【基础理论研究】

不同对角矩阵的特征值求解

田金玲

（大同师范高等专科学校 数学系，山西 大同 037000）

摘　要：利用分块矩阵的性质，结合分块上三角矩阵，给出了次对角矩阵的特征值求解公式；利用迭代递推的方法给出了三对角矩阵的特征值求解公式；证明了 $2n+1$ 阶三对角矩阵与 n 阶三对角矩阵的特征值的关系，并应用降低行列式阶数的办法求出了高阶矩阵的部分特征值。

关键词：次对角矩阵；三对角矩阵；分块矩阵；特征多项式；特征值

中图分类号：O 151.21　**文献标识码**：A　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.03.012

0　引言

对角型矩阵在数学、工程、智能控制等领域应用广泛，众多研究者展开了对其性质的讨论，如行列式、逆矩阵、特征值和特征向量、特征值反问题、相似对角化等[1-5]。矩阵的特征值是研究线性变换的一个重要指标，但用常规求解特征多项式根的办法，通常很难解决。笔者利用两种不同形式的对角型矩阵各自的特点，采取不同的证明方法，得出了其特征值的求解公式。这样的研究方式，可以同时多角度地得到针对同一问题的不同解决方法。

1　次对角矩阵的特征值

定义 1[6]　除了次对角线上的元素不全为零，其余元素都是零的矩阵称为次对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_i \in F(i=1,2,\cdots,n)。$$

定理 1[7]　偶数阶次对角矩阵

$$\boldsymbol{A}_{2m}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, a_i, b_i \in F(i=1,2,\cdots,m)$$

收稿日期：2023-10-20

作者简介：田金玲（1969—　），女，山西大同人，副教授，主要从事高等代数研究。E-mail：645764771@qq.com

的特征值为$\pm\sqrt{a_ib_i}$。

证明 记矩阵

$$\boldsymbol{A}_m=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&a_1\\0&\cdots&a_2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_m&\cdots&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_m=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&b_m\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&b_2&\cdots&0\\b_1&0&\cdots&0\end{pmatrix},\tag{1}$$

则矩阵$\boldsymbol{A}_{2m}$可以分块为$\boldsymbol{A}_{2m}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{B}_m&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,则

$$\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\-\boldsymbol{B}_m&\lambda\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}。$$

用分块上三角矩阵$\begin{pmatrix}-\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{O}&-\lambda\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}$左乘$\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}$,于是有

$$\begin{pmatrix}-\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{O}&-\lambda\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}(\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m})=\begin{pmatrix}-\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{O}&-\lambda\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\-\boldsymbol{B}_m&\lambda\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m&\boldsymbol{O}\\\lambda\boldsymbol{B}_m&-\lambda^2\boldsymbol{I}_m\end{pmatrix},$$

此时对等式两端同时取行列式得

$$\begin{vmatrix}-\lambda\boldsymbol{I}_m&-\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{O}&-\lambda\boldsymbol{I}_m\end{vmatrix}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=\begin{vmatrix}-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m&\boldsymbol{O}\\\lambda\boldsymbol{B}_m&-\lambda^2\boldsymbol{I}_m\end{vmatrix},$$

即

$$\lambda^{2m}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=\begin{vmatrix}-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m&\boldsymbol{O}\\\lambda\boldsymbol{B}_m&-\lambda^2\boldsymbol{I}_m\end{vmatrix}。$$

进一步根据下三角分块矩阵的行列式性质可得

$$\lambda^{2m}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m||-\lambda^2\boldsymbol{I}_m|=$$
$$|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|(-\lambda^2)^m=|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|(-1)^m\lambda^{2m},$$

消去λ^{2m}得

$$|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=(-1)^m|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|。\tag{2}$$

此时若利用该式求出矩阵$\boldsymbol{A}_{2m}$的特征值,则必须知道其特征多项式$|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|$的情况,于是需要先计算行列式$|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|$的值。由式(1)得

$$\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m=\begin{pmatrix}a_1b_1&0&\cdots&0\\0&a_2b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_mb_m\end{pmatrix},$$

进一步可得

$$-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m=\begin{pmatrix}a_1b_1-\lambda^2&0&\cdots&0\\0&a_2b_2-\lambda^2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_mb_m-\lambda^2\end{pmatrix},$$

所以

$$|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|=(a_1b_1-\lambda^2)(a_2b_2-\lambda^2)\cdots(a_mb_m-\lambda^2)。\tag{3}$$

将式(3)代入式(2),可得矩阵$\boldsymbol{A}_{2m}$的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=(-1)^m(a_1b_1-\lambda^2)(a_2b_2-\lambda^2)\cdots(a_mb_m-\lambda^2),$$

