【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

一类由 Lévy 噪声驱动的分数阶随机微分方程的平均原理

安如雅，顾海波

（新疆师范大学 数学科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017）

摘　要：提出一类由 Lévy 噪声驱动的多时间尺度非线性分数阶随机微分方程，针对该系统的平均原理展开研究。通过 Khasminskii 技巧证明了该系统在均方意义下其均值化方程的解收敛到原方程的解，利用 Chebyshev 不等式得到概率意义下其均值化方程的解收敛到原方程的解，并给出仿真算例验证理论结果的可行性。

关键词：Lévy 噪声；分数阶微分方程；平均原理；Doob 鞅不等式；Chebyshev 不等式

中图分类号：O 211.63　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.03.008

0　引言

分数阶微分算子是非局部的，在模拟自然现象的长记忆或非局部效应方面，如动力学[1-2]、流体力学[3]以及信号和图像处理[4]等诸多领域应用广泛。一些复杂系统包含随机系数且无法用确定性方程来描述，故随机微分方程被认为是描述此类系统的有效果工具。随机过程大致分为高斯噪声（Brown 运动）和非高斯噪声（Possion 运动或 Lévy 过程）两类。Lévy 过程本质就是具有平稳和独立增量性质的随机过程，被广泛应用在医学[5-6]、金融学[7]等诸多领域。分数阶随机微分方程求解十分困难，Khasminskii[8]提出的平均原理是研究随机微分方程非常有效且重要的工具。随机平均原理的基本思想是建立一个简化随机微分方程的逼近定理，在某种意义上取代原系统，并给出其相对应的最优收敛性定理。近几年，随机微分方程的平均原理受到越来越多学者的关注[9-12]。文献[13]研究了 Riemann-Liouville（R-L）意义下由 Brown 运动驱动的多时间尺度非线性分数阶随机微分方程解的存在性、唯一性、Ulam-Hyers 稳定性和连续性。

上述文献绝大部分单一地研究具有高斯噪声的随机微分方程或具有非高斯噪声的随机微分方程，但目前对既包含高斯噪声又包含非高斯噪声的随机微分方程研究较少。而同时包含这两种噪声的随机微分方程模拟自然现象更为贴切，此类方程被广泛应用于生物工程、建筑工程、经济等领域。

基于上述讨论，本文主要研究了一类由 Lévy 噪声驱动多时间尺度非线性分数阶随机微分方程的平均原理。本文讨论了 R-L 意义下的随机微分方程

收稿日期：2023-12-16

基金项目：国家自然科学基金项目（11961069）；新疆优秀青年科技人才培训计划项目（2019Q022）；新疆师范大学青年拔尖人才项目（XJNUQB2022-14）

第一作者简介：安如雅（2000—　），女，山西吕梁人，硕士研究生，主要从事微分方程理论及数值模拟研究。
E-mail：13579864434@163.com

通信作者简介：顾海波（1982—　），男，山西大同人，教授，博士，主要从事微分方程理论及数值模拟研究。
E-mail：hbgu_math@163.com

$$\begin{cases}\mathrm{d}[{}_0I_t^{1-\beta}(X(t)-X(0))]=f(t,X(t))\mathrm{d}t+\delta(t,X(t))\mathrm{d}W(t)+g(t,X(t))(\mathrm{d}t)^{\alpha}+\\ \qquad\int_{|\nu|<c}F(t,X(t-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}\nu),\\ X(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

的平均原理。其中,${}_0I_t^{1-\beta}$ 表示 R-L 意义下 $1-\beta$ 阶分数阶积分,$\frac{1}{2}<\beta\leqslant1$,$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$。$W(t)$是完备概率空间$(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant0},P)$上的一个 Wiener 过程。$x_0$ 是同一完备概率空间上F_0-可测 $\mathbf{R}^n$-值随机变量,满足$\mathbb{E}|x_0|^2<\infty$,且对于任意的 $t\in[0,T]$均独立于 $W(t)$。$f,g:[0,T]\times S\to\mathbf{R}^n$,$\delta:[0,T]\times S\to\mathbf{R}^{n\times m}$,$F:[0,T]\times S\times Z\to\mathbf{R}^n$,$X(t)\in S:=C([0,T];\mathscr{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^n))$,$Z\subseteq\mathbf{R}^n$ 均为连续可测函数,其中 $\mathscr{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^n)$表示在$(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant0},P)$上所有$F_t$-可测且平方可积的 $\mathbf{R}^n$-值随机变量 $X=\{X(t):0\leqslant t\leqslant T\}$构成的 Banach 空间,其范数为$\mathbb{E}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|X(t)|^2<+\infty$。设 $X(t)$为 F_t 可测,则随机过程$\{X(t),t\geqslant0\}$适应于 F_t。$\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}\nu)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}\nu)-\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}t$ 代表补偿的 Poisson 随机测度,且与 Wiener 过程 $W(t)$相互独立,其强度测度为 ϑ。常数 $c>0$ 为最大允许跳跃距离。

