} T(r,f_j)$，则 $f_2(z)\equiv 1$ 或 $f_3(z)\equiv 1$。

2　主要结果

文献[8]利用 Hadamard 因子分解定理以及亚纯函数唯一性理论得到了方程$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]^2+[\alpha f(z+c)]^2=1$ 的有限级超越整函数解的具体形式。笔者受文献[8]启发，得到了方程(1)的有限级超越整函数解的形式，其中 $\lambda=c\mu$ 为判断 $Q(z)$为常数的必要条件。

定理 1　设 $\lambda\neq 0,\alpha\neq 0$，$f(z)$是方程(1)的 $\rho(f)<\infty$ 的超越整函数解，则 $Q(z)=q_1q_2$ 为非零常数，且 $f(z)$一定满足

$$f(z)=\frac{q_1\mathrm{e}^{az+b}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{q_2\mathrm{e}^{-az-b}}{2(\mu-\lambda a)},a=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\alpha^2}}{\lambda}\neq\frac{\pm\mu}{\lambda},c=\frac{1}{a}\left(\ln\frac{\lambda a+\mu}{\alpha\mathrm{i}}+2k\pi\mathrm{i}\right)。$$

证明　假设 $f(z)$是方程(1)的有限级超越整函数解，则方程(1)可以改写为

$$\{[\lambda f'(z)+\mu f(z)]+\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]\}\{[\lambda f'(z)+\mu f(z)]-\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]\}=Q(z)。$$

由于 $Q(z)$为多项式，则$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]+\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]$与$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]-\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]$至多只有有限多个零点。根据引理 1，可设

$$\begin{cases}[\lambda f'(z)+\mu f(z)]+\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]=Q_1(z)\mathrm{e}^{h(z)},\\ [\lambda f'(z)+\mu f(z)]-\mathrm{i}[\alpha f(z+c)]=Q_2(z)\mathrm{e}^{-h(z)}。\end{cases}\tag{2}$$

其中，$h(z)$，$Q_1(z)$和 $Q_2(z)$均为非零多项式且 $Q(z)=Q_1(z)Q_2(z)$。由方程组(2)可得

$$\begin{cases}\lambda f'(z)+\mu f(z)=\dfrac{Q_1(z)\mathrm{e}^{h(z)}+Q_2(z)\mathrm{e}^{-h(z)}}{2},\\ f(z+c)=\dfrac{Q_1(z)\mathrm{e}^{h(z)}-Q_2(z)\mathrm{e}^{-h(z)}}{2\alpha\mathrm{i}}。\end{cases}\tag{3}$$

由方程组(3)的第 2 个式子可知，$h(z)$为非常数多项式。对方程组(3)的第 2 个式子求导，并利用方程组(3)的第 1 个式子可得

$$\frac{(\lambda h'(z)+\mu)Q_1(z)+\lambda Q'_1(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_2(z+c)}\mathrm{e}^{h(z+c)+h(z)}+\frac{(\lambda h'(z)-\mu)Q_2(z)-\lambda Q'_2(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_2(z+c)}\mathrm{e}^{h(z+c)-h(z)}-\frac{Q_1(z+c)}{Q_2(z+c)}\mathrm{e}^{2h(z+c)}=1。\tag{4}$$

由于 $h(z)$为非常数多项式，因此 $\mathrm{e}^{h(z+c)+h(z)}$，$\mathrm{e}^{2h(z+c)}$ 均为非常数函数。根据式(4)与引理 2 知

$$\frac{(\lambda h'(z)-\mu)Q_2(z)-\lambda Q'_2(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_2(z+c)}\mathrm{e}^{h(z+c)-h(z)}\equiv 1。\tag{5}$$

由式(5)可知 $h(z+c)-h(z)$恒为常数，因此 $\deg(h(z))=1$。不失一般性，不妨设 $h(z)=az+b(a\neq 0)$，则

$$\frac{(\lambda a-\mu)Q_2(z)-\lambda Q'_2(z)}{\mathrm{i}\alpha Q_2(z+c)}\mathrm{e}^{ac}=1。\tag{6}$$

又由式(4)知

$$\frac{(\lambda a+\mu)Q_1(z)+\lambda Q'_1(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_1(z+c)}=\mathrm{e}^{ac}。\tag{7}$$