令 $|\lambda \boldsymbol{I}_{2m}-\boldsymbol{A}_{2m}|=0$，得

$$(-1)^m(a_1b_1-\lambda^2)(a_2b_2-\lambda^2)\cdots(a_mb_m-\lambda^2)=0,$$

解此关于 λ 的方程便可得出偶数阶次对角矩阵 $\boldsymbol{A}_{2m}$ 的全部 $2m$ 个特征值为 $\lambda=\pm\sqrt{a_ib_i}$，$(i=1,2,\cdots,m)$。

定理 2[8]　奇数阶次对角矩阵

$$\boldsymbol{A}_{2m+1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},a_i,b_i,c\in F(i=1,2,\cdots,m)$$

的特征值为 $\pm\sqrt{a_ib_i}(i=1,2,\cdots,m)$ 和 c。

证明　如定理 1 的证明，由式(1)得矩阵 $\boldsymbol{A}_{2m+1}$ 可以分块为 $\boldsymbol{A}_{2m+1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & c & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，于是有

$$\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}=\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & \lambda-c & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}。$$

用上三角分块矩阵 $\begin{pmatrix} -\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{O} & -1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\lambda\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}$ 左乘矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}$ 得

$$\begin{pmatrix} -\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & -1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\lambda\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}(\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1})=\begin{pmatrix} -\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & -1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\lambda\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & \lambda-c & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\lambda+c & \boldsymbol{O} \\ \lambda\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & -\lambda^2\boldsymbol{I}_m \end{pmatrix},$$

此时对等式两端同时取行列式得

$$\begin{vmatrix} -\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{O} & -1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\lambda\boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=\begin{vmatrix} -\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\lambda+c & \boldsymbol{O} \\ \lambda\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & -\lambda^2\boldsymbol{I}_m \end{vmatrix},$$

即

$$-(-\lambda)^{2m}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=\begin{vmatrix} -\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\lambda+c & \boldsymbol{O} \\ \lambda\boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{O} & -\lambda^2\boldsymbol{I}_m \end{vmatrix}。$$

进一步化简并应用分块下三角矩阵的行列式性质又得

$$-\lambda^{2m}|\lambda\boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m||-\lambda+c||-\lambda^2\boldsymbol{I}_m|=|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|(-\lambda+c)(-\lambda^2)^m=$$

$$(-1)^m\lambda^{2m}|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|(-\lambda+c),$$

等式两端消去$-\lambda^{2m}$得

$$|\lambda \boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=(-1)^{m-1}|-\lambda^2\boldsymbol{I}_m+\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{B}_m|(-\lambda+c)。\tag{4}$$

将式(3)代入式(4),得到矩阵$\boldsymbol{A}_{2m+1}$的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=(-1)^{m-1}(a_1b_1-\lambda^2)(a_2b_2-\lambda^2)\cdots(a_mb_m-\lambda^2)(-\lambda+c),$$

令$|\lambda \boldsymbol{I}_{2m+1}-\boldsymbol{A}_{2m+1}|=0$,得

$$(-1)^{m-1}(a_1b_1-\lambda^2)(a_2b_2-\lambda^2)\cdots(a_mb_m-\lambda^2)(-\lambda+c)=0,$$

于是可得奇数阶次对角矩阵$\boldsymbol{A}_{2m+1}$的全部$2m+1$个特征值为$\lambda=\pm\sqrt{a_ib_i}$($i=1,2,\cdots,m$)和c。

2 三对角矩阵的特征值

定理3[9] 形如

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}\tag{5}$$

的n阶三对角矩阵的特征值$\lambda=a+2\sqrt{bc}\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$,$k=1,2,\cdots,n$。

证明 式(5)的特征多项式

$$f_n(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c & \lambda-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \lambda-a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & \lambda-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c & \lambda-a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c & \lambda-a \end{vmatrix}_{n\times n},$$

将其依第一行展开得

$$f_n(\lambda)=(\lambda-a)\begin{vmatrix} \lambda-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c & \lambda-a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \lambda-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c & \lambda-a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c & \lambda-a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}+$$

$$b\begin{vmatrix} -c & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \lambda-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c & \lambda-a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c & \lambda-a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}=$$

$$(\lambda-a)f_{(n-1)}(\lambda)+b\begin{vmatrix} -c & -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \lambda-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c & \lambda-a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c & \lambda-a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)},$$