通过 Hölder 不等式、Doob 鞅不等式、Gronwall 不等式等计算技巧进行放缩,再分别利用经典 Khasminskii 技巧和 Chebyshev 不等式,证得系统(1)在均方和概率意义下均收敛于平均方程的解。

1　预备知识

定义 1[14]　令 f 是一个 Lebesgue 可积函数。对任意 $\alpha\in(0,1)$,函数 f 的 α 阶 R-L 积分定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s,t>0,$$

其中,Γ 为 Gamma 函数。

定义 2[15]　对任意 $\alpha>0,n-1<\alpha<n,n\in\mathbf{N}$,函数 f 的 α 阶 R-L 导数定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}s,t>0,s\in\mathbf{R}^+。$$

定义 3[16]　对于一个函数 $f(t)\in[0,T]$,且 $0<\alpha\leqslant1$,则关于$(\mathrm{d}\mu)^{\alpha}$ 的积分定义为

$$\int_0^t f(\mu)(\mathrm{d}\mu)^{\alpha}=\alpha\int_0^t(t-\mu)^{\alpha-1}f(\mu)\mathrm{d}\mu。$$

引理 1(Hölder 不等式)[17]　设 $p>1,q>1$ 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$(称 p,q 是互为共轭指数),若 $f\in\mathscr{L}^p(\Omega)$,$g\in\mathscr{L}^q(\Omega)$,则 $f\cdot g\in\mathscr{L}^1(\Omega)$,并且满足

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant(\int_{\Omega}|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}(\int_{\Omega}|g(x)|^q\mathrm{d}x)^{\frac{1}{q}}。$$

当 $p=q=2$ 时,上述不等式也称为 Cauchy-Schwartz 不等式。

定义 4(Itô 等距)[18]　(1) 设 $F\in\mathscr{L}^2[t_0,T]$,W 是实值 Wiener 过程,其中 $\mathscr{L}^2[t_0,T]$表示所有定义在$[t_0,T]\times\Omega$ 上且满足$\mathbb{E}\int_{t_0}^T|F(s)|^2\mathrm{d}s<\infty$的函数构成的空间,则

$$\mathbb{E}(\int_{t_0}^T F(s)\mathrm{d}W(s))^2=\int_{t_0}^T\mathbb{E}|F(s)|^2\mathrm{d}s。$$

(2) 设 $G\in\mathscr{L}^2[t_0,T]$,$\widetilde{N}$为补偿的 Poisson 随机测度,ϑ 为强度测度,则

$$\mathbb{E}(\int_{t_0}^T\int_U G(s,z)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z))^2=\int_{t_0}^T\int_U\mathbb{E}|G(s,z)|^2\vartheta(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s。$$

引理 2(Doob 鞅不等式)[19]　设 $p>1$,X_t 是 p 次可积的非负下鞅,则$\mathbb{E}|\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}X_t|^p\leqslant(\frac{p}{p-1})^p\,\mathbb{E}X_b^p$;若

X_t 是 p 次可积的 $\mathbf{R}^d$ 值鞅，则$\mathbb{E}(\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|X_t|^p)\leqslant(\frac{p}{p-1})^p\mathbb{E}|X_b|^p$。

引理 3(Chebyshev 不等式)[19] 设 X 是 $\mathscr{L}^p$ 上一随机变量，且 $\varepsilon,p>0$，则有 $P(|X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-p}\mathbb{E}|X|^p$。

引理 4(Gronwall 不等式)[20] 令 $\phi(t)$，$f(t)$是定义在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的非负连续函数，c_0 为非负常数，且满足不等式 $\phi(t)\leqslant c_0+\int_0^t\phi(s)f(s)\mathrm{d}s$，$0\leqslant t\leqslant T$，则有 $\phi(t)\leqslant c_0\exp(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s)$。