接下来断言 $Q_1(z)$，$Q_2(z)$为常数。不妨设 $Q_1(z)=\sum\limits_{i=0}^{t} a_iz^i$，$Q_2(z)=\sum\limits_{j=0}^{s} b_jz^j$，其中 $a_t,b_s\neq 0$。根据式(6)可知

$$(\lambda a-\mu)(b_sz^s+b_{s-1}z^{s-1}+\cdots+b_0)-\lambda[sb_sz^{s-1}+(s-1)b_{s-1}z^{s-2}+\cdots+b_1]=$$

$$\mathrm{i}\alpha e^{-ac}[b_s z^s+(scb_s+b_{s-1})z^{s-1}+\cdots]。$$

因此，便可以得到

$$(\lambda a-\mu)=\mathrm{i}\alpha e^{-ac}, \tag{8}$$

$$sb_s[(\lambda a-\mu)c+\lambda]=0。 \tag{9}$$

根据式(7)可知

$$(\lambda a+\mu)(a_t z^t+a_{t-1}z^{t-1}+\cdots+a_0)+\lambda[ta_t z^{t-1}+(t-1)a_{t-1}z^{t-2}+\cdots+a_1]=\mathrm{i}\alpha e^{ac}[a_t z^t+(tca_t+a_{t-1})z^{t-1}+\cdots]。$$

因此，便可以得到

$$(\lambda a+\mu)=\mathrm{i}\alpha e^{ac}, \tag{10}$$

$$ta_t[(\lambda a+\mu)c-\lambda]=0。 \tag{11}$$

由定理 1 中的条件 $\lambda=c\mu$ 以及式(9)(11)可知 $s=t=0$。这表明 $Q_1(z)$ 和 $Q_2(z)$ 均为非零常数。不失一般性，不妨设 $Q_1(z)=q_1$，$Q_2(z)=q_2$，由式(8)与式(10)可知，$a=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\alpha^2}}{\lambda}\neq\frac{\pm\mu}{\lambda}$，$c=\frac{1}{a}(\ln\frac{\lambda a+\mu}{\alpha \mathrm{i}}+2k\pi \mathrm{i})$。

由方程组(3)的第 1 个式子可知，$\lambda f'(z)+\mu f(z)=\frac{q_1 e^{az+b}+q_2 e^{-az-b}}{2}$。所以方程(1)的解可以表示为

$$f(z)=de^{-\frac{\mu}{\lambda}z}+\frac{q_1 e^{az+b}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{q_2 e^{-az-b}}{2(\mu-\lambda a)}。$$

代入方程组(3)的第 2 个式子得 $2\mathrm{i}\alpha d=0$，则 $d=0$。综上，定理 1 得证。

由于复微分-差分方程所得到的结果未必可以直接推广到方程组上，因此笔者在得到复微分-差分方程(1)的有限级超越整函数解的形式后，又考虑能否将方程(1)推广到方程组。即

$$\begin{cases}[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]^2+[\alpha f_2(z+c)]^2=Q_1(z),\\ [\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]^2+[\alpha f_1(z+c)]^2=Q_2(z),\end{cases} \tag{12}$$

其中，$Q_1(z)$，$Q_2(z)$ 为多项式，$c(c\neq0)\in C$，$\lambda=c\mu$。

定理 2 设 $\lambda\neq0$，$\alpha\neq0$，$(f_1(z),f_2(z))$ 是方程组(2)的 $\rho(f)<\infty$ 的超越整函数解，则 $Q_1(z)=c_{11}c_{12}$ 且 $Q_2(z)=c_1c_2$ 均为非零常数，$c_1=c_{21}$ 或 c_{22}，$c_2=c_{22}$ 或 c_{21}，且 (f_1,f_2) 一定满足

$$(f_1,f_2)=(\frac{c_{11}e^{az+b_1}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{12}e^{-az-b_1}}{2(\mu-\lambda a)},\frac{c_1 e^{az+b_2}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_2 e^{-az-b_2}}{2(\mu-\lambda a)}),$$

其中，$a=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\alpha^2}}{\lambda}$，$c_{11}c_{12}=\pm c_{21}c_{22}$，$e^{4ac}=\frac{(\lambda a+\mu)^2}{(\lambda a-\mu)^2}$。

证明 假设 (f_1,f_2) 是方程组(12)的 $\rho(f)<\infty$ 的超越整函数，则方程组(12)可以改写为

$$\begin{cases}\{[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]\}\{[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]\}=Q_1(z),\\ \{[\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]\}\{[\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]\}=Q_2(z)。\end{cases}$$

