【基础理论研究】微分方程与动力系统专题

含参数积分边界条件的三阶边值问题的奇数个正解

常梦飞，杨赟瑞，李丝雨

（兰州交通大学 数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：运用 Krasnoselskii's 不动点定理得到了一类含参数积分边界条件的三阶边值问题奇数个正解的存在性，并对所得结论给出了具体的应用实例。

关键词：三阶边值问题；奇数个正解；存在性；Krasnoselskii's 不动点定理；积分边界条件

中图分类号：O 175.8　　**文献标识码**：A　　DOI：10.13486/j.issn.2097-4973.2024.03.009

0　引言

常微分积分边值问题在声波理论、等离子物理和弹性力学等领域应用广泛，因此许多学者致力于此类边值问题的研究。借助不动点定理、特征值理论和单调迭代技术等方法，研究人员得到了一些有意义的关于积分边值问题正解的存在性结果[1-8]。文献[2]运用 Leggett-Williams 不动点定理研究了带积分边界条件的四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+\beta u''(t)-\alpha u(t)=f(t,u(t),u''(t)),t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=0, \\ u''(0)=u''(1)=\int_0^1 g(s)u''(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

三个正解的存在性。文献[3]利用 Leray-Schauder 不动点定理考虑了二阶非线性含参积分边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)f(u)=0,t\in(0,1), \\ u(0)=0,\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s=u(1) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，这里 $0<\eta<1$，$0<\alpha<\frac{2}{\eta^2}$，$\alpha\in C([0,1],[0,\infty))$。文献[4]借助 Krasnoselskii's 不动点定理在文献[3]的基础上得到了积分边值问题(1)奇数个正解的存在性。此外，对偶数阶积分边值问题正解存在性的相关工作还可参见文献[5-8]。

但是，对含参数积分边值条件奇数阶积分边值问题的正解及多个正解的研究尚在进一步完善中[9-13]。文献[10]利用单调迭代技术建立了含参数积分边界条件的三阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0,t\in[0,T], \\ u'(T)=u''(0)=0,u(0)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s \end{cases}$$

收稿日期：2024-04-03

基金项目：国家自然科学基金项目(12361038)；兰州交通大学百名青年优秀人才培养计划基金资助项目

第一作者简介：常梦飞(2000—　)，男，河南洛阳人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析、泛函微分方程研究。E-mail：cmf991214@163.com

通信作者简介：杨赟瑞(1979—　)，女，甘肃天水人，教授，博士，主要从事非线性泛函分析、泛函微分方程、非线性发展方程和无穷维动力系统研究。E-mail：lily1979101@163.com

多个正解的存在性。近来，文献[11]基于 Guo-Krasnoselskill 不动点定理研究了三阶积分边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+\lambda a(t)f(t,u(t),u'(t))=0,t\in(0,1), \\ u(0)=\int_0^1 \alpha(s)u(s)\mathrm{d}s,u'(0)=u'(1)=0 \end{cases}$$

的 $2n-1(n=1,2,3,\cdots)$ 个正解。

受上述研究的启发，本文利用 Krasnoselskii's(锥拉伸与压缩)不动点定理建立一类非线性三阶含参数积分边界条件的边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t),u''(t))=0,t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0,u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2}$$

$2n-1(n=1,2,\cdots)$ 个正解的存在性。其中，$0<\eta<1$，$0<\lambda<\min\{\frac{2}{\eta^2},\frac{3(1-\eta)^2}{\eta^3}\}$。这不仅将偶数阶积分边值问题正解的研究推广到了奇数阶含参数积分条件边值问题的多个正解，还完善了已有积分边值问题正解的研究工作。

1　预备知识

本文总假定下述条件成立：

(H1) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0],[0,+\infty))$。

(H2) $0<\lambda<\min\{\frac{2}{\eta^2},\frac{3(1-\eta)^2}{\eta^3}\}$，其中 $0<\eta<1$。