为进一步得到想要结果，假设以下条件成立。

(H1) Lipschitz 条件：对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^n$，$t\in\mathbf{R}^+$，存在正常数K_1 使得

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|^2\vee|\delta(t,x_1)-\delta(t,x_2)|^2\vee|g(t,x_1)-g(t,x_2)|^2\vee$$
$$\int_{|\nu|<c}|F(t,x_1,\nu)-F(t,x_2,\nu)|^2\vartheta(\mathrm{d}\nu)\leqslant K_1|x_1-x_2|^2,$$

其中，$|\cdot|$是 $\mathbf{R}^n$ 范数。

(H2) 线性增长条件：对于任意 $x\in\mathbf{R}^n$，$t\in\mathbf{R}^+$，存在正常数K_2 使得

$$|f(t,x)|^2\vee|\delta(t,x)|^2\vee|g(t,x)|^2\vee\int_{|\nu|<c}|F(t,x,\nu)|^2\vartheta(\mathrm{d}\nu)\leqslant K_2(1+|x|^2),$$

其中，$|\cdot|$是 $\mathbf{R}^n$ 范数。

2 主要结果

首先对方程(1)两边积分得到

$$ {}_0I_t^{1-\beta}(X(t)-X(0))=\int_0^t f(s,X(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\delta(s,X(s))\mathrm{d}W(s)+\int_0^t g(s,X(s))(\mathrm{d}s)^\alpha+$$
$$\int_0^t\int_{|\nu|<c}F(s,X(s-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu)。\tag{2}$$

再利用定义 3，对式(2)两边取${}_0I_t^{\beta-1}$ 得到方程(2)的等价积分方程

$$X(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}f(s,X(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\delta(s,X(s))\mathrm{d}W(s)+$$
$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-2}g(s,X(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_{|\nu|<c}(t-s)^{\beta-1}F(s,X(s-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu)。\tag{3}$$

定理 1 当假设条件(H1)和(H2)成立时，对任意的$\alpha\in[\frac{1}{2},1)$，$\beta\in(\frac{1}{2},1]$，方程(1)有唯一解，其解具有方程(3)的形式。

注 1 上述定理的证明可参考文献[13]中定理 3.3 的证明过程。

考虑 $\mathbf{R}^n$ 上方程(1)的平均原理，根据文献[18]，定义方程(3)的标准形式为

$$X_\varepsilon(t)=x_0+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}f(s,X_\varepsilon(s))\mathrm{d}s+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\delta(s,X_\varepsilon(s))\mathrm{d}W(s)+$$
$$\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-2}g(s,X_\varepsilon(s))\mathrm{d}s+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_{|\nu|<c}(t-s)^{\beta-1}F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu),\tag{4}$$

其中，f,δ,g,F 均满足条件(H1)(H2)，$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$为正的小参数，$\varepsilon_0$ 是一给定常数，则方程(4)存在唯一解 $X_\varepsilon(t)$，$t\in[0,T]$。

考虑均值化方程

$$Y_\varepsilon(t)=x_0+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\overline{f}(Y_\varepsilon(s))\mathrm{d}s+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}\overline{\delta}(Y_\varepsilon(s))\mathrm{d}W(s)+$$
$$\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-2}\overline{g}(Y_\varepsilon(s))\mathrm{d}s+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_{|\nu|<c}(t-s)^{\beta-1}\overline{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu)。\tag{5}$$

其中，$\bar{f},\bar{g}:S\to\mathbf{R}^n$，$\bar{\delta}:S\to\mathbf{R}^{n\times m}$，$\bar{F}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{Z}\to\mathbf{R}^n$ 均为可测函数，且满足条件(H1)和(H2)，则方程(5)存在唯一解 $Y_\varepsilon(t)$，$t\in[0,T]$。为获取平均原理，进一步假设以下条件成立。

(H3)平均条件：对于任意 $T_1\in[0,T]$，$x\in\mathbf{R}^n$，存在正有界函数$\varphi_i(u)$且$\lim\limits_{u\to\infty}\varphi_i(u)=0(i=1,2,3,4)$使得

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|f(s,x(s))-\bar{f}(x(s))|^2\mathrm{d}s\leqslant\varphi_1(T_1)(1+|x|^2),$$

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|\delta(s,x(s))-\bar{\delta}(x(s))|^2\mathrm{d}s\leqslant\varphi_2(T_1)(1+|x|^2),$$