由于 $Q_1(z)$，$Q_2(z)$ 为多项式，则 $[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]$，$[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]$，$[\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]$，$[\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]$ 至多只有有限多个零点。由引理 1 可设

$$\begin{cases}[\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]=Q_{11}(z)e^{p(z)},\\ [\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_2(z+c)]=Q_{12}(z)e^{-p(z)},\\ [\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]+\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]=Q_{21}(z)e^{q(z)},\\ [\lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)]-\mathrm{i}[\alpha f_1(z+c)]=Q_{22}(z)e^{-q(z)}。\end{cases} \tag{13}$$

其中，$p(z)$，$q(z)$，$Q_{11}(z)$，$Q_{12}(z)$，$Q_{21}(z)$，$Q_{22}(z)$ 均为非零多项式且 $Q_1(z)=Q_{11}(z)Q_{12}(z)$，$Q_2(z)=Q_{21}(z)Q_{22}(z)$。由方程组(13)可得

$$\begin{cases}\lambda f'_1(z)+\mu f_1(z)=\dfrac{Q_{11}(z)e^{p(z)}+Q_{12}(z)e^{-p(z)}}{2},\\ f_2(z+c)=\dfrac{Q_{11}(z)e^{p(z)}-Q_{12}(z)e^{-p(z)}}{2\alpha i},\\ \lambda f'_2(z)+\mu f_2(z)=\dfrac{Q_{21}(z)e^{q(z)}+Q_{22}(z)e^{-q(z)}}{2},\\ f_1(z+c)=\dfrac{Q_{21}(z)e^{q(z)}-Q_{22}(z)e^{-q(z)}}{2\alpha i}。\end{cases}\tag{14}$$

由方程组(14)的第 2、4 式可知，$p(z)$与 $q(z)$为非常数多项式。分别对方程组(14)的第 2、4 式求导，并分别利用方程组(14)的第 3 式及第 1 式可得

$$\frac{(\lambda p'(z)+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{q(z+c)+p(z)}+\frac{(\lambda p'(z)-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{q(z+c)-p(z)}-\frac{Q_{21}(z+c)}{Q_{22}(z+c)}e^{2q(z+c)}\equiv 1。\tag{15}$$

$$\frac{(\lambda q'(z)+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{p(z+c)+q(z)}+\frac{(\lambda q'(z)-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{p(z+c)-q(z)}-\frac{Q_{11}(z+c)}{Q_{12}(z+c)}e^{2p(z+c)}\equiv 1。\tag{16}$$

由于 $p(z)$与 $q(z)$为非常数多项式，故 $e^{2q(z+c)}$，$e^{2p(z+c)}$ 均为非常数函数。则由式(15)与引理 2 可知

$$\frac{(\lambda p'(z)-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{q(z+c)-p(z)}\equiv 1\text{ 或}\frac{(\lambda p'(z)+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{q(z+c)+p(z)}\equiv 1。$$

由式(16)与引理 2 可知

$$\frac{(\lambda q'(z)-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{p(z+c)-q(z)}\equiv 1\text{ 或}\frac{(\lambda q'(z)+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{p(z+c)+q(z)}\equiv 1。$$

因此以下可以分 4 种情形讨论。

情形 1

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda p'(z)-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{q(z+c)-p(z)}\equiv 1,\\ \dfrac{(\lambda q'(z)-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{p(z+c)-q(z)}\equiv 1。\end{cases}\tag{17}$$

由方程组(17)知，$q(z+c)-p(z)\equiv C_1$，$p(z+c)-q(z)\equiv C_2$，其中 C_1，C_2 为常数。则 $p(z+2c)-p(z)\equiv C_1+C_2$，从而 $p(z)$是一次多项式，同理可知 $q(z)$也是一次多项式，而 $p(z+c)-q(z)$恒为常数。不妨设 $p(z)=az+b_1$，$q(z)=az+b_2$。代入方程组(17)有

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda a-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha iQ_{22}(z+c)}e^{ac-b_1+b_2}\equiv 1,\\ \dfrac{(\lambda a-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha iQ_{12}(z+c)}e^{ac+b_1-b_2}\equiv 1。\end{cases}\tag{18}$$

又由式(15)(16)知

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda a+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha iQ_{21}(z+c)}=e^{ac-b_1+b_2},\\ \dfrac{(\lambda a+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha iQ_{11}(z+c)}=e^{ac+b_1-b_2}。\end{cases}\tag{19}$$