定义 1[4]　设 P 是实 Banach 空间 E 中的一个锥，P 是 E 中的非空凸闭集，并满足如下条件：(i) $x\in P$，$\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$；(ii) $x\in P,-x\in P\Rightarrow x=\theta$，$\theta$ 是 E 中的零元素。

记 $E=C^2[0,1]$，对 $\forall u\in E$，定义其范数

$$\|u\|_2=\|u\|+\|u''\|=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|+\max_{t\in[0,1]}|u''(t)|,$$

这里 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$ 为连续函数空间 $C[0,1]$ 中的范数，不难验证 E 为 Banach 空间。

引理 1[4]　设 E 是实的 Banach 空间，$P\subset E$ 是锥，且存在常数 $0<r<R$，若全连续算子 $A:P\to P$ 满足下述两个条件之一：

(1) $u\in P$，$\|u\|=r$ 时有 $\|Au\|\leqslant\|u\|$，$\|u\|=R$ 时有 $\|Au\|\geqslant\|u\|$；

(2) $u\in P$，$\|u\|=r$ 时有 $\|Au\|\geqslant\|u\|$，$\|u\|=R$ 时有 $\|Au\|\leqslant\|u\|$；

则算子 A 在 P 上有不动点 u，且满足 $r\leqslant\|u\|\leqslant R$。

引理 2　若 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$，$y(\cdot)\in C[0,1]$，则边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+y(t)=0,t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0,u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3}$$

有唯一解

$$u(t)=\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2y(s)\mathrm{d}s-\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2y(s)\mathrm{d}s。$$

证明　对式(3)的第 1 个式子 $u'''(t)+y(t)=0$ 从 0 到 t 积分得到

$$u''(t)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s, \tag{4}$$

对式(4)从 0 到 t 积分，得

$$u'(t)=u'(0)-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s, \tag{5}$$

对式(5)从 0 到 t 积分,得

$$u(t)=u'(0)t-\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}y(s)\mathrm{d}s。\tag{6}$$

则当 $t=1$ 时,有

$$u(1)=u'(0)-\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}y(s)\mathrm{d}s。\tag{7}$$

另外,对式(6)从 0 到 η 两边积分可得

$$\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s=u'(0)\frac{\eta^2}{2}-\int_0^\eta\int_0^x \frac{(x-s)^2}{2}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x=u'(0)\frac{\eta^2}{2}-\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^3}{6}y(s)\mathrm{d}s。\tag{8}$$

由式(7)(8)以及边界条件

$$u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s\tag{9}$$

可知

$$u'(0)-\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}y(s)\mathrm{d}s=\frac{\lambda\eta^2}{2}u'(0)-\lambda\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^3}{6}y(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$u'(0)=\frac{2}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}y(s)\mathrm{d}s-\frac{2\lambda}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta \frac{(\eta-s)^3}{6}y(s)\mathrm{d}s。\tag{10}$$

将式(10)代入式(6)可得

$$u(t)=\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1 (1-s)^2y(s)\mathrm{d}s-\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta (\eta-s)^3y(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2y(s)\mathrm{d}s。$$

引理 3 若 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$,$y(\cdot)\in C[0,1]$且 $y(\cdot)\geqslant 0$,则边值问题(3)的唯一解 u 满足 $u\geqslant 0$,$t\in(0,1)$。

证明 若 $u(1)\geqslant 0$,由 u 的凸性及边界条件(9)可知 $u(t)\geqslant 0$。利用 u 的凸性和定积分的几何意义得

$$\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{2}\eta u(\eta)。\tag{11}$$

其中,$\frac{1}{2}\eta u(\eta)$为曲线 $u(t)$由 $t=0$ 到 $t=\eta(\eta\in(0,1))$积分下三角形的面积。

若 $u(1)<0$,则由边界条件(9)易知 $\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s<0$,再结合 u 的凸性可知 $u(\eta)<0$。利用 u 的凸性和式(11)并结合定积分的几何意义可知

$$\frac{u(1)-u(0)}{1-0}=u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda\eta}{2}u(\eta)=\frac{\lambda\eta^2}{2}\cdot\frac{u(\eta)}{\eta}>\frac{u(\eta)-u(0)}{\eta-0},$$