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}|g(s,x(s))-\bar{g}(x(s))|^2\mathrm{d}s\leqslant\varphi_3(T_1)(1+|x|^2),$$

$$\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}\int_{|\nu|<c}|F(s,x(s),\nu)-\bar{F}(x(s),\nu)|^2\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\leqslant\varphi_4(T_1)(1+|x|^2)。$$

下面主要建立 $X_\varepsilon(t)$与 $Y_\varepsilon(t)$的关系，旨在证明均值化方程(5)的解在均方和概率意义下收敛到方程(4)的解。

定理2　假定方程(4)(5)满足假设条件(H1)～(H3)，对于给定的任意常数$\delta_1>0$，存在常数 $\gamma\in(0,1)$，$L>0$，$\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$使得当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$时有$\mathbb{E}(\sup\limits_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2)\leqslant\delta_1$。

证明　对于任意 $t\in[0,u]\subset[0,T]$，

$$\begin{aligned}X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)=&\frac{\varepsilon}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}[f(s,X_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))]\mathrm{d}s+\\&\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]\mathrm{d}W(s)+\\&\frac{\varepsilon\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,X_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))]\mathrm{d}s+\\&\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\int_{|\nu|<c}(t-s)^{\beta-1}[F(s,X_\varepsilon(s),\nu)-\bar{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu)。\end{aligned}\tag{6}$$

由初等不等式有

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\leqslant&\frac{4\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[f(s,X_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2+\\&\frac{4\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2+\\&\frac{4\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,X_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2+\\&\frac{4\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,X_\varepsilon(s),\nu)-\bar{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)]|\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu)\right)^2:=I_1+I_2+I_3+I_4。\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}I_1=&\frac{4\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[f(s,X_\varepsilon(s))-f(s,Y_\varepsilon(s))+f(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2\leqslant\\&\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[f(s,X_\varepsilon(s))-f(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2+\\&\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[f(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2:=I_{11}+I_{12}。\end{aligned}$$

对I_{11}取期望，由 Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H1)，有

$$\mathbb{E}|I_{11}|=\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t|(t-s)^{\beta-1}[f(s,X_\varepsilon(s))-f(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2}\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t |f(s,X_\varepsilon(s))-f(s,Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2 u^{2\beta-1}K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\int_0^u \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}s\leqslant 8\varepsilon^2 u^{2\beta-1}K_{11}\int_0^u \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u,$$

其中，K_{11}为常数，$K_{11}=\dfrac{K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。对$I_{12}$取期望，由 Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H3)，有

$$\mathbb{E}|I_{12}|=\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[f(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2}\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t |f(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2 u^{2\beta-1}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(t\cdot\frac{1}{t}\int_0^t |f(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{f}(Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$8\varepsilon^2 u^{2\beta}K_{12}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\varphi_1(t)\left(1+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|Y_\varepsilon(t)|^2\right)\right),$$

其中，K_{12}为常数，$K_{12}=\dfrac{1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。

由文献[21]可知，对于由 Lévy 噪声驱动的随机微分方程，若$\mathbb{E}|X(0)|^2<\infty$，当 $t\geqslant 0$ 时有$\mathbb{E}|X(t)|^2<\infty$，进而有$\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant u}|Y_\varepsilon(t)|^2\right)<\infty$。又因为$\varphi_1(t)$是正的有界函数，则有$\mathbb{E}|I_{12}|\leqslant 8\varepsilon^2 u^{2\beta}\overline{K}_{12}$，($\overline{K}_{12}$为常数)。由上可得

$$\mathbb{E}|I_1|\leqslant 8\varepsilon^2 u^{2\beta-1}K_{11}\int_0^u \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon^2 u^{2\beta}\overline{K}_{12}。\tag{7}$$

对 I_2 进行同样操作，

$$I_2=\frac{4\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))+\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2+$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2:=I_{21}+I_{22}。$$

对I_{21}取期望，由 Itô 等距、Doob 鞅不等式、Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H1)有

$$\mathbb{E}|I_{21}|=\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2=$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^u \mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))]|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^u \left(\frac{2}{2-1}\right)^2\mathbb{E}|(u-s)^{\beta-1}[\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))]|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\cdot 4\cdot\left(\int_0^u (u-s)^{2\beta-2}\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^u \mathbb{E}|\delta(s,X_\varepsilon(s))-\delta(s,Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon\cdot 4\cdot u^{2\beta-1}K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\int_0^u \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}s=8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{21}\int_0^u \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u,$$