下面证 $Q_{lj}(z)(l,j=1,2)$为常数。

由方程组(18)(19)知 $\deg(Q_{12})=\deg(Q_{22})$，$\deg(Q_{11})=\deg(Q_{21})$。不妨令

$$Q_{22}(z)=\sum_{i=0}^{s}a_iz^i,\ Q_{12}(z)=\sum_{j=0}^{s}b_jz^j\ (a_s,b_s\neq 0)。$$

根据方程组(18)的第 1 个式子可得

$$\begin{cases}(\lambda a-\mu)b_s=\alpha ie^{-ac+b_1-b_2}a_s,\\ (\lambda a-\mu)b_{s-1}-\lambda sb_s=\alpha ie^{-ac+b_1-b_2}(a_ssc+a_{s-1})。\end{cases}\tag{20}$$

由方程组(20)知

$$b_s(\lambda a-\mu)(a_s sc+a_{s-1})=a_s[(\lambda a-\mu)b_{s-1}-\lambda s b_s]。\tag{21}$$

根据方程组(18)的第2个式子可得

$$\begin{cases}(\lambda a-\mu)a_s=\alpha \mathrm{i}\mathrm{e}^{-ac-b_1+b_2}b_s,\\(\lambda a-\mu)a_{s-1}-\lambda s a_s=\alpha \mathrm{i}\mathrm{e}^{-ac-b_1+b_2}(b_s sc+b_{s-1})。\end{cases}\tag{22}$$

由方程组(22)知

$$a_s(\lambda a-\mu)(b_s sc+b_{s-1})=b_s[(\lambda a-\mu)a_{s-1}-\lambda s a_s]。\tag{23}$$

由方程组(20)(22)知$(\lambda a-\mu)^2=-\alpha^2\mathrm{e}^{-2ac}\neq 0$,$c=-\dfrac{\ln\dfrac{(\lambda a-\mu)^2}{-\alpha^2}+2k\pi\mathrm{i}}{2a}$。其中$k$为整数。由式(21)(23)可得$sa_sb_s[(\lambda a-\mu)c+\lambda]=0$。再由定理2中的条件$\lambda=\mu c$可知$s=0$。这表明$Q_{12}(z)$与$Q_{22}(z)$均为常数。同样地,也可以得到$Q_{11}(z)$与$Q_{21}(z)$为常数。不妨令$Q_{lj}(z)=c_{lj}(l,j=1,2)$。由方程组(18)(19)知

$$a=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\dfrac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\alpha^2}}{\lambda}=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\dfrac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\alpha^2}}{\lambda}\neq\pm\frac{\mu}{\lambda},c_{11}c_{12}=\pm c_{21}c_{22}。$$

由方程组(14)的第1、3式知

$$\begin{cases}f_1(z)=d_1\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda}z}+\dfrac{c_{11}\mathrm{e}^{az+b_1}}{2(\mu+\lambda a)}+\dfrac{c_{12}\mathrm{e}^{-az-b_1}}{2(\mu-\lambda a)},\\f_2(z)=d_2\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda}z}+\dfrac{c_{21}\mathrm{e}^{az+b_2}}{2(\mu+\lambda a)}+\dfrac{c_{22}\mathrm{e}^{-az-b_2}}{2(\mu-\lambda a)}。\end{cases}$$

再由方程组(14)的第2、4式知$d_1=0$,$d_2=0$,且$\mathrm{e}^{4ac}=\dfrac{(\lambda a+\mu)^2}{(\lambda a-\mu)^2}$。因此

$$(f_1,f_2)=\left(\frac{c_{11}\mathrm{e}^{az+b_1}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{12}\mathrm{e}^{-az-b_1}}{2(\mu-\lambda a)},\frac{c_{21}\mathrm{e}^{az+b_2}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{22}\mathrm{e}^{-az-b_2}}{2(\mu-\lambda a)}\right)。$$

情形2

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda p'(z)+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{22}(z+c)}\mathrm{e}^{q(z+c)+p(z)}\equiv 1,\\\dfrac{(\lambda q'(z)+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{12}(z+c)}\mathrm{e}^{p(z+c)+q(z)}\equiv 1。\end{cases}\tag{24}$$

由方程组(24)知$q(z+c)+p(z)\equiv C_1$,$p(z+c)+q(z)\equiv C_2$,其中C_1,C_2为常数。则$p(z+2c)-p(z)\equiv C_2-C_1$,从而$p(z)$是一次多项式,同理可知$q(z)$也是一次多项式,而$p(z+c)+q(z)$恒为常数。不妨设$p(z)=az+b_1$,$q(z)=-az-b_2$。代入方程组(24)有