这与 u 的凸性矛盾。证毕。

引理 4 若 $\lambda>\frac{2}{\eta^2}$,$y(\cdot)\in C[0,1]$且 $y(\cdot)\geqslant 0$,则边值问题(3)没有正解。

证明 假设边值问题(3)有正解 u。若 $u(1)>0$,则 $\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s>0$,从而 $u(\eta)>0$,再结合 $u(0)=0$ 可得

$$\frac{u(1)-u(0)}{1-0}=u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda\eta}{2}u(\eta)=\frac{\lambda\eta^2}{2}\cdot\frac{u(\eta)}{\eta}>\frac{u(\eta)-u(0)}{\eta-0},$$

这与 u 的凸性矛盾。若 $u(1)=0$,则 $\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s=0$,即 $u(t)\equiv 0$,$t\in[0,\eta]$。因此 $\exists\,\tau\in(\eta,1)$,使得 $u(\tau)>0$,则 $u(0)=u(\eta)<u(\tau)$,这与 u 的凸性矛盾。因此,边值问题(3)没有正解。证毕。

引理 5 若 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$,$y(\cdot)\in C[0,1]$且 $y(\cdot)\geqslant 0$,则边值问题(3)的正解 u 满足 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\alpha\|u\|$,

其中 $\alpha:=\min\{\eta,\frac{\lambda\eta^2}{2},\frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\}$。

证明　令 $u(\sigma)=\|u\|$，分为以下 3 种情形进行讨论：

(1) 若 $\eta\leqslant\sigma\leqslant1$ 且 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)=u(\eta)$，则由 u 的凸性可知 $\frac{u(\eta)}{\eta}\geqslant\frac{u(\sigma)}{\sigma}\geqslant u(\sigma)$，所以 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\eta\|u\|$。

(2) 若 $\eta\leqslant\sigma\leqslant1$ 且 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)=u(1)$，则由边界条件(9)、式(11)以及 u 的凸性可得

$$u(1)=\lambda\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda\eta^2}{2}\cdot\frac{u(\eta)}{\eta}>\frac{\lambda\eta^2}{2}\cdot\frac{u(\sigma)}{\sigma}\geqslant\frac{\lambda\eta^2}{2}u(\sigma),$$

因此 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda\eta^2}{2}\|u\|$。

(3) 若 $\sigma\leqslant\eta<1$ 且 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)=u(1)$，则由边界条件(9)、式(11)以及 u 的凸性可知

$$\frac{u(\sigma)-u(1)}{\sigma-1}\geqslant\frac{u(1)-u(\eta)}{1-\eta}\Rightarrow u(\sigma)\leqslant u(1)\frac{2-\lambda\eta^2}{\lambda\eta(1-\eta)},$$

所以 $\inf\limits_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\|u\|$。证毕。

定义

$$P=\{u\in E,u(t)\geqslant0,u''(t)\leqslant0,\inf_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\alpha\|u\|\},$$

显然 P 为 E 中的锥，且对 $\forall u\in P$，有 $u(t)-u''(t)\geqslant\alpha\|u\|$，$t\in[\eta,1]$。

定义 P 上的算子 A 为

$$(Au)(t)=\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s-\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s,\tag{12}$$

若 f 满足条件(H1)，同时 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$，则由引理 2 知：当且仅当算子 A 有不动点时，u 是边值问题(2)的解。