其中，K_{21}为常数，$K_{21}=\dfrac{4K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。对 I_{22} 取期望，由 Itô 等距、Doob 鞅不等式、Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H3)有

$$\mathbb{E}|I_{22}|=\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t |(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}W(s)\right)^2=$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^u \mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|(t-s)^{\beta-1}[\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\int_0^u(\frac{2}{2-1})^2\ \mathbb{E}|(u-s)^{\beta-1}[\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))]|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\cdot4(\int_0^u(u-s)^{2\beta-2}\mathrm{d}s)(u\cdot\frac{1}{u}\int_0^u\mathbb{E}|\delta(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{\delta}(Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s)\leqslant$$

$$8\varepsilon u^{2\beta}K_{22}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\varphi_2(t)(1+\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|Y_\varepsilon(t)|^2)),$$

其中，K_{22} 为常数，$K_{22}=\frac{4}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。同理可得

$$\mathbb{E}|I_2|\leqslant8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{21}\int_0^u\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}u+8\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{22},\tag{8}$$

其中，$\overline{K}_{22}$ 为常数。对 I_3 进行同样操作，

$$I_3=\frac{4\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,X_\varepsilon(s))-g(s,Y_\varepsilon(s))+g(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,X_\varepsilon(s))-g(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s)^2+$$

$$\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s)^2:=I_{31}+I_{32}。$$

对 I_{31} 取期望，由 Cauchy-Schwarz 不等式、假设条件(H1)有

$$\mathbb{E}|I_{31}|=\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,X_\varepsilon(s))-g(s,Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t(t-s)^{(\alpha+\beta-2)^2}\mathrm{d}s)(\int_0^t|g(s,X_\varepsilon(s))-g(s,Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}\Gamma^2(\alpha+1)K_1}{((\alpha+\beta-2)^2+1)\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\int_0^u\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}\int_0^u\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}u,$$

其中，K_{31} 为常数，$K_{31}=\frac{\Gamma^2(\alpha+1)K_1}{((\alpha+\beta-2)^2+1)\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}$。对 I_{32} 取期望，由 Cauchy-Schwarz 不等式、假设条件(H3)有

$$\mathbb{E}|I_{32}|=\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t|(t-s)^{\alpha+\beta-2}[g(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))]|\mathrm{d}s)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t(t-s)^{(\alpha+\beta-2)^2}\mathrm{d}s)(\int_0^t|g(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}\Gamma^2(\alpha+1)}{((\alpha+\beta-2)^2+1)\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(t\cdot\frac{1}{t}\int_0^t|g(s,Y_\varepsilon(s))-\bar{g}(Y_\varepsilon(s))|^2\mathrm{d}s)\leqslant$$

$$8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+2}K_{32}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\varphi_3(t)(1+\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|Y_\varepsilon(t)|^2)),$$

其中，K_{32} 为常数，$K_{32}=\frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{((\alpha+\beta-2)^2+1)\Gamma^2(\alpha+\beta-1)}$。同理可得

$$\mathbb{E}|I_3|\leqslant8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}\int_0^u\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2)\mathrm{d}u+8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+2}\overline{K}_{32},\tag{9}$$

其中，$\overline{K}_{32}$ 为常数。对 I_4 进行同样操作，

$$I_4=\frac{4\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)-F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)+$$

$$F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)-\overline{F}(Y_\varepsilon(s),\nu)]|\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}\nu))^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)-F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)]|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s)^2+$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)-\overline{F}(Y_\varepsilon(s),\nu)]|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)^2:=I_{41}+I_{42}。$$

对 I_{41} 取期望，由 Doob 鞅不等式、Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H1)有

$$\mathbb{E}|I_{41}|=\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)-F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)]|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\left(\frac{2}{2-1}\right)^2\mathbb{E}\left(\int_0^u(u-s)^{\beta-1}\int_{|\nu|<c}|F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)-F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon\cdot 4}{\Gamma^2(\beta)}\left(\int_0^u(u-s)^{2\beta-2}\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^u\int_{|\nu|<c}\mathbb{E}|F(s,X_\varepsilon(s-),\nu)-F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)|^2\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon\cdot 4u^{2\beta-1}K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}s=8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{41}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u,$$