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda a+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{22}(z+c)}\mathrm{e}^{-ac+b_1-b_2}\equiv 1,\\\dfrac{(-\lambda a+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{12}(z+c)}\mathrm{e}^{ac+b_1-b_2}\equiv 1。\end{cases}\tag{25}$$

又由式(15)(16)知

$$\begin{cases}\dfrac{(\lambda a-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{21}(z+c)}=\mathrm{e}^{-ac+b_1-b_2},\\\dfrac{(-\lambda a-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha \mathrm{i}Q_{11}(z+c)}=\mathrm{e}^{ac+b_1-b_2}。\end{cases}\tag{26}$$

下面证$Q_{lj}(z)(l,j=1,2)$为常数。由方程组(25)(26)知$\deg(Q_{12})=\deg(Q_{21})$,$\deg(Q_{11})=\deg(Q_{22})$。不妨令$Q_{22}(z)=\sum_{i=0}^{s}a_iz^i$,$Q_{11}(z)=\sum_{j=0}^{s}b_jz^j(a_s,b_s\neq 0)$。根据方程组(25)的第1个式子可得

$$\begin{cases}(\lambda a+\mu)b_s=\alpha\mathrm{i}\mathrm{e}^{ac-b_1+b_2}a_s,\\(\lambda a+\mu)b_{s-1}+\lambda sb_s=\alpha\mathrm{i}\mathrm{e}^{ac-b_1+b_2}(a_ssc+a_{s-1})。\end{cases}\tag{27}$$

由方程组(27)知

$$b_s(\lambda a+\mu)(a_ssc+a_{s-1})=a_s[(\lambda a+\mu)b_{s-1}+\lambda sb_s]。\tag{28}$$

根据方程组(26)的第2个式子可得

$$\begin{cases}(-\lambda a-\mu)a_s=\alpha\mathrm{i}\mathrm{e}^{ac+b_1-b_2}b_s,\\(-\lambda a-\mu)a_{s-1}-\lambda sa_s=\alpha\mathrm{i}\mathrm{e}^{ac+b_1-b_2}(b_ssc+b_{s-1})。\end{cases}\tag{29}$$

由方程组(29)知

$$a_s(\lambda a+\mu)(b_ssc+b_{s-1})=b_s[(\lambda a+\mu)a_{s-1}+\lambda sa_s]。\tag{30}$$

由方程组(27)与方程组(29)知

$$(\lambda a+\mu)^2=\alpha^2\mathrm{e}^{2ac}\neq 0,c=\frac{\ln\frac{(\lambda a+\mu)^2}{\alpha^2}+2k\pi\mathrm{i}}{2a},$$

其中k为整数。由式(28)(30)可得$sa_sb_s[(\lambda a+\mu)c-\lambda]=0$。再由题目条件$\lambda=\mu c$可知$s=0$。这表明$Q_{11}(z)$与$Q_{22}(z)$均为常数。同样地,也可以得到$Q_{12}(z)$与$Q_{21}(z)$也为常数。不妨令$Q_{lj}(z)=c_{lj}(l,j=1,2)$。由方程组(25)与方程组(26)知

$$a=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\alpha^2}}{\lambda}=\frac{\pm\sqrt{\mu^2-\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\alpha^2}}{\lambda}\neq\pm\frac{\mu}{\lambda},c_{11}c_{12}=\pm c_{21}c_{22}。$$

由方程组(14)的第1式及第3式知

$$\begin{cases}f_1(z)=d_1\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda}z}+\frac{c_{11}\mathrm{e}^{az+b_1}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{12}\mathrm{e}^{-az-b_1}}{2(\mu-\lambda a)},\\f_2(z)=d_2\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\lambda}z}+\frac{c_{22}\mathrm{e}^{az+b_2}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{21}\mathrm{e}^{-az-b_2}}{2(\mu-\lambda a)}。\end{cases}$$

再由方程组(14)的第2式及第4式知$d_1=0,d_2=0$,且$\mathrm{e}^{4ac}=\frac{(\lambda a+\mu)^2}{(\lambda a-\mu)^2}$。因此

$$(f_1,f_2)=\left(\frac{c_{11}\mathrm{e}^{az+b_1}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{12}\mathrm{e}^{-az-b_1}}{2(\mu-\lambda a)},\frac{c_{22}\mathrm{e}^{az+b_2}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{c_{21}\mathrm{e}^{-az-b_2}}{2(\mu-\lambda a)}\right)。$$