引理 6　假定 $0<\lambda<\frac{2}{\eta^2}$ 且条件(H1)成立，则 $A:P\to P$ 是全连续的。

证明　首先证明 $A(P)\subset P$。由 A 的定义，可得对 $\forall u\in P$ 都有 $A(u)\geqslant0$。由式(12)可得

$$(Au)''(t)=-\int_0^t f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s。$$

因此 $(Au)''\leqslant0$，$\forall u\in P$。由引理 5 可知

$$\inf_{t\in[\eta,1]}u(t)\geqslant\alpha\|u\|,\alpha:=\min\{\eta,\frac{\lambda\eta^2}{2},\frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\},$$

故 $A(P)\subset P$。接下来证明 $A:P\to P$ 是全连续的。假设 $u_n,u\in P$ 且 $\|u_n-u\|_2\to0$(当 $n\to\infty$ 时)，则 $\exists M_1>0$，使得对 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $\|u_n\|_2\leqslant M_1$。由于 $f(s,u(s),u''(s))$ 为连续函数，故存在

$$M_2=\sup\{f(t,u,u''):(t,u,u'')\in[0,1]\times[0,M_1],[-M_1,0]\},$$

则对 $\forall t\in[0,1]$，有

$$(Au_n)(t)=\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s-\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{M_2}{3(2-\lambda\eta^2)}$$

和

$$-(Au_n)''(t)=\int_0^t f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s\leqslant M_2。$$

借助 Lebesgue 收敛定理可得，当 $t\in[0,1]$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}(Au_n)(t)=\lim_{n\to\infty}[\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,u_n(s),u''_n(s))\mathrm{d}s]=$$
$$\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s-\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,u(s),u''(s))\mathrm{d}s=(Au)(t),$$

同理可得$\lim\limits_{n\to\infty}(Au_n)''(t)=(Au)''(t)$。所以

$$\|(Au_n)-(Au)\|_2=\|(Au_n)-(Au)\|+\|(Au_n)''-(Au)''\|\to 0,n\to\infty。$$

故算子 A 连续。再结合 Arzela-Ascoli 定理立即可得 $A:P\to P$ 的全连续性。证毕。

2 主要结论及证明

(H3) $f(t,u,\omega)\geqslant bl_k,\alpha l_k\leqslant u-\omega\leqslant l_k,t\in[\eta,1]$。

(H4) $f(t,u,\omega)\leqslant aL_k,0\leqslant u-\omega\leqslant L_k,t\in[0,1]$。

条件(H3)(H4)中,$a\in(0,\Lambda_2),b\in(\Lambda_1,+\infty),\Lambda_1=\dfrac{3(2-\lambda\eta^2)}{\eta(1-\eta)^3},\Lambda_2=\dfrac{3(2-\lambda\eta^2)}{7-3\lambda\eta^2}$。

定理 1 设$\forall n\in\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$,数列$\{l_k\}_{k=1}^n$和$\{L_k\}_{k=1}^n$满足 $l_{k+1}<L_{k+1}<l_k<L_k$,其中 $k=1,2,3,\cdots,n-1$。若条件(H1)(H2)成立,且函数 f 满足条件(H3)(H4),则边值问题(2)存在 $2n-1(n=1,2,3,\cdots)$个正解$\{u_k\}_{k=1}^n$和$\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{n-1}$,且 $l_k\leqslant\|u_k\|\leqslant L_k(k=1,2,3,\cdots,n),L_{k+1}\leqslant\|\tilde{u}_k\|\leqslant l_k(k=1,2,3,\cdots,n-1)$。

证明 定义开子集$\{\Omega_{1,k}\}_{k=1}^n\subset E,\{\Omega_{2,k}\}_{k=1}^n\subset E$ 如下:

$\Omega_{1,k}=\{u\in P:\|u\|_2<l_k\},k=1,2,3,\cdots,n;\Omega_{2,k}=\{u\in P:\|u\|_2<L_k\},k=1,2,3,\cdots,n$。

(Ⅰ) 若 $u\in P\cap\partial\Omega_{1,k}(k=1,2,3,\cdots,n)$,则当 $t\in[\eta,1]$时,有

$$\alpha\|u\|\leqslant\inf_{t\in[\eta,1]}|u(t)|\leqslant u-\omega\leqslant\|u\|+\|\omega\|=\|u\|_2=l_k。$$