将上式中的行列式再按第一列展开又得

$$f_n(\lambda)=(\lambda-a)f_{(n-1)}(\lambda)-bc\begin{vmatrix} \lambda-a & -b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c & \lambda-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -c & \lambda-a & -b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -c & \lambda-a \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}=$$

$$(\lambda-a)f_{(n-1)}(\lambda)-bcf_{(n-2)}(\lambda),$$

即 $f_n(\lambda)=(\lambda-a)f_{(n-1)}(\lambda)-bcf_{(n-2)}(\lambda)$。取 $t+m=\lambda-a, tm=bc$,则 $f_n(\lambda)=(t+m)f_{(n-1)}(\lambda)-tmf_{(n-2)}(\lambda)$,将此式移项并提取公因式得

$$f_n(\lambda)-tf_{(n-1)}(\lambda)=m[f_{(n-1)}(\lambda)-tf_{(n-2)}(\lambda)],$$

依照此递推关系依次可得

$$f_n(\lambda)-tf_{(n-1)}(\lambda)=m[f_{(n-1)}(\lambda)-tf_{(n-2)}(\lambda)]=m^2[f_{(n-2)}(\lambda)-tf_{(n-3)}(\lambda)]=$$
$$m^3[f_{(n-3)}(\lambda)-tf_{(n-4)}(\lambda)]=\cdots=m^{n-2}[f_2(\lambda)-tf_1(\lambda)]。\tag{6}$$

显然 $f_2(\lambda)=(\lambda-a)^2-bc=(t+m)^2-tm, f_1(\lambda)=\lambda-a=t+m$。将其代入式(6),于是有 $f_n(\lambda)-tf_{(n-1)}(\lambda)=m^n$,移项又得 $f_n(\lambda)=m^n+tf_{(n-1)}(\lambda)$。利用此递推公式,有

$$f_n(\lambda)=m^n+tm^{n-1}+t^2f_{(n-2)}(\lambda)=m^n+tm^{n-1}+t^2m^{n-2}+t^3f_{(n-3)}(\lambda)=\cdots=$$
$$m^n+tm^{n-1}+t^2m^{n-2}+t^3m^{n-3}+\cdots+t^{n-2}m^2+t^{n-1}f_1(\lambda)。$$

因为 $f_1(\lambda)=|\lambda-a|=\lambda-a$,故 $f_1(\lambda)=t+m$,于是便有

$$f_n(\lambda)=m^n+tm^{n-1}+t^2m^{n-2}+t^3m^{n-3}+\cdots+t^{n-2}m^2+t^{n-1}m+t^n,\tag{7}$$

式(7)两边同时乘以 $m-t$,得

$$(m-t)f_n(\lambda)=(m-t)(m^n+tm^{n-1}+t^2m^{n-2}+t^3m^{n-3}+\cdots+t^{n-2}m^2+t^{n-1}m+t^n),$$

所以

$$f_n(\lambda)=\frac{m^{n+1}-t^{n+1}}{m-t}, m\neq t。\tag{8}$$

若 $m=t$,则由式(7)可得 $f_n(\lambda)=(n+1)m^n=(n+1)(\frac{\lambda-a}{2})^n$。因为 $t+m=\lambda-a$,令 $f_n(\lambda)=0$ 便有 $\lambda_i=a$ $(i=1,2,\cdots,n)$,故当 $m=t$ 时,三对角矩阵 $\mathbf{A}_n$ 有 n 个相同的特征值 a。当 $m\neq t$ 时,由 $t+m=\lambda-a, tm=bc$ 解得

$$t=\frac{(\lambda-a)+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}{2}, m=\frac{(\lambda-a)-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}{2},$$

将其代入式(8)便有

$$f_n(\lambda)=\frac{(\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}-(\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}}{-2^{n+1}\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}。$$

令 $f_n(\lambda)=0$,即

$$(\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}-(\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}=0,$$

移项可得$(\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}=(\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}$，进一步又有

$$\frac{(\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}}{(\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc})^{n+1}}=1,$$

所以$\left(\frac{\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}{\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}\right)^{n+1}=\cos 0+\mathrm{i}\sin 0$，所以

$$\frac{\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}{\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1}(k=1,2,\cdots,n)。\tag{9}$$

因为 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\cdot\frac{1}{r}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，所以复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 与复数$\frac{1}{r}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$互为倒数，因此将式(9)的左边取倒数得

$$\frac{\lambda-a+\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}{\lambda-a-\sqrt{(\lambda-a)^2-4bc}}=\cos\frac{2k\pi}{n+1}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1}(k=1,2,\cdots,n)。\tag{10}$$