情形3

$$\begin{cases}\frac{(\lambda p'(z)+\mu)Q_{11}(z)+\lambda Q'_{11}(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_{22}(z+c)}\mathrm{e}^{q(z+c)+p(z)}\equiv 1,\\\frac{(\lambda q'(z)-\mu)Q_{22}(z)-\lambda Q'_{22}(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_{12}(z+c)}\mathrm{e}^{p(z+c)-q(z)}\equiv 1。\end{cases}$$

由该方程组知,$q(z+c)+p(z)\equiv C_1$,$p(z+c)-q(z)\equiv C_2$,其中C_1,C_2为常数。则$p(z+2c)+p(z)\equiv C_1+C_2$,从而$p(z)$为常数,这与$p(z)$为非常数多项式矛盾。

情形4

$$\begin{cases}\frac{(\lambda p'(z)-\mu)Q_{12}(z)-\lambda Q'_{12}(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_{22}(z+c)}\mathrm{e}^{q(z+c)-p(z)}\equiv 1,\\\frac{(\lambda q'(z)+\mu)Q_{21}(z)+\lambda Q'_{21}(z)}{\alpha\mathrm{i}Q_{12}(z+c)}\mathrm{e}^{p(z+c)+q(z)}\equiv 1。\end{cases}$$

由该方程组知,$q(z+c)-p(z)\equiv C_1$,$p(z+c)+q(z)\equiv C_2$,其中C_1,C_2为常数。则$p(z+2c)+p(z)\equiv C_2-C_1$,从而$p(z)$为常数,这与$p(z)$为非常数多项式矛盾。综上,定理2得证。

3　总结

本文应用Nevanlinna值分布理论以及Hadamard因子分解定理等方法,研究了Fermat型复微分-差

分方程(1)及其对应下方程组的有限级超越整函数解。首先通过 Hadamard 因子分解定理得到满足解的方程,并计算出各个部分的具体形式;其次在函数 $f_j(z)(j=1,2,3)$求和为 1 的等式中,利用亚纯函数唯一性理论判断 $f_j(z)(j=1,2,3)$中的一个或两个函数恒等于 1,再通过分类探讨的思想,在每一种情形下得到方程及方程组右边的非零多项式为常数,从而得到一般的结果。

参考文献:

[1] GROSS F. On the equation $x^n+y^n=z^n$[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1966,72(6):86-88.

[2] GROSS F. On the equation $f(z)^n+g(z)^n=h(z)^n$[J]. The American mathematical monthly,1966,73(10):1093-1096.

[3] YANG C C. A generalization of a theorem of P. Montel on entire functions[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1970,26(2):332-334.

[4] LIU K,CAO T,CAO H. Entire solutions of Fermat type differential-difference equations[J]. Archiv der mathematik,2012,99(2):147-155.

[5] 段江梅,韩艳,胡晓飞,等. Fermat 型函数方程的亚纯解[J]. 大理大学学报,2023,8(12):5-9.

[6] 扈培础,吴琳琳. 关于 Fermat 型函数方程的问题(英文)[J]. 山东大学学报(理学版),2021,56(10):23-37.

[7] 高凌云. 两类复微分-差分方程组的整函数解[J]. 数学学报,2016,59(5):677-684.

[8] 方成鸿,徐洪焱. Fermat 型复微分-差分方程的整函数解[J]. 数学年刊 A 辑(中文版),2022(1):1-16.

[9] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995:90-108.

On Finite Order Transcendental Entire Solutions of Fermat Type Complex Differential-difference Equations

YANG Longyan,YANG Qi

(*School of Mathematical Sciences*,*Xinjiang Normal University*,*Urumqi* 830017,*China*)

Abstract: Based on Nevanlinna theory,a class of Fermat type functional equations and systems of equations with differential and difference terms are studied. On the basis of previous studies,the equations and systems of equations whose sum of square terms is 1 are generalized to those whose sum of square terms is polynomial,and the exact forms of finite order solutions are obtained respectively.

Keywords: complex differential-difference equations; Nevanlinna theory; finite order; transcendental function; entire solutions

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式 杨龙燕,杨祺. Fermat 型复微分-差分方程的有限级超越整函数解[J]. 山东航空学院学报,2024,41(3):78-84.

YANG L Y,YANG Q. On finite order transcendental entire solutions of Fermat type complex differential-difference equations[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2024,41(3):78-84.