由条件(H3)和式(12)可知

$$\|Au(t)\|=\max_{t\in[0,1]}|\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s|\geqslant$$
$$\frac{\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-\frac{\lambda\eta}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\eta(\eta-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda\eta}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta s^3f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{2+\lambda\eta^2}{2(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta s^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s+\frac{2\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_0^\eta sf(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-$$
$$\frac{6\eta^2-\lambda\eta^4}{6(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{\eta}{2-\lambda\eta^2}\int_\eta^1(1-s)^2f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s+\frac{\lambda\eta}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta s^3f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{6\eta(1-\eta)^2-2\lambda\eta^4}{6(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\eta bl_k(1-\eta)^3}{3(2-\lambda\eta^2)}$$

和

$$\|(Au)''\| = \max_{t\in[0,1]}\left|-\int_0^t f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\right| = \max_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\right| \geqslant 0,$$

所以

$$\|Au\|_2 = \|Au\| + \|(Au)''\| \geqslant \frac{\eta b l_k (1-\eta)^3}{3(2-\lambda\eta^2)} > l_k = \|u\|_2。$$

若 $u\in P\cap\partial\Omega_{2,k}(k=1,2,3,\cdots,n)$,显然,当 $t\in[0,1]$时有 $0\leqslant u-\omega\leqslant\|u\|+\|\omega\|=\|u\|_2=L_k$。由条件(H4)和式(12)可知

$$\|Au(t)\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2 f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3 f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2 f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2 f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{atL_k}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{aL_k}{3(2-\lambda\eta^2)}$$

和

$$\|(Au)''\| = \max_{t\in[0,1]}\left|-\int_0^t f(s,u(s),\omega(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant atL_k\leqslant aL_k,$$

故

$$\|Au\|_2 = \|Au\| + \|(Au)''\| \leqslant \frac{aL_k}{3(2-\lambda\eta^2)} + aL_k = \frac{7-3\lambda\eta^2}{3(2-\lambda\eta^2)}aL_k < L_k = \|u\|_2。$$

利用引理 1 的(2)可知,A 有不动点 $u\in P$ 并且 $l_k\leqslant\|u\|_2\leqslant L_k$。而 $k=1,2,3,\cdots,n$,故 A 存在 n 个不动点 $\{u_k\}_{k=1}^n$。

(Ⅱ) 当 $\tilde{u}\in P\cap\partial\Omega_{2,k+1}(k=1,2,3,\cdots,n-1)$时,则对 $\forall t\in[0,1]$有

$$0\leqslant\tilde{u}-\tilde{\omega}\leqslant\|\tilde{u}\|+\|\tilde{\omega}\|=\|\tilde{u}\|_2=L_{k+1}。$$

由条件(H4)可知

$$\|A\tilde{u}\| = \max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2 f(s,\tilde{u}(s),\tilde{\omega}(s))\mathrm{d}s-\right.$$

$$\left.\frac{\lambda t}{3(2-\lambda\eta^2)}\int_0^\eta(\eta-s)^3 f(s,\tilde{u}(s),\tilde{\omega}(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2 f(s,\tilde{u}(s),\tilde{\omega}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant$$

$$\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2 f(s,\tilde{u}(s),\tilde{\omega}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{atL_{k+1}}{2-\lambda\eta^2}\int_0^1(1-s)^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{aL_{k+1}}{3(2-\lambda\eta^2)}$$

和

$$\|(A\tilde{u})''\| = \max_{t\in[0,1]}\left|-\int_0^t f(s,\tilde{u}(s),\tilde{\omega}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant atL_{k+1}\leqslant aL_{k+1},$$