其中，K_{41} 为常数，$K_{41}=\dfrac{4K_1}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。对 I_{42} 取期望，由 Doob 鞅不等式、Cauchy-Schwarz 不等式和假设条件(H3)，有

$$\mathbb{E}|I_{42}|=\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\left(\int_0^t\int_{|\nu|<c}|(t-s)^{\beta-1}[F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)-\overline{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)]|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon}{\Gamma^2(\beta)}\cdot\left(\frac{2}{2-1}\right)^2\mathbb{E}\left(\int_0^u(u-s)^{\beta-1}\int_{|\nu|<c}|F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)-\overline{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)|\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)^2\leqslant$$

$$\frac{8\varepsilon\cdot 4u^{2\beta-1}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\left(u\cdot\frac{1}{u}\int_0^t\int_{|\nu|<c}|F(s,Y_\varepsilon(s-),\nu)-\overline{F}(Y_\varepsilon(s-),\nu)|^2\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s\right)\leqslant$$

$$8\varepsilon u^{2\beta}K_{42}\sup_{0\leqslant t\leqslant u}\varphi_4(t)\left(1+\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|Y_\varepsilon(t)|^2\right)\right),$$

其中，K_{42} 为常数，$K_{42}=\dfrac{4}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}$。同理可得

$$\mathbb{E}|I_4|\leqslant 8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{41}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{42},$$

其中，$\overline{K}_{42}$ 为常数。对式(6)取期望，并将式(7)～(9)代入，则有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\leqslant 8\varepsilon^2u^{2\beta-1}K_{11}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon^2u^{2\beta}\overline{K}_{12}+$$

$$8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{21}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{22}+$$

$$8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+2}\overline{K}_{32}+$$

$$8\varepsilon u^{2\beta-1}K_{41}\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+8\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{42}\leqslant$$

$$8(\varepsilon^2u^{2\beta-1}K_{11}+\varepsilon u^{2\beta-1}K_{21}+\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}+\varepsilon u^{2\beta-1}K_{41})\int_0^u\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\mathrm{d}u+$$

$$8(\varepsilon^2u^{2\beta}\overline{K}_{12}+\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{22}+\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+2}\overline{K}_{32}+\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{42})。$$

根据 Gronwall 不等式有

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant u}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\leqslant 8(\varepsilon^2u^{2\beta}\overline{K}_{12}+\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{22}+\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+2}\overline{K}_{32}+\varepsilon u^{2\beta}\overline{K}_{42})\times$$

$$\exp(8(\varepsilon^2u^{2\beta-1}K_{11}+\varepsilon u^{2\beta-1}K_{21}+\varepsilon^2u^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}+\varepsilon u^{2\beta-1}K_{41}))。$$

选取 $\gamma\in(0,1)$ 以及 $L>0$ 使得当 $t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]$ 时有 $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\leqslant C\varepsilon^{1-\gamma}$，其中，

$$C=8(\varepsilon^{1+\gamma-2\gamma\beta}L^{2\beta}\overline{K}_{12}+\varepsilon^{2\gamma(1-\beta)}L^{2\beta}\overline{K}_{22}+\varepsilon^{1+\gamma-2\gamma\beta}L^{(\alpha+\beta-2)^2+2}\overline{K}_{32}+\varepsilon^{2\gamma(1-\beta)}L^{2\beta}\overline{K}_{42})\times$$

$$\exp(8(\varepsilon^{2(1-\gamma\beta)}L^{2\beta-1}K_{11}+\varepsilon^{1+\gamma(1-2\beta)}L^{2\beta-1}K_{21}+\varepsilon^{2(1-\gamma\beta)}L^{(\alpha+\beta-2)^2+1}K_{31}+L^{2\beta-1}K_{41}))$$

为常数。因此，对于给定的 $\delta_1>0$，可以选取 $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$ 使得对于任意的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ 以及 $t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]$，式

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\leqslant\delta_1$$

成立。证毕。下面进一步给出概率意义上的收敛性。

定理 3　假设条件(H1)～(H3)均成立，对于任意给定的数 $\eta_1>0$，$L>0$ 及 $\gamma\in(0,1)$，存在常数 $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$使得 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$及 $t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]$时有

$$\lim_{\varepsilon\to0}P\left(\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|>\eta_1\right)=0。$$

证明　由定理 2 和 Chebyshev 不等式，有

$$P\left(\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|>\eta_1\right)\leqslant\frac{1}{\eta_1^{\;2}}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,L\varepsilon^{-\gamma}]}|X_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(t)|^2\right)\leqslant\frac{C\varepsilon^{1-\gamma}}{\eta_1^2}。$$