式(9)(10)相加并通分得$\frac{(\lambda-a)^2-2bc}{bc}=2\cos\frac{2k\pi}{n+1}$，因此

$$(\lambda-a)^2=2bc\cdot\cos\frac{2k\pi}{n+1}+2bc=2bc(\cos\frac{2k\pi}{n+1}+1)=4bc\cdot\cos^2\frac{k\pi}{n+1}。\tag{11}$$

等式(11)两边开方并移项即得三对角矩阵(5)的特征值 $\lambda=a+2\sqrt{bc}\cos\frac{k\pi}{n+1}(k=1,2,\cdots,n)$。

定理 3 给出了三对角矩阵A_n 的全部特征值的计算公式，有时还会遇到只需计算矩阵部分特征值的情况，下面便通过降阶的办法，给出计算三对角矩阵部分特征值的简便方法。

定理 4[10] n 阶三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{n\times n}$$

的 n 个特征值也是 $2n+1$ 阶三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}_{2n+1}=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}$$

的特征值。

证明 由式(8)知 $\boldsymbol{A}_{2n+1}$的特征多项式 $f_{2n+1}(\lambda)=\frac{m^{2(n+1)}-t^{2(n+1)}}{m-t}$，$m\neq t$，而

$$\frac{m^{2(n+1)}-t^{2(n+1)}}{m-t}=\frac{m^{n+1}-t^{n+1}}{m-t}\cdot(m^{n+1}+t^{n+1}),$$

即 $f_{2n+1}(\lambda)=(m^{n+1}+t^{n+1})f_n(\lambda)$。令 $f_{2n+1}(\lambda)=0$，则有 $f_n(\lambda)=0$，因此 $\boldsymbol{A}_n$ 的 n 个特征值也是 $\boldsymbol{A}_{2n+1}$ 的 n

个特征值，定理 4 得证。计算高阶的三对角矩阵的部分特征值时，可以按此定理，通过降阶的办法减少运算量。

例 1　求出 7 阶三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}_7=\begin{pmatrix}3&2&0&0&0&0&0\\5&3&2&0&0&0&0\\0&5&3&2&0&0&0\\0&0&5&3&2&0&0\\0&0&0&5&3&2&0\\0&0&0&0&5&3&2\\0&0&0&0&0&5&3\end{pmatrix}$$

的 3 个特征值。

解　根据定理 4，先计算 $\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3&2&0\\5&3&2\\0&5&3\end{pmatrix}$ 的特征值，$\boldsymbol{A}_3$ 的特征多项式

$$f_3(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&0\\-5&\lambda-3&-2\\0&-5&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)^3-20(\lambda-3)=(\lambda-3)(\lambda-3-2\sqrt{5})(\lambda-3+2\sqrt{5}),$$

因此 $\boldsymbol{A}_7$ 的 3 个特征值为 $3, 3-2\sqrt{5}, 3+2\sqrt{5}$。

3　结论

给出了不同阶数的次对角矩阵以及三对角矩阵特征值的求解公式，利用这些公式，能够较方便地求出矩阵的特征值，省去了常规方法中求解行列式的烦琐步骤，达到了简化运算的目的。对于三对角矩阵部分特征值的求解，文章通过降低行列式阶数的办法，进一步降低了运算难度。

参考文献：

[1]　张兴刚，曹磊. 一种三对角矩阵的相似对角化及其应用[J]. 贵州大学学报(自然科学版)，2021，38(6)：19-24.

[2]　陈建华，焦荣政. 三对角矩阵求逆问题的思考：从一道课本习题谈起[J]. 大学数学，2020，36(1)：104-109.

[3]　雷英杰，郑志勇. 对称箭头矩阵加三对角矩阵的广义逆特征值问题[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2020，44(1)：14-19.

[4]　朱京乔，赵永华. 基于分治法求解对称三对角矩阵特征问题的 MPI/Cilk 混合并行算法[J]. 郑州大学学报(理学版)，2020，52(1)：33-38.

[5]　唐达. Toeplitz 周期三对角矩阵特征值的快速算法[J]. 高等学校计算数学学报，2015(3)：193-202.

[6]　陶鲜花. 次对角矩阵及实反次对称矩阵的性质[J]. 南华大学学报(理工版)，2004，18(2)：34-37.

[7]　乌仁其其格. 反对角矩阵的特征值求法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版)，2019，35(5)：4-6.

[8]　李楠，齐雅茹，黄俊杰. 一类反三角算子矩阵的特征值问题[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版)，2017，48(3)：248-253.

[9]　杨胜良. 三对角矩阵的特征值及其应用[J]. 数学的实践与认识，2010，40(3)：155-160.

[10]　鲍四元. 一类三对角矩阵的特征值和特征向量的研究[J]. 高等数学研究，2017，20(1)：13-15.

(下转第 120 页)