于是

$$\|A\tilde{u}\|_2 = \|A\tilde{u}\| + \|(A\tilde{u})''\| \leqslant \frac{aL_{k+1}}{3(2-\lambda\eta^2)} + aL_{k+1} = \frac{7-3\lambda\eta^2}{3(2-\lambda\eta^2)}aL_{k+1} < L_{k+1} = \|\tilde{u}\|_2。$$

当 $\tilde{u}\in P\cap\partial\Omega_{1,k}(k=1,2,3,\cdots,n)$,对 $\forall t\in[\eta,1]$,由(Ⅰ)得 $\|A\tilde{u}\|_2\geqslant\|\tilde{u}\|_2$。再结合引理 1 的(1)可得,$A$ 有不动点 $\tilde{u}\in P$ 并且有 $L_{k+1}\leqslant\|\tilde{u}\|_2\leqslant l_k$。而 $k=1,2,3,\cdots,n-1$,故 A 存在 $n-1$ 个不动点$\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{n-1}$。

综上所述,根据(Ⅰ)和(Ⅱ)可知,边值问题(2)存在 $2n-1(n=1,2,3,\cdots)$个正解。

3　应用

例 1　考虑三阶非线性边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+f(t,u(t),u''(t))=0, t\in(0,1), \\ u(0)=u''(0)=0, u(1)=\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} u(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{13}$$

正解的存在性，其中，边值问题(2)中的参数 $\lambda=\frac{1}{5}$，$\eta=\frac{3}{4}$。通过计算不难得到

$$\xi=\min\{\frac{2}{\eta^2},\frac{3(1-\eta)^2}{\eta^3}\}=\frac{4}{9},\alpha=\min\{\eta,\frac{\lambda\eta^2}{2},\frac{\lambda\eta(1-\eta)}{2-\lambda\eta^2}\}=\frac{3}{151},$$

$$\Lambda_1=\frac{3(2-\lambda\eta^2)}{\eta(1-\eta)^3}=483.2,\Lambda_2=\frac{3(2-\lambda\eta^2)}{7-3\lambda\eta^2}\approx 0.8499。$$

令 $n\in\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$，$\gamma\in\mathbf{R}$，$a\in(0,\Lambda_2)$，$b\in(\Lambda_1,+\infty)$，使得 $\beta>\max\{483,\sqrt{b/a}\}$。记 $L_k=\beta^{-4k}$，$l_k=\beta^{-(4k+2)}$，$k\in\{1,2,3,\cdots,n-1\}$，则有 $l_{k+1}<L_{k+1}<l_k<L_k$，$L_{k+1}<l_k<br_k$，$bl_k<aL_k$，以及$[483^{-2}l_k,\frac{3}{151}l_k]\subset[L_{k+1},l_k]$。定义函数 f 为

$$f(t,u,u'')=\begin{cases} L_{k+1}, u-u''\in[0,L_{k+1}], \\ \dfrac{bl_k-L_{k+1}}{483^{-2}l_k-L_{k+1}}(u-u''-L_{k+1})+L_{k+1}, u-u''\in[L_{k+1},483^{-2}l_k], \\ bl_k, u-u''\in[483^{-2}l_k,l_k], \\ \dfrac{bl_k-aL_k}{l_k-L_k}(u-u''-L_k)+aL_k, u-u''\in[l_k,L_k], \\ aL_k, u-u''\in[L_k,+\infty], \end{cases}$$

不难验证 f 满足定理 1 中的条件。则由定理 1 可知，边值问题(13)存在 $2n-1(n=1,2,3,\cdots)$个正解 $\{u_k\}_{k=1}^{n}$和$\{\tilde{u}_k\}_{k=1}^{n-1}$，且

$$\beta^{-(4k+2)}\leqslant\|u_k\|_2\leqslant\beta^{-4k},\beta=1,2,3,\cdots,n;\beta^{-(4k+1)}\leqslant\|\tilde{u}_k\|_2\leqslant\beta^{-(4k+2)},\beta=1,2,3,\cdots,n-1。$$

参考文献：

[1] YANG Y, YANG Y R, LIU K P. Multiple positive solutions for a class of integral boundary value problem[J]. Annals of applied mathematics, 2019, 35(4): 364-373.