因此，定理结论成立。

注 2　上述定理表明均值化方程的解 $Y_\varepsilon(t)$在均方和概率两种意义下均收敛到原方程的解 $X_\varepsilon(t)$。

3　例子

令 $\Omega=[0,1]$，$T=100$，$\beta=\frac{3}{4}$，$\alpha=\frac{1}{2}$。考虑如下形式的由 Lévy 噪声驱动的多时间尺度非线性分数阶随机微分方程的平均原理：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[{}_0I_t^{1/4}(X_\varepsilon(t)-X_\varepsilon(0))]=&\varepsilon f(t,X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\delta(t,X_\varepsilon(t))\mathrm{d}W(t)+\\&\varepsilon g(t,X_\varepsilon(t))\sqrt{\mathrm{d}t}+\sqrt{\varepsilon}\int_{|v|<c}F(t,X_\varepsilon(t-),\nu)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}\nu),\end{aligned}\tag{10}$$

其中，初值

$$X_\varepsilon(0)=0,X_\varepsilon(t)\in S:=C([0,100],L^2([0,1],\mathbf{R}^n)),t\in[0,100]。$$

分别定义函数

$$f(t,X_\varepsilon(t))=3t^2X_\varepsilon(t),\delta(t,X_\varepsilon(t))=\frac{\sin(t+X_\varepsilon(t))}{\mathrm{e}^t}+1,g(t,X_\varepsilon(t))=2,F(t,X_\varepsilon(t-),\nu)=\nu X_\varepsilon(t),$$

并满足假设条件(H1)和(H2)。令

$$\overline{f}(X_\varepsilon(t))=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t,X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t=\pi^2X_\varepsilon(t),$$

$$\overline{\delta}(X_\varepsilon(t))=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\delta(t,X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t=1,$$

$$\overline{g}(X_\varepsilon(t))=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t,X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t=2,$$

$$\overline{F}(X_\varepsilon(t),v)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_{|\nu|<c}F(t,X_\varepsilon(t-),\nu)\vartheta(\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}s=\int_{|\nu|<c}\nu X_\varepsilon(t)\vartheta(\mathrm{d}\nu),$$

$\overline{f},\overline{\delta},\overline{g},\overline{F}$易验证满足假设(H3)。进一步得到方程(11)的均值化方程

$$\mathrm{d}[{}_0I_t^{1/4}(Y_\varepsilon(t)-Y_\varepsilon(0))]=\varepsilon\pi^2Y_\varepsilon(t)\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}W(t)+2\varepsilon\sqrt{\mathrm{d}t}+\sqrt{\varepsilon}\int_{|\nu|<c}\nu Y_\varepsilon(t)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}\nu)。\tag{11}$$

其中，初值

$$Y_\varepsilon(0)=0,Y_\varepsilon(t)\in S:=C([0,100],L^2([0,1],\mathbf{R}^n)),t\in[0,100]。$$

由定理 2 和定理 3 可知，方程(11)的解 $Y_\varepsilon(t)$在均方和概率意义下均收敛到方程(10)的解 $X_\varepsilon(t)$。

4　结论

由于分数阶随机微分方程的求解几乎不太可能，并且十分困难，故本文研究了一类由 Lévy 噪声驱动的多时间尺度非线性分数阶随机微分方程的平均原理。首先提出该系统的均值化方程，其次通过 Hölder 不等式、Doob 鞅不等式、Gronwall 不等式等计算技巧进行放缩，接着分别利用经典 Khasminskii 技巧和

Chebyshev 不等式，在均方和概率意义下得到了均值化方程的解收敛到原方程的解，最后举例说明所得结果的有效性。在今后的工作中，将基于本文结果，对研究对象的广度与深度进一步拓展，如系统(1)可以用 Hilfer 分数阶算子来研究。

参考文献：

[1] ZHANG S Q. The uniqueness result of solutions to initial value problems of differential equations of variable-order[J]. Matemáticas，2018，112(2)：407-423.

[2] ZHANG S Q，LEI H. Unique existence result of approximate solution to initial value problem for fractional differential equation of variable order involving the derivative arguments on the half-axis [J]. Mathematics，2019，7(3)：286. DOI：10. 3390/math7030286.

[3] ATANGANA A，ALQAHTANI R T. Stability analysis of nonlinear thin viscous fluid sheet flow equation with local fractional variable order derivative[J]. Journal of computational and theoretical nanoscience，2016，13(5)：2710-2717.