[2] 杨璐，杨赟瑞，赵包. 一类四阶积分边值问题的三个正解[J]. 滨州学院学报，2020，36(2)：32-38.

[3] YAO Z J. New results of positive solutions for second-order nonlinear three-point integral boundary value problems[J]. The journal of nonlinear sciences and its applications, 2015, 8(2): 93-98.

[4] 康慧君. 带积分边界条件的非线性二阶常微分方程多个正解的存在性[J]. 理论数学，2021，11(6)：1067-1075.

[5] ZHANG L, XUAN Z. Multiple positive solutions for a second-order boundary value problem with integral boundary conditions[J]. Boundary value problems, 2016, 2016(1): 1-8. DOI: 10.1186/s13661-016-0568-9.

[6] HAN L, ZHANG G, LI H. Positive solutions of fourth-order problem subject to nonlocal boundary conditions[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2020, 43(5): 3675-3691. DOI: 10.1007/s40840-020-00887-x.

[7] LIU K K, YANG Y R, YANG Y. Positive solutions to a BVP with two integral boundary conditions[J]. Annals of applied mathematics, 2020, 36(3): 248-256.

[8] 李孝武，杨赟瑞，刘凯凯. 含积分边值条件的四阶边值问题的三个正解[J]. 滨州学院学报，2021，37

(2):47-54.

[9] 张红娜,薛春艳.带积分边界条件的三阶微分方程正解的存在性[J].沈阳师范大学学报(自然科学版),2021,39(5):427-431.

[10] 李雯婧.一类带积分边界条件的三阶边值问题正解的存在性[J].理论数学,2021,11(5):882-888.

[11] 李丝雨,杨赟瑞,宋雪.一类三阶积分边值问题的奇数个正解[J].山西大学学报(自然科学版),2024,47(3):555-563.

[12] DJOURDEM H,BENAICHA S. Positive solutions of nonlinear third-order boundary value problem with integral boundary conditions[J]. Malaya journal of matematik,2019,7(2):269-275. DOI:10.26637/MJM0702/0019.

[13] SERGEY S. Existence of multiple positive solutions for a third-order boundary value problem with nonlocal conditions[J]. Nonlinear analysis: modelling and control,2023,28(3):597-612. DOI:10.15388/namc.2023.28.32123.

Odd Positive Solutions to a Third-order Boundary Value Problem with Parametric Integral Boundary Conditions

CHANG Mengfei,YANG Yunrui,LI Siyu

(*School of Mathematics and Physics*,*Lanzhou Jiaotong University*,*Lanzhou* 730070,*China*)

Abstract:The existence of odd positive solutions to a class of third-order boundary value problems with parametric integral boundary conditions is established by using Krasnoselskill's fixed point theorem,and a concrete example is given as an application.

Keywords:third-order boundary value problem;odd positive solutions;existence;Krasnoselskii's fixed point theorem;integral boundary condition

(责任编辑:贾晶晶)

引用格式　常梦飞,杨赟瑞,李丝雨.含参数积分边界条件的三阶边值问题的奇数个正解[J].山东航空学院学报,2024,41(3):70-77. CHANG M F,YANG Y R,LI S Y. Odd positive solutions to a third-order boundary value problem with parametric integral boundary conditions[J]. Journal of Shandong University of Aeronautics,2024,41(3):70-77.

本　刊　声　明

本刊已许可中国知网(中国学术期刊(光盘版)电子杂志社)、北京万方数据股份有限公司(万方数据电子出版社)、重庆维普资讯有限公司、超星期刊域出版平台等在其各自的系列数据库产品中以数字化方式复制、汇编、发行及在信息网络传播本刊全文。作者著作权使用费和稿酬(即包括印刷版、光盘版和网络版等各种使用方式的报酬)一并支付。如作者对本声明持有异议,请在投稿时说明。