[4] BHARDWAJ A，WADHWS A. Medical image enhancement using fractional derivatives[C]. AIP Conference Proceedings，2020，2214(1). DOI：10. 1063/5. 0003376.

[5] HENRIQUES M，VALERIO D，GORDO P，et al. Fractional-order colour image processing[J]. Mathematics，2021，9(5)：457. DOI：10. 3390/math9050457.

[6] CARLETTI M. Numerical solution of stochastic differential problems in the biosciences[J]. Journal of computational and applied mathematics，2006，185(2)：422-440.

[7] El KAROUI N，PENG S，QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical finance，1997，7(1)：1-71. DOI：10. 1111/1467-9965. 00022.

[8] KHASMINSKII R Z. On the principle of averaging the Itov's stochastic differential equations[J]. Kybernetika，1968，4(3)：260-279.

[9] MOUY M，BOULARES H，ALSHAMMARI S，et al. On averaging principle for Caputo-Hadamard fractional stochastic differential pantograph equation[J]. Fractal and fractional，2022，7(1)：31. DOI：10. 3390/FRACTALFRACT7010031.

[10] XIAO G L，FECKAN M，WANG J R. On the averaging principle for stochastic differential equations involving Caputo fractional derivative[J]. Chaos，2022，32(10). DOI：10. 1063/5. 0108050.

[11] YANG M，LV T，WANG Q R. The averaging principle for Hilfer fractional stochastic evolution equations with Lévy noise[J]. Fractal and fractional，2023，7(10)：701. DOI：10. 3390/fractalfract7100701.

[12] AHMED M H，ZHU Q X. The averaging principle of Hilfer fractional stochastic delay differential equations with Poisson jumps[J]. Applied mathematics letters，2021，112：106755. DOI：10. 1016/j. aml. 2020. 106755.

[13] ALKHAZZAN A，WANG J，TUNÇ C，et al. On existence and continuity results of solution for multi-time scale fractional stochastic differential equation[J]. Qualitative theory of dynamical systems，2023，22(2)：49. DOI：10. 1007/s12346-023-00750-x.

[14] PODLUBNV I. Fractional differential equations：an introduction to fractional derivatives，fractional differential equations，to methods of their solution and some of their applications[M]. Elsevier，1998：62-77.

[15] ZHOU Y，WANG J，ZHANG L. Basic theory of fractional differential equations(Third Edition)

[M]. New Jersey：World Scientific Publishing Company，2023：4-11.
[16] JUMARIE G. On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^{\alpha}$[J]. Applied mathematics letters，2005，18(7)：739-748.
[17] 王术. Sobolev 空间与偏微分方程理论[M]. 北京：科学出版社，2009：16-22.
[18] 刘欣. Lévy 噪声扰动的随机微分方程的回复解[D]. 大连：大连理工大学，2022.
[19] 胡适耕，黄乘明，吴付科. 随机微分方程[M]. 北京：科学出版社，2008：3-10.
[20] KHASMINSKII R. Stochastic stability of differential equations[M]. Berlin：Springer Science and Business Media，2011：4-9.
[21] NANE E，NI Y. Path stability of stochastic differential equations driven by time-changed Lévy noises[J]. ALEA：Latin American journal of probability and mathematical statistics，2018，15：479-507.

Average Principle for Fractional Order Stochastic Differential Equations Driven by Lévy Noise

AN Ruya，GU Haibo
(*School of Mathematical Sciences*，*Xinjiang Normal University*，*Urumqi* 830017，*China*)

Abstract：A class of nonlinear fractional-order stochastic differential equations driven by Lévy noise on multiple time scales is proposed，and the study is carried out with respect to the averaging principle of this system. In the first place，by using Khasminskii's technique，it is proved that the solution of the system converges to the solution of the original equation in the mean-square sense of its averaging equation. What's more，the solution of its averaging equation in the probabilistic sense of its averaging equation is obtained to converge to the solution of the original equation by using Chebyshev inequality. Finally，simulation examples are given to verify the feasibility of the theoretical results.

Keywords：Lévy noise；fractional differential equations；averaging principle；Doob martingale inequality；Chebyshev inequality

（责任编辑：贾晶晶）

引用格式　安如雅，顾海波. 一类由 Lévy 噪声驱动的分数阶随机微分方程的平均原理[J]. 山东航空学院学报，2024，41(3)：60-69. AN R Y，GU H B. Average principle for fractional order stochastic differential equations driven by Lévy noise[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics，2024，41(3)：60